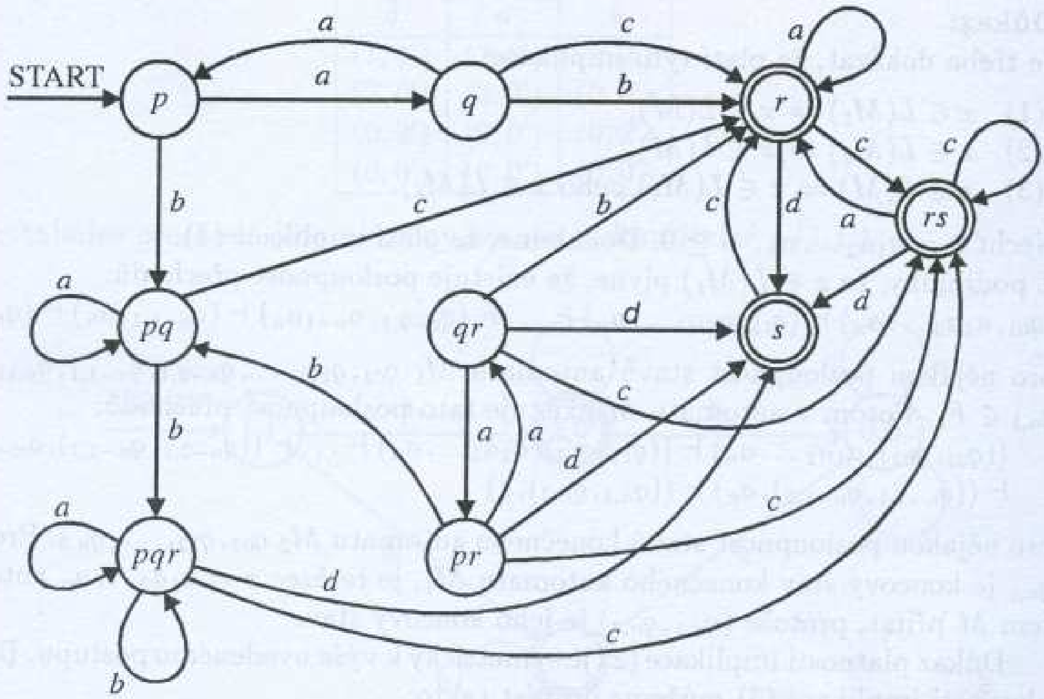


Obrázek 2.19: Deterministický konečný automat z příkladu 2.70

2.3.6 Konečné automaty a operace nad jazyky

Jazyky přijímané konečnými automaty, jsou regulární jazyky. Je proto možné sestrojit konečné automaty pro jazyky vzniklé operacemi sjednocení, součinu a iterace. Dále je možné sestrojit konečný automat pro doplněk jazyka a průnik dvou jazyků. Pomocí těchto operací je možné postupnými kroky sestrojit konečný automat, který přijímá jazyk definovaný s použitím uvedených operací.

Nejdříve uvedeme konstrukci konečného automatu pro sjednocení dvou regulárních jazyků, která je založena na principu „paralelní" činnosti obou automatů pro vstupní jazyky. Jakmile se jeden z nich dostane do koncového stavu, je vstupní řetězec přijat.

Algoritmus 2.71
Konstrukce konečného automatu pro sjednocení jazyků – paralelní činnost.
Vstup: Dva úplně určené konečné automaty M_1 a M_2.
Výstup: Konečný automat M, který přijímá jazyk $L(M) = L(M_1) \bigcup L(M_2)$.
Metoda: Označíme $M = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
Automat M je definován takto:
$M = (Q_1 \times Q_2, T, \delta, (q_{01}, q_{02}), (F_1 \times Q_2) \bigcup (Q_1 \times F_2))$, kde δ je definováno takto:
$\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ pro $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$. □

Důkaz:
Je třeba dokázat, že platí tyto implikace:

(1) $x \in L(M_1) \Rightarrow x \in L(M)$,
(2) $x \in L(M_2) \Rightarrow x \in L(M)$,
(3) $x \in L(M) \Rightarrow x \in L(M_1)$ nebo $x \in L(M_2)$.

