

# Minor v oboru matematika Bakalářské studium OI

Jan Hamhalter

<http://math.feld.cvut.cz/hamhalte>

katedra matematiky, FEL ČVUT

10. prosince 2010

## Cíl:

Cílem bakalářského minoru je navázat na stávající povinné matematické předměty programu OI a prohloubit matematické vzdělání tak, aby se přiblížilo standardu bakalářských evropských matematických programů. Student získá základní poznatky z několika hlavních matematických disciplín (analýza, algebra, pravděpodobnost a teorie informace), které může aplikovat ve svém hlavním studijním oboru. Současně se mu otevírá cesta ke studiu magisterských matematických programů nebo k dalšímu sebevzdělávání v čisté i aplikované matematice.

## Forma:

Student získá bakalářský minor absolvováním tří předmětů z následující nabídky. Uvedené předměty jsou na sobě nezávislé, vyžadují však jako prerekvizity znalosti na úrovni vymezených povinných předmětů programu OI.

## Předměty matematického minoru

- 1 Matematika pro kybernetiku (A3M01MKI), 4+2, ZS
- 2 Teorie grafů (XP01TGR), 2+1, LS
- 3 Teorie informace, 4+2, LS
- 4 Pokročilá analýza, 2+2, LS

## Matematika pro Kybernetiku A3M01MKI

4+2, Zimní semestr

Přednášející: Jan Hamhalter

Anotace: Hlavním těžištěm je výklad základů komplexní analýzy, který kulminuje reziduovou větou a jejími aplikacemi v integrálním počtu. Techniky funkcí komplexní proměnné jsou pak dále aplikovány při studiu Fourierovy transformace, inverzní Laplaceovy transformace a transformace Z. V závěru jsou metody komplexního kalkulu použity společně s integrálními transformacemi při rozboru spektrálních vlastností stacionárních stochastických procesů.

Osnova:

- 1 Aritmetika komplexních čísel. Geometrie komplexní roviny - zobecněné přímky, kruhová inverze. Riemannova sféra a Ptolemaiova věta.
- 2 Topologie komplexní roviny. Jednoduše souvislá a konvexní oblast. Funkce komplexní proměnné – limita a spojitost. Diferencovatelnost komplexních funkcí – Cauchy-Riemannovy podmínky. Holomorfní a harmonické funkce. Zachování úhlů a konformní zobrazení.
- 3 Elementární komplexní funkce - polynomy, Möbiova transformace zobecněných kružnic, exponenciální a logaritmická funkce, goniometrické, hyperbolické a cyklometrické funkce.
- 4 Křivkový integrál a jeho základní vlastnosti. Existence primitivní funkce a nezávislost křivkového integrálu na cestě. Newtonova-Leibnitzova formule.

- 6 Cauchyova věta. Princip deformace křivky. Fundamentální integrál. Cauchyův vzorec. Liouvillova věta a její důsledky.
- 7 Mocninné řady a jejich konvergence. Derivace mocninné řady člen po členu. Taylorův rozvoj holomorfní funkce na kruhu. Integrální vyjádření koeficientů Taylorova rozvoje. Základní Taylorovy rozvoje.
- 8 Laurantovy řady a jejich konvergence. Rozvoj funkce holomorfní na mezikruží v Laurentovu řadu. Jednoznačnost a integrální vyjádření koeficientů. Typy singularit a jejich vztah k Laurentovu rozvoji. Reziduum a jeho výpočet.
- 9 Reziduová věta. Výpočet nevlastních integrálů podle reziduové věty. Jordanovo lemma. Metoda obcházení jednoduchých pólů.

