Níže uvedené úlohy představují přehled otázek, které se vyskytly v tomto nebo v minulých semestrech ve cvičení nebo v minulých semestrech u zkoušky. Mezi otázkami semestrovými a zkouškovými není žádný rozdíl, předpokládáme, že připravený posluchač dokáže zdárně zodpovědět většinu z nich.

Tento dokument je k dispozici ve variantě převážně s řešením a bez řešení.

Je to pracovní dokument a nebyl soustavně redigován, tým ALG neručí za překlepy a jazykové prohřešky, většina odpovědí a řešení je ale pravděpodobně správně :-).

Nahrazení rekurzivního volání tabelací

1.
Popište, jak byste výpočet hodnoty rekurzivní funkce f(6,7) převedli na vyplňování hodnot v poli, když funkce f je rekurzivně definována takto:
a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x=0 \text{ nebo } y=0 \text{ nebo } z=0 \\ f(x-1, y-1)+ f(x-1,y) + f(x,y-1) +1 & \text{jinak} \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ \max (f(x-1, y-1)+ f(x-1,y)) + f(x,y-1) +1 & \text{jinak} \end{cases}$$

2.
Popište, jak byste výpočet hodnoty rekurzivní funkce f(6,8,7) převedli na vyplňování hodnot v poli, když funkce j je rekurzivně definována takto:
a)

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x=0 \text{ nebo } y=0 \text{ nebo } z=0 \\ f(x-1, y-1, z-1)+ f(x-1,y,z) + f(x,y-1,z) + f(x,y,z-1)+1 & \text{jinak} \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ 3*f(x-1,y-1) - f(x,y-1) - f(x-1,y,z-1) + 1; & \end{cases}$$

3.
Pascalův trojúhelník:

```
              1
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
  1   6  15  20  15   6   1
1   7  21  35  35  21   7   1
.. .. .. .. .. .. .. .. .. .. ..
```

Pascalův trojúhelník obsahuje kombinační čísla nebo chcete-li binomické koeficienty. Označme binomický koeficient symbolem Bin(n,k).
Připomeňme si, že platí rekurentní vztah

Bin(n,k) = Bin(n-1,k)+Bin(n-1,k-1)

Můžeme proto rekurzivně definovat funkci Bin, která vrací binomický koeficient

$$\mathbf{Bin(n,k)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{pro } n = 0 \text{ nebo } k = 0 \\ \mathbf{Bin(n-1,k)+Bin(n-1,k-1)} & \text{jinak} \end{cases}$$

Zjistěte kolikrát by byla funkce Bin() volána při provedení příkazu x = Bin(6,4);.

4.
Ackermanova funkce je definována pro dva celočíselné nezáporné parametry n, m, je tedy možné její hodnoty jednoduše zapisovat do tabulky.
Popište, jak budete postupně vyplňovat tabulku, abyste se vyhnuli rekurzivnímu volání.
Dokážete určit hodnotu A(4,4)?

$$\mathbf{A(n, m)} = \begin{cases} \mathbf{m+1} & \text{pro } n=0 \\ \mathbf{A(n-1,1)} & \text{pro } n>0,\ m=0 \\ \mathbf{A(n-1, A(n,m-1))} & \text{pro } n>0,\ m>0 \end{cases}$$

(Chyba v definici není, druhý parametr ve třetím řádku je opět výsledek volání funkce A.)

Optimální binární vyhledávací strom

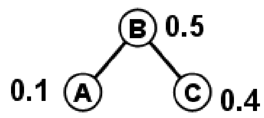
5.
Optimální binární vyhledávací strom
a) minimalizuje hloubku stromu
b) maximalizuje cenu uzlů
c) maximalizuje počet listů
d) minimalizuje dobu vyhledávání ve stromu
e) minimalizuje délku cesty z kořene do libovolného listu

6.
Je dáno n klíčů. Společně s každým klíčem je dána také pravděpodobnost dotazu na tento klíč. Nalezení kořene optimálního BVS sestaveného z těchto klíčů má asymptotickou složitost

a) $O(\log(n))$
b) $\Theta(n)$
c) $O(n \cdot \log(n))$
d) $\Omega(n^2)$
e) $\Omega(2^n)$

