A3M33MKR
Kalmanův filtr

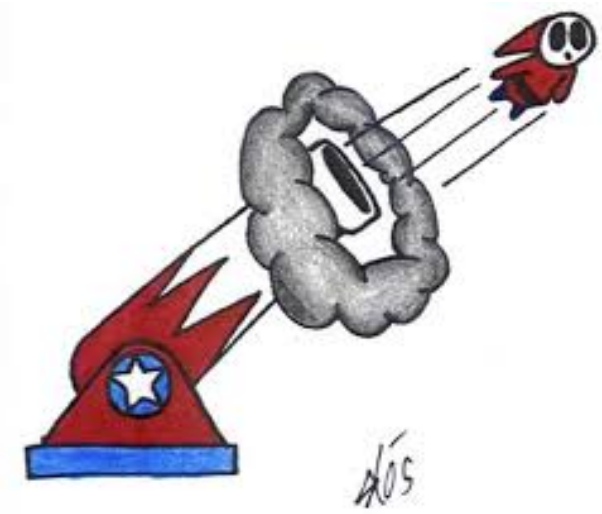
Ing. Karel Košnar PhD., RNDr. Miroslav Kulich, Ph.D.

Intelligent and Mobile Robotics Group
Czech Technical University in Prague

6. listopadu 2019

Zadání

- Budeme řešit známý fyzikální problém: šikmý vrh.
- Předpokládejme kanón, který vystřelí kouli pod neznámým úhlem a neznámou počáteční rychlostí.
- Máme kameru, která zaznamenává pozici koule ze strany. Měřené pozice jsou nicméně zatíženy nemalou chybou (s normálním rozložením).
- Cílem je odhadnout pozici koule jak nejpřesněji to půjde.



Matematický popis

Pozice koule $\mathbf{x} = (x, y)$ je určena vektorem počáteční rychlostí $\mathbf{v_0} = (v_{0x}, v_{0y})$ a gravitačním zrychlením $g = 9.8$ (předpokládáme počáteční pozici $\mathbf{x} = (x_0, y_0)$)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 - v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_x(t) &= v_{0x} \\ v_y(t) &= v_{0y} - gt \end{aligned} \tag{1}$$

Matematický popis

Pokud uvažujeme diskrétní případ, můžeme systém popsat

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + v_{t-1_x}\Delta t \\ y_t &= y_{t-1} - v_{t-1_y}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ v_{t_x} &= v_{t-1_x} \\ v_{t_y} &= v_{t-1_y} - g\Delta t \end{aligned} \tag{2}$$

Popis stavu

$$x_t = \mathbf{A}x_{t-1} + \mathbf{B}u \tag{3}$$

u je řízení (v našem případě vliv gravitačního zrychlení)

Algoritmus Kalman_filter($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$)

Predikce (integrace akce)

$$\bar{\mu}_t = A\mu_{t-1} + Bu_t$$
$$\bar{\Sigma}_t = A_t\Sigma_{t-1}A^T + R$$

Korekce (integrace měření)

$$K_t = \bar{\Sigma}_t C^T (C\bar{\Sigma}_t C^T + Q)^{-1}$$
$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C\bar{\mu}_t)$$
$$\Sigma_t = (E - K_t C)\bar{\Sigma}_t$$
return μ_{t,Σ_t}

A = Stavová matice přechodu.
B = Matice řízení.
C = Matice měření.
R = Šum procesu.
Q = Šum měření.

Kalmanův filtr

- Vstupy:
  - u = Řídicí vektor (v našem případě konstantní).
  - z_t = Vektor měření - pozice koule měřená v daném časovém okamžiku.
- Výstupy:
  - μ_t = Odhad aktuální pozice koule.
  - Σ_t = Nejistota v určení pozice.

Kalmanův filtr - jak ho počítat

Odhad aktuální pozice koule na základě řízení

$$\bar{\mu}_t = \mathbf{A}\mu_{t-1} + \mathbf{B}u$$

Odhad chyby

$$\bar{\Sigma}_t = \mathbf{A}\Sigma_{t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{R}$$

Porovnání reality s predikcí (inovace)

$$\tilde{y} = z_t - \mathbf{C}\bar{\mu}_t$$

Provnání chyby s predikcí

$$S = \mathbf{C}\bar{\Sigma}_t\mathbf{C}^T + \mathbf{Q}$$

Kalmanův filtr - jak ho počítat

Kalmanovo zesílení

$$K = \bar{\Sigma}_t \mathbf{C}^T \mathbf{S}^{-1}$$

Aktualizace stavu

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + \mathbf{K}\tilde{y}$$

a kovarianční matice

$$\Sigma_t = (E - \mathbf{KC})\bar{\Sigma}_t$$

- Zamyslete se na inicializací matic Σ, R, Q a vektoru μ.
- Jaké jsou rozměry matic a vektoru?

Vysvětlení kódu

Inicializace matic, velikost stavového vektoru je 4 a vektoru měření je 2.

```
Matrix4f A,B,\Sigma,R;
Matrix2f Q;
Matrix<float,??,??> C;
Vector4f mu;
float dt = 0.1;
```

Matice lze naplnit takto:

```
X << 1, 0, 0, 0,
     0, 1, 0, 0,
     0, 0, 1, 0,
     0, 0, 0, 1;
```

Vysvětlení kódu - pokračování

Inicializace GUI a simulátoru

```
Gui gui;
System system;
```

Point má složky *x* a *y*. Proměnná

measurement udržuje pozici koule změřenou kamerou

truth obsahue skutečnou pozici koule (použitá pro kreslení)

kfPosition je pozice koule odhadnutá Kalmanovým filtrem

Vysvětlení kódu - pokračování

Hlavní smyčka

- simuluje jeden krok systému,
- počítá skutečnou pozici koule,
- generuje pozici měřenou kamerou a uchovává je v příslušných proměnných
- odhaduje pozici Kalmanovým filtrem
- a kreslí všechny pozice

```
for(int i=1; i<nSteps; i++) {
    system.makeStep();
    truth = system.getTruthPosition();
    measurement = system.getMeasurement();
    kfPosition = KalmanFilter(measurement);
    gui.setPoints(truth, measurement, kfPosition);
}
gui.startInteractor();
```

Shrnutí

Vaším úkolem je implementovat Kalmanův filtr ve funkci *KalmanFilter*

```
Point  KalmanFilter(const Point measuredPosition )
{

}
```

která odhadne pozici koule a vrátí ji jako *Point*.