- 9 Přímá a zpětná Fourierova transformace. Základní obrazy. Souvislost Fourierovy transformace s Fourierovou řadou. Věta o inverzní Fourierově transformaci. Gramatika Fourierovy transformace. Konvoluce funkcí a věta o Fourierově obrazu konvoluce. Řešení diferenciálních rovnic pomocí Fourierovy transformace.
- 10 Přímá Laplaceova transformace a její definiční obor. Gramatika. Obraz periodické funkce. Obraz Taylorovy řady. Inverzní Laplaceova transformace racionálních funkcí. Věta o rozkladu.
- 11 Integrovní vyjádření inverzní Laplaceovy transformace - Riemannův-Mellinův vzorec. Metoda reziduí a metoda odštěpení pólů. Aplikace na řešení diferenciálních rovnic.
- 12 Přímá transformace Z. Gramatika. Věty o posunu. Konvoluce posloupností a její význam. Z-obraz konvoluce.



- 13 Inverzní transformace  $Z$  a její integrální vyjádření. Použití reziduové věty pro výpočet zpětné  $Z$ -transformace. Řešení diferenčních rovnic pomocí transformace  $Z$ .
- 14 Stacionární stochastické procesy. Kovarianční funkce a spektrální hustota spojitých a diskrétních stochastických procesů. Aplikace Fourirovy analýzy na studium stochastických procesů.

## Literatura:

- J.Hamhalter, J.Tišer: Funkce komplexní proměnné. Skripta FEL ČVUT, 2001.
- H.A.Priestly: Introduction to Complex Analysis, Oxford University Press, 2003.
- J.Veit: Integrální transformace, XIV, SNTL, Praha 1979.
- Z.Prášková a P.Lachout: Základy náhodných procesů I, MFF UK, 2005.

Požadované vstupní znalosti: Základy diferenciálního a integrálního počtu funkcí více proměnných (např. A4B01MA2).

## Teorie grafů (XP01TGR):

2+1, Letní semestr

Přednášející: Marie Demlová

### Anotace:

Základní pojmy teorie grafů. Stromy, jejich charakterizace, minimální kostra. Silně souvislé komponenty, prohledávání a kořenové stromy. Nejkratší cesty, Floydův algoritmus, algebraické souvislosti. Eulerovské grafy a jejich aplikace. Hamiltonovské grafy, Chvátalova věta. Toky v transportních sítích, Ford-Fulkersonova věta. Přípustné toky a přípustné cirkulace. Párování v obecných grafech, párování v bipartitních grafech. Vrcholové pokrytí a nezávislé množiny. Kliky v grafu a barevnost grafu. Rovinné grafy. Grafy a vektorové prostory.

## Literatura:

- Reinhard Diestel: Graph Theory. Springer-Verlag, New York, 1997.

Požadované vstupní znalosti: Základní znalosti teorie grafů (v rozsahu předmětu Logika a grafy, A0B01LGR) a lineární algebry.

## Teorie informace a kódování

4+2, Zimní semestr

Přednášející: Tomáš Kroupa

Anotace: Předmět seznamuje studenty s matematickými základy komprese informace a metodami jejího spolehlivého přenosu. Jsou vyloženy základní Shannonovy výsledky o možnostech efektivního kódování a přenosu informace diskrétním a spojitým informačním kanálem. Pozornost je věnována i některým moderním přístupům jako je metoda typů (Csiszár, Körner). V neposlední řadě slouží kurs jako panoráma rozličných matematických partií používaných v teorii informace (teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy, statistika, algebra). Předpokládá se znalost základních principů kódování v rozsahu přednášky Pravděpodobnost, statistika a teorie informace (A0B01PSI).

## Osnova přednášek:

- 1 Charakteristiky informace: entropie, informační divergence, vzájemná informace. Podmíněná entropie, Fanova nerovnost. Rychlost entropie stacionárního a Markovského zdroje.
- 2 Zdrojové kódování. Kódování s pevnou a s proměnlivou délkou slova. Shannonova věta o blokovém kódování. Konstrukce instantních kódů. Optimalita Huffmanova kódování.
- 3 Bezpečnostové zdroje. Asymptotická rovnočetnost slabě typických zpráv (AEP). AEP pro stacionární ergodické procesy (Shannon-McMillan-Breimanova věta).
- 4 Druhy informačních kanálů. Informační kapacita kanálu. Přenesitelnost zdrojů informačními kanály. Kanálové kódování, operační kapacita kanálu.

