# Zobrazení, jeho derivace a Taylorův polynom

Tomáš Werner, 2011

Je dána množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a zobrazení $\mathbf{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$. Tedy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Cílem je spočítat pro toto zobrazení Taylorův polynom v daném bodě $\mathbf{x}^*$ a vizualizovat zobrazení $\mathbf{f}$ a Taylorův polynom. Způsob vizualizace se liší podle dimenzí $n$ a $m$, ale je vždy stejný pro zobrazení $\mathbf{f}$ a pro Taylorův polynom. Zopakujme (viz skripta):

- Pro zobrazení $\mathbf{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$ je Taylorův polynom prvního řádu v bodě $\mathbf{x}^*$ zobrazení $\mathbf{T}_1\colon X \to \mathbb{R}^m$ dané předpisem

  $$\mathbf{T}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*),$$

  kde $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$ je totální derivace zobrazení $\mathbf{f}$ (Jacobiho matice rozměru $m \times n$) v bodě $\mathbf{x}^*$.
- Pro funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$ je Taylorův polynom druhého řádu v bodě $\mathbf{x}^*$ funkce $T_2\colon X \to \mathbb{R}$ daná předpisem

  $$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + f'(\mathbf{x}^*)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T f''(\mathbf{x}^*)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \tag{1}$$

  kde $f'(\mathbf{x}^*)$ je totální derivace funkce $f$ (řádkový vektor délky $n$) a $f''(\mathbf{x}^*)$ je Hessova matice funkce $f$ (symetrická matice $n \times n$ druhých parciálních derivací) v bodě $\mathbf{x}^*$.

  Taylorův polynom pro zobrazení $\mathbf{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení $\mathbf{T}_2\colon X \to \mathbb{R}^m$, jehož složky jsou funkce (1) pro každou složku zobrazení $\mathbf{f}$.

Podotkněme, že $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ přísně vzato nejsou polynomy, protože jsou to zobrazení a ne funkce. Tuto nepřesnost v názvosloví je nutno tolerovat.

Konkrétně máme tato zobrazení (e značí Eulerovo číslo, log přirozený logaritmus):

| Příklad č. | $n$ | $m$ | $X$ | $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $\langle -3, 2\rangle$ | $x^3/3 + x^2/2 - x$ |
| 2 | 1 | 2 | $\langle 0, 2\pi\rangle$ | $\begin{bmatrix} \cos x \\ \sin 2x \end{bmatrix}$ |
| 3 | 2 | 1 | $\langle -2, 2\rangle \times \langle -2, 2\rangle$ | $2\mathrm{e}^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ |
| 4 | 2 | 3 | $\langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$ | $\begin{bmatrix} (R + r\cos x_2)\cos x_1 \\ (R + r\cos x_2)\sin x_1 \\ r\sin x_2 \end{bmatrix}$ |
| 5 | 2 | 2 | $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ | $\mathbf{x}\log(1 + \mathbf{x}^T\mathbf{x})$ |
| 6 | 1 | 3 | $\langle 0, 2\pi\rangle$ | složení zobrazení z Příkladu 2 a z Příkladu 4 |

## Postup vypracování

Stáhněte si matlabské funkce `prikladn.m`. Číslo `n` odpovídá pořadí ve výše uvedeném seznamu. Každá funkce vizualizuje zobrazení $\mathbf{f}$, definuje bod $\mathbf{x}^*$ (označený jako `xx`) a nakreslí ho jako kolečko. Pochopte, jak jsou zobrazení visualizována. Pro jednu dvojici $(n, m)$ může být možný více než jeden způsob vizualizace – zamyslete se, zda použitý způsob je jediný možný. Které z obrázků jsou grafy funkce a které ne?

Vaším úkolem je doplnit matlabské funkce `T1` a `T2`, což jsou Taylorovy polynomy prvního a druhého řádu pro zobrazení $\mathbf{f}$. Odkomentováním příslušných řádků se pak polynomy zobrazí.

Jako vzor jsme vypracovali Příklad 1. Pro Příklad 6 vypracujte pouze polynom prvního řádu, pro výpočet totální derivace použijte řetězové pravidlo.

Kontrolou správnosti polynomů je to, že polynomy mají v bodě $\mathbf{x}^*$ se zobrazením $\mathbf{f}$ společnou hodnotu a první a druhou derivaci. Tedy polynom prvního řádu je vždy 'tečný' k zobrazení a polynom druhého řádu je kvadratickou aproximací zobrazení.

Požadovaný výstup cvičení:

- Fungující doplněné funkce `prikladn.m`. Cvičící si odevzdané funkce pustí a z obrázku ihned uvidí, zda je vše v pořádku.
- Písemná zpráva, ve které budou vzorce pro Taylorovy polynomy každého zobrazení (nic jiného tam být nemusí).