Nechť $x = a_1a_2 \dots a_n$, $n \geq 0$. Dokážeme, že platí implikace (1).
Z podmínky, že $x \in L(M_1)$ plyne, že existuje posloupnost přechodů:

$$(q_{01}, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_{11}, a_2a_3 \dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n-2,1}, a_{n-1}a_n) \vdash (q_{n-1,1}, a_n) \vdash (q_{n,1}, \varepsilon)$$

pro nějakou posloupnost stavů automatu M_1 $q_{01}, q_{11}, \dots, q_{n-2,1}, q_{n-1,1}, q_{n,1}$, kde $q_{n,1} \in F_1$. Potom v automatu M existuje tato posloupnost přechodů:

$$((q_{01}, q_{02}), a_1a_2 \dots a_n) \vdash ((q_{11}, q_{12}), a_2a_3 \dots a_n) \vdash \dots \vdash ((q_{n-2,1}, q_{n-2,2}), a_{n-1}a_n)$$
$$\vdash ((q_{n-1,1}, q_{n-1,2}), a_n) \vdash ((q_{n,1}, q_{n,2}), \varepsilon)$$

pro nějakou posloupnost stavů konečného automatu M_2 $q_{02}, q_{12}, \dots, q_{n,2}$. Protože $q_{n,1}$ je koncový stav konečného automatu M_1, je řetězec $x = a_1a_2 \dots a_n$ automatem M přijat, protože $(q_{n,1}, q_{n,2})$ je jeho koncový stav.

Důkaz platnosti implikace (2) je symetrický k výše uvedenému postupu. Důkaz platnosti implikace (3) můžeme provést takto:
Jestliže v automatu M je možná posloupnost přechodů:

$$((q_{01}, q_{02}), a_1a_2 \dots a_n) \vdash ((q_{11}, q_{12}, a_2a_3 \dots a_n) \vdash \dots \vdash ((q_{n,1}, q_{n,2}), \varepsilon),$$

pak buď v automatu M_1 existuje posloupnost přechodů:

$$(q_{01}, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_{11}, a_2a_3 \dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n,1}, \varepsilon)$$

anebo v automatu M_2 existuje posloupnost přechodů:

$$(q_{02}, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_{12}, a_2a_3 \dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n,2}, \varepsilon).$$

Z toho plyne, že implikace (3) platí. □

Příklad 2.72
Jsou dány dva automaty nad abecedou $\{a, b\}$. Automat M_1 přijímá jazyk a^+, automat M_2 přijímá jazyk b^+. Automaty M_1 a M_2 jsou definovány takto:
$M_1 = (\{1, 2, 0\}, \{a, b\}, \delta_1, 1, \{2\})$.
$M_2 = (\{1', 2', 0'\}, \{a, b\}, \delta_2, 1', \{2'\})$.

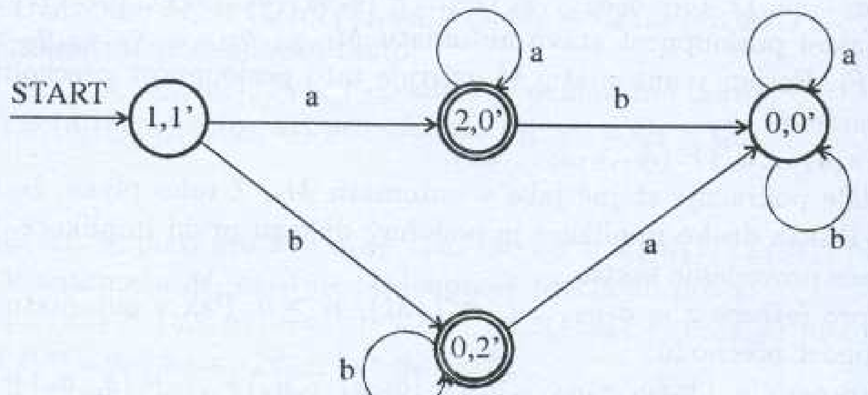
δ_1	a	b
1	2	0
2	2	0
0	0	0

δ_2	a	b
$1'$	$0'$	$2'$
$2'$	$0'$	$2'$
$0'$	$0'$	$0'$

Automat M, který přijímá jazyk $a^+ \cup b^+$ vznikne aplikací algoritmu 2.71 na automaty M_1 a M_2.
$M = (\{(1, 1'), (2, 0'), (0, 2'), (0, 0')\}, \{a, b\}, \delta, (1, 1'), \{(2, 0'), (0, 2')\})$.