- 5 Shannonova věta o kapacitě kanálu. Kanál se zpětnou vazbou. Věta o separaci zdrojového a kanálového kódování.
- 6 Algebraické struktury používané při detekci a opravě chyb. Grupy a konečná tělesa.
- 7 Polynomy a Galoisova tělesa.
- 8 Hammingova vzdálenost. Lineární kódy. Generující a kontrolní matice. Hammingovy kódy, rozšířený Hammingův kód.
- 9 Cyklické kódy, BCH-kódy.
- 10 Diferenciální entropie a jiné charakteristiky informace pro spojitá rozdělení. AEP pro veličiny se spojitým rozdělením. Spojitá rozdělení s maximální entropií.

- 11 Gaussovský kanál a jeho kapacita. Nyquist-Shannonova věta o vzorkování.
- 12 Ztrátová komprese. Kvantizace. Míra zkreslení (rate distortion): definice, základní vlastnosti. Míra zkreslení binárního a Gaussovského zdroje.
- 13 Teorie informace a statistika. Metoda typů a její aplikace: existence univerzálního kódu, silně typické zprávy.
- 14 Univerzální zdrojové kódování. Varianty aritmetického kódování a Lempel-Zivova algoritmu.



## Literatura:

- Cover, T.M., Thomas, J.A.: Elements of Information Theory. Wiley, 2006.
- Adámek, J. : Kódování. SNTL, Praha, 1989.
- MacKay, D.J.C. : Information Theory, Inference, and Learning Algorithms. Cambridge University Press, 2003.
- Vajda, I.: Teorie informace. Vydavatelství ČVUT, 2004.

Požadované znalosti: Pravděpodobnost, statistika a teorie informace v rozsahu předmětu (A0B01PSI).

## Pokročilá analýza

2+2, Letní semestr

Přednášející: Jan Hamhalter, V.Sobotíková

Anotace: Předmět je úvodem do teorie míry a integrace a základů funkcionální analýzy. V první části je vyložena teorie Lebesgueova integrálu. Další partie jsou věnovány základním pojmům teorie Banachovaných a Hilbertových prostorů a jejich spojitosti s harmonickou analýzou. Poslední část se zabývá spektrální teorií operátorů a jejím aplikacím v maticové analýze.

Osnova:

- 1 Algebry a okruhy podmnožin. Měřitelné funkce. Míra na  $\sigma$ -algebře.
- 2 Abstraktní Lebesgueův integrál a střední hodnota náhodné veličiny.
- 3 Lebesgueova míra v  $\mathbb{R}^n$  (konstrukce z vnější míry). Lebesgueův integrál.
- 4 Konvergenční věty.
- 5 Součinná míra. Fubiniho věta.
- 6 Integrace v  $\mathbb{R}^n$  - věta o substituci.
- 7 Normovaný prostor. Úplnost. Omezené operátory na normovaném prostoru.
- 8 Prostor se skalárním součinem. Hilbertův prostor. Věta o projekci.
- 9 Rozvoj do ortonormální báze. Rieszova věta.

- 9 Prostor  $L^2(\mathbb{R})$  jako Hilbertův prostor. Hustota diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem. Fourierova transformace v  $L^2(\mathbb{R})$ . Plancherelova věta.
- 10 Spektra operátorů na Hilbertově prostoru.
- 11 Základní třídy operátorů na Hilbertově prostoru: samoadjungovaný, pozitivní, unitární operátor, projekce.
- 12 Diagonalizace normálního operátoru a matice.
- 13 Rozklady matic a operátorů — spektrální, polární, SVD.
- 14 Funkce operátoru a matice.

## Literatura

- W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, 1977
- E. Kreyszig: Introductory functional analysis with applications, Wiley 1989
- L. Lukeš: Jemný úvod do funkcionální analýzy, Karolinum, 2005
- C. D. Meyer: Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM 2001.