Příklady 14. cvičení OPT

105: Středa 12:45-14:15

1. Nalezněte vzdálenost dvou mnohostěnů $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\}$ ve smyslu eukleidovské normy (vzdálenost dvou množin uvažujeme jako vzdálenost jejích dvou nejbližších bodů).
   (a) Formulujte jako optimalizační úlohu.
   (b) Je úloha konvexní?.
   (c) Kolik má úloha proměnných?
   (d) Kolik má úloha podmínek?
   (e) Jakým způsobem bychom tuto úlohu uměli vyřešit?
   (f) Pokud bychom uvažovali obecnější kritérium - metriku indukovanou obecnou p-normou (tj. $|| \cdot ||_p$), pro jakou hodnotu p by šla úloha zapsat jako lineární program? (Hint: $p = 1$ nebo $p = \infty$)
   (g) Jaký bude vztah mezi optimální hodnotou daného LP a optimem původní úlohy? (Hint: $\forall y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_1 \geq \|y\|_2 \geq \|y\|_\infty$)
2. Nalezněte vzdálenost množin $\text{conv}\{a_1, ..., a_m\}$ a $\text{conv}\{b_1, ..., b_n\}$, kde $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}^d$ jsou dané vektory a conv značí konvexní obal množiny vektorů.
   (a) Formulujte jako optimalizační úlohu.
   (b) Je tato úloha konvexní?
   (c) Kolik má úloha proměnných?
   (d) Kolik má úloha podmínek?
   (e) Je množina $\text{conv}\{a_1, ..., a_m\}$ mnohostěn?
3. Platí, že každý mnohostěn se dá zapsat jako konvexní obal svých extremálních bodů?

4. Platí, že každý mnohostěn, který neobsahuje přímku, se dá zapsat jako konvexní obal svých extremálních bodů?

5. Je dána optimalizační úloha

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)^2 \tag{1a}$$

$$x_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, ..., n\}, \tag{1b}$$

   kde

   - $w_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$
   - $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}$
   - $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$

   jsou konstanty a optimalizujeme přes vektor proměnných x.

   (a) Je úloha konvexní?

   (b) Diskutujte použití gradientní metody pro řešení této úlohy nebo navrhněte alternativu, pokud by byla výhodnější.

   (c) Dokážeme najít optimální řešení (tj. optimální argument) x? (Hint: Zkuste úlohu převést na $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Px - q\|_2^2$)

6. Je dána funkce

$$f(x_1, ..., x_n) = \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} \|a_i - x_j\|_2, \tag{2}$$

   kde $a_i \in \mathbb{R}^d, i \in \{1, ..., m\}$ jsou dané vektory a $x_j \in \mathbb{R}^d, j \in \{1, ..., n\}$ jsou proměnné (též vektory).

   (a) Pokud napíšeme $f : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^v$, jaké jsou hodnoty u, v?

   (b) Je funkce konvexní? Pokud ne, můžeme uvalit nějaká omezení na hodnoty m, n, d, které by ji učinily méně obecnou, ale konvexní? (Hint: Zvažte $n = 1$).

7. Je dána obdélníková matice $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \neq n$, která má ortonormální sloupce.

   (a) Definujte ortonormální množinu vektorů. Co bude platit pro matici $Q^T Q$?

   (b) Co můžeme říci o hodnotách m, n?

(c) Jaká je hodnota rank Q?

(d) Má Q levou nebo pravou inverzi, nebo obě?

(e) Projekci vektoru $y \in \mathbb{R}^m$ na prostor $\operatorname{rng} Q$ označíme jako vektor $x \in \mathbb{R}^d$, jaká je hodnota d? Umíte projekci symbolicky zapsat pomocí Q a y? Jak bychom získali projekci na prostor ortogonální k $\operatorname{rng} Q$?

8. Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

(a) Určete její definitnost pomocí Sylvestrova kritéria - rozhodněte, zda je pozitivně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně definitní, negativně semidefinitní nebo indefinitní.

(b) Co nám to říká o funkci $f(x_1, x_2) = -2x_1x_2$?

9. Určete definitnost matice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pomocí Sylvestrova kritéria. (Hint: Může být matice pozitivně definitní i pozitivně semidefinitní zároveň? V jakých případech se to stane?)