δ	a	b
$(1,1')$	$(2,0')$	$(0,2')$
$(2,0')$	$(2,0')$	$(0,0')$
$(0,2')$	$(0,0')$	$(0,2')$
$(0,0')$	$(0,0')$	$(0,0')$

V tabulce přechodů jsou uvedeny jen stavy dosažitelné z (1,1'). □



Obrázek 2.20: Přechodový diagram konečného automatu z příkladu 2.72

Další možná konstrukce konečného automatu pro sjednocení jazyků je založena na myšlence vytvoření nového počátečního stavu a definici ε–přechodů z tohoto stavu do počátečních stavů obou automatů.

Algoritmus 2.73
Konstrukce konečného automatu pro sjednocení jazyků – ε–přechody.
Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.
Výstup: Konečný automat M, který přijímá jazyk $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.
Metoda:

1. Označíme $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
2. Výsledný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ je zkonstruován takto:
   (a) $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$, $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$,
   (b) $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_{01}, q_{02}\}$,
   $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ pro všechna $q \in Q_1$ a všechna $a \in T$,
   $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ pro všechna $q \in Q_2$ a všechna $a \in T$.
3. $F = F_1 \cup F_2$. □

Důkaz:
Je třeba dokázat tyto implikace:

1. $x \in L(M_1) \Rightarrow x \in L(M)$,
2. $x \in L(M_2) \Rightarrow x \in L(M)$,
3. $x \in L(M) \Rightarrow x \in L(M_1)$ nebo $x \in L(M_2)$.

Nejdříve dokážeme první implikaci.
Nechť řetězec $x = a_1a_2 \dots a_n \in L(M_1)$ pro $n \geq 0$. Pak v automatu M_1 existuje posloupnost přechodů:
$(q_{01}, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_{11}, a_2a_3 \dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n-2,1}, a_{n-1}a_n) \vdash (q_{n-1,1}, a_n) \vdash (q_{n,1}, \varepsilon)$
pro nějakou posloupnost stavů automatu M_1 $q_{01}, q_{11}, \dots, q_{n-2,1}, q_{n-1,1}, q_{n,1}$, kde $q_{n,1} \in F_1$. Potom v automatu M existuje tato posloupnost přechodů začínající ε-přechodem:

$(q_0, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_{01}, a_1a_2 \dots a_n)$,

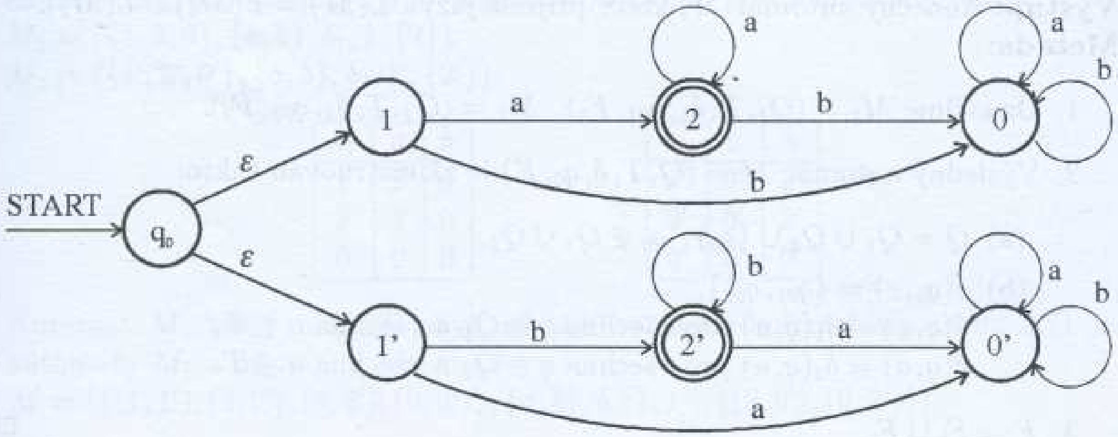