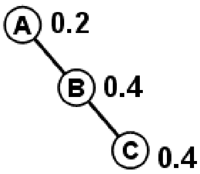
7a.
Pravděpodobnost dotazu na jednotlivé konkrétní klíče BVS daného na obrázku je uvedena u jednotlivých uzlů. Předpokládejme, že se vždy dotazujeme na klíč, který ve stromu je. Z dlouhodobého hlediska je průměrný počet navštívených uzlů při jednom dotazu (= „cena stromu“) roven

a) 0.5
b) 1.0
c) 1.25
d) 1.5
e) 1.75



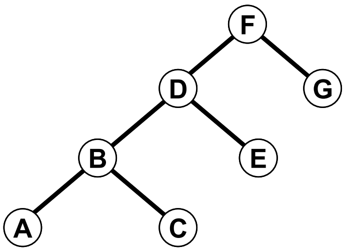
7b.
Pravděpodobnost dotazu na jednotlivé konkrétní klíče BVS daného na obrázku je uvedena u jednotlivých uzlů. Předpokládejme, že se vždy dotazujeme na klíč, který ve stromu je. Z dlouhodobého hlediska je průměrný počet navštívených uzlů při jednom dotazu (= „cena stromu“) roven

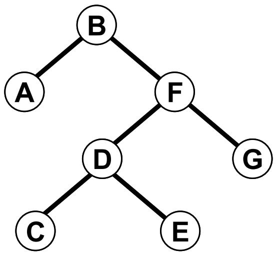
a) 0.2
b) 1.0
c) 1.8
d) 2.2
e) 2.5



8.
Jsou dány dva binární vyhledávací stromy obsahující stejné klíče. Pravděpodobnost dotazu na jednotlivé konkrétní klíče je dána níže uvedenou tabulkou. Vypočtěte, který z uvedených stromů je za těchto okolností výhodnější pro operaci FIND, tj, najděte ten, v němž průměrný počet dotazů na hodnotu klíče během jedné operace FIND je menší. (Předpokládáme, že obsah stromů se dlouhodobě nemění.)

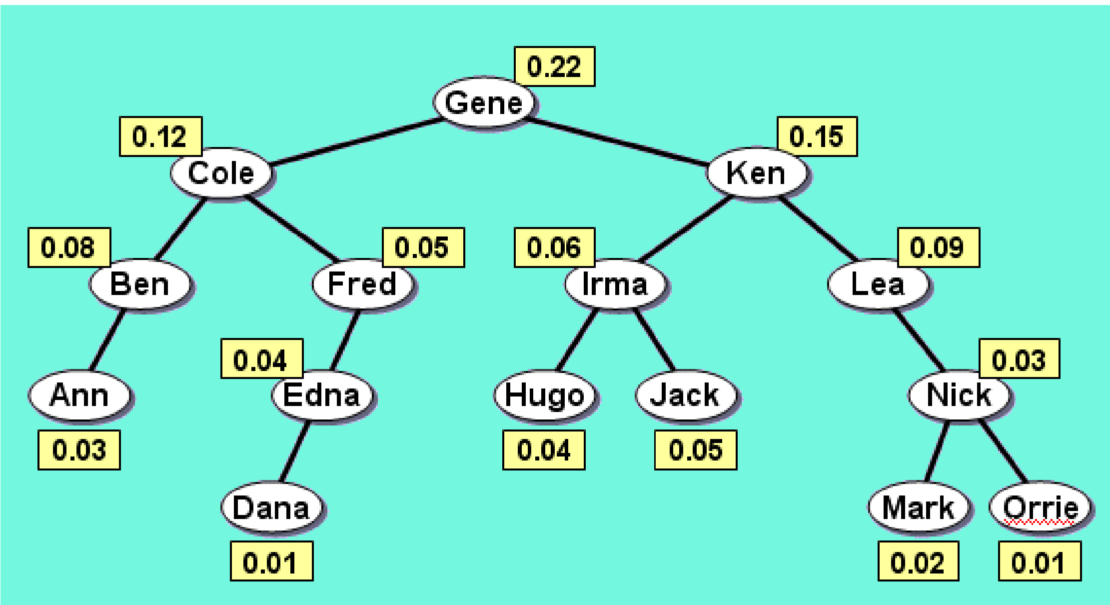
A: 0.10
B: 0.20
C: 0.25
D: 0.05
E: 0.10
F: 0.25
G: 0.05





