

Duální Lineární Programování

Karel Zimmermann

Úvod

V tomto cvičení si ukážeme vztah mezi primární a duální úlohou lineárního programování. Uvidíme, že primární a duální úloha jsou komplementární (tj. že někdy je jednodušší řešit primární a někdy sekundární úlohu) a že duál mnohdy umožňuje jiný náhled na problém. Vše budeme demonstrovat na úloze ϵ -necitlivého prokládání přímky do 2D dat, který jsme řešili již v minulém cvičení.

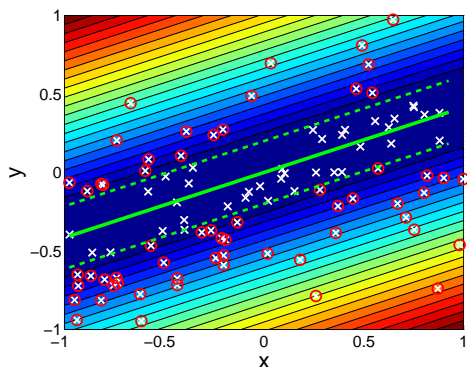
Nechť je dána matice \mathbf{A} ($m \times n$) a vektory \mathbf{b} ($m \times 1$) a \mathbf{c} ($n \times 1$) primární úlohy lineárního programování (viz. Tabulka 1), potom má primární úloha m omezení v n -dimenzionálním prostoru. Duální úloha k tomuto problému má však n omezení v m -dimenzionálním prostoru. To znamená, že např. v úloze minimaxního prokládání, která má $m = 2 \times \text{poet_bod}$ a $n = 3$, můžeme formulací duální úlohy výrazně snížit počet omezení.

	Primární úloha	Duální úloha
Kritérium	$\mathbf{x}^* = \arg \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\mathbf{y}^* = \arg \min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Omezení	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$
Počet omezení	m	n
Dimenze	n	m

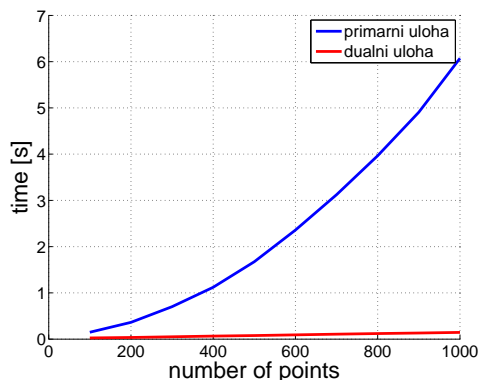
Tabulka 1: Primární a duální úloha lineárního programování.

Úkoly k vypracování

1. Vytvořte množinu velikosti 100 dvojrozměrných bodů jejichž y -ová vzdálenost od nějaké přímky má normální rozdělení (Nápověda: funkce `randn` generuje data s normálním rozdělením).



Obr.1: ϵ -necitlivé prokládání



Obr.2: Doba řešení minimaxního problému

2. S použitím výsledků z minulého cvičení zformulujte a vyřešte primární úlohu lineárního programování, která řeší problém ϵ -necitlivého prokládání. Vizualizujte nalezenou přímku a ϵ -pás obepínající všechny body s nulovou penalizací, viz. např. Obr.1.
3. Zformulujte a vyřešte duální úlohu k úloze ϵ -necitlivého prokládání.
4. Ověřte platnost Silné věty o dualitě pro tento konkrétní problém.
5. Vizualizujte vektor řešení duální úlohy a slovně interpretujte výsledek.

Bonusové úlohy

1. Zformulujte a vyřešte duální úlohu pro problém minimaxního prokládání bodů přímkou.
2. Vykreslete dobu řešení primární a duální úlohy jako funkci počtu bodů v intervalu, viz. např. Obr.2. Nápověda:
 - Ke změření doby trvání kódu slouží např. příkazy *tic* a *toc*.
 - Vzhledem k tomu, že optimalizační toolbox v MATLABu automaticky analyzuje problém a při velkém nepoměru mezi dimenzí a počtem omezení přepne optimalizační metodu, je potřeba vnútit použití simplexové metody pomocí proměnné:

```
options = optimset('LargeScale', 'off', 'Simplex', 'on', 'MaxIter', 1e5)
```

která se zadává jako devátý parametr příkazu *linprog*.