9.
Je možné, aby v optimálním BVS měl každý uzel nejvýše jednoho potomka?
Jaké by musely být pravděpodobnosti pro jednotlivé uzly v takovém případě?

10.
Nejprve připomeneme příklad z přednášky:



Kořeny optimálních podstromů jsou popsány polem

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	2	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7
2	0	0	2	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	0	0	0	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7
4	0	0	0	0	4	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	0	0	0	0	0	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	0	0	0	0	0	0	6	7	7	7	7	7	7	7	11	11
7	0	0	0	0	0	0	0	7	7	7	7	7	11	11	11	11
8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	9	9	11	11	11	11	11
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9	11	11	11	11	11
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	11	11	11	11	11
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	11	11	11	11
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	12	12	12
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	14	14
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	14
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ceny optimálních podstromů jsou popsány polem:

	1-A	2-B	3-C	4-D	5-E	6-F	7-G	8-H	9-I	10-J	11-K	12-L	13-M	14-N	15-O
1-A	0.03	0.14	0.37	0.39	0.48	0.63	1.17	1.26	1.42	1.57	2.02	2.29	2.37	2.51	2.56
2-B	0	0.08	0.28	0.30	0.39	0.54	1.06	1.14	1.30	1.45	1.90	2.17	2.25	2.39	2.44
3-C	0	0	0.12	0.14	0.23	0.38	0.82	0.90	1.06	1.21	1.66	1.93	2.01	2.15	2.20
4-D	0	0	0	0.01	0.06	0.16	0.48	0.56	0.72	0.87	1.32	1.59	1.67	1.81	1.86
5-E	0	0	0	0	0.04	0.13	0.44	0.52	0.68	0.83	1.28	1.55	1.63	1.77	1.82
6-F	0	0	0	0	0	0.05	0.32	0.40	0.56	0.71	1.16	1.43	1.51	1.63	1.67
7-G	0	0	0	0	0	0	0.22	0.30	0.46	0.61	1.06	1.31	1.37	1.48	1.52
8-H	0	0	0	0	0	0	0	0.04	0.14	0.24	0.54	0.72	0.78	0.89	0.93
9-I	0	0	0	0	0	0	0	0	0.06	0.16	0.42	0.60	0.66	0.77	0.81
10-J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05	0.25	0.43	0.49	0.60	0.64
11-K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.15	0.33	0.39	0.50	0.54
12-L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.09	0.13	0.21	0.24
13-M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.02	0.07	0.09
14-N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03	0.05
15-O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01

Analogicky podle příkladu z přednášky určete, jak bude vypadat optimální strom, když jej vybudujeme pouze pro 7 uzlů počínaje Ednou a konče Kenem.

11.

Jsou dány prvky s klíči A-G. Pravděpodobnost dotazu na jednotlivé konkrétní klíče je dána níže uvedenou tabulkou. Metodou dynamického programování sestrojte optimální strom z hlediska operace FIND, tj, najděte takový strom, v němž průměrný počet dotazů na hodnotu klíče během jedné operace FIND je nejmenší (Předpokládáme, že obsah stromu se dlouhodobě nemění). Napište, jak vypadá tabulka ohodnocení optimálních podstromů a tabulka jejich kořenů a výsledný strom namalujte.

A: 0.10
B: 0.10
C: 0.25
D: 0.35
E: 0.10
F: 0.05
G: 0.05

11bc.
Zopakujte předchozí úlohu pro uzly s pravděpodobnostmi:

b)	c)
A: 0.15 B: 0.15 C: 0.20 D: 0.25 E: 0.10 F: 0.10 G: 0.05	A: 0.10 B: 0.10 C: 0.25 D: 0.25 E: 0.10 F: 0.15 G: 0.05

Nejdelší společná podposloupnost

11.
Dva dané řetězce mají oba délku n. Nejdelší společnou podposlounost těchto řetězců lze nalézt v čase

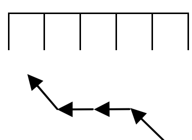
a) $\Theta(\log(n))$
b) $\Theta(n)$
c) $\Theta(n\cdot\log(n))$
d) $\Theta(n^2)$
e) $\Theta(n^3)$

12.
Nejdelší společná podposloupnost
Algoritmus hledání nejdelší společné posloupnosti je snadno zapamatovatelný a mechanicky reprodukovatelný.
Najděte tedy nejdelší společnou podposloupnost v několika jednoduchých případech:
A: 1100110011001100
B: 1010101010101010

A: 1101001000100001000001000001
B: 0010110111011110111110111110 (B = doplněk A)

A: 1101001000100001000001000001
B: 1000001000001000010001001011 (B = A pozpátku)

13a.
Následující matice 5x4 polí reprezentuje výřez v obrázku. Každé políčko představuje jeden pixel s uvedenou hodnotou. Postupovat lze jen zleva doprava, a to vodorovně, nebo pod úhlem ±45 stupňů, tj. do políčka s indexem [i,j] se lze dostat z políčka v předchozím sloupci s indexem [i-1, j-1], [i, j-1], [i+1, j-1], kde i=řádkový index a j= sloupcový index.



	j →			
i	2	12	23	18
|	23	23	6	12
|	20	9	12	10
v	18	15	11	8
	16	12	8	7

Dynamickým programováním nalezněte spojnici levé a pravé strany (touto spojnicí se míní posloupnost políček, jedno políčko na sloupec, začínající ve sloupci s indexem j=1 a končící ve sloupci s j=4) takovou, že součet hodnot podél ní je minimální.

Jaké mezivýsledky si musíte pamatovat pro jednotlivé sloupce a pro celou tabulku?

13b.

Následující matice *m* reprezentuje výřez v obrázku. Každé políčko představuje jeden pixel s uvedenou hodnotou. Postupovat lze jen zleva doprava, a to vodorovně, nebo pod úhlem ±45 stupňů, tj. do políčka s indexem [i,j] se lze dostat z políčka v předchozím sloupci s indexem [i-1, j-1], [i, j-1], [i+1, j-1], kde i=řádkový index a j= sloupcový index.

	j →			
i	3	12	23	18
|	15	23	6	12
|	20	9	12	10
v	18	14	19	8
	16	12	8	7

Dynamickým programováním nalezněte spojnici levé a pravé strany (touto spojnicí se míní posloupnost políček, jedno políčko na sloupec, začínající ve sloupci s indexem j=1 a končící ve sloupci s j=4) takovou, že součet absolutních rozdílů hodnot podél cesty je minimální. Rozdílem hodnot podél cesty je např. pro políčko [i, j] hodnota abs(m[i,j] – m[i_{prev},j-1]), kde i_{prev} nabývá jedné z hodnot {i-1, i, i+1}.

Jaké mezivýsledky si musíte pamatovat pro jednotlivé sloupce a pro celou tabulku?

-- E --

A

The set of n distinct keys is given. Also a probability of the key being queried is given for each key. Establishing the root of the optimal BST built on the given keys is a task with complexity:

f) O(log(n))
g) $\Theta(n)$
h) O(n·log(n))
i) $\Omega(n^2)$
j) $\Omega(2^n)$

A elsewhere

Two given strings are both of length n. The longest comon subsequence of these strings can be found in time:

f) $\Theta(\log(n))$
g) $\Theta(n)$
h) $\Theta(n \cdot \log(n))$
i) $\Theta(n^2)$
j) $\Theta(n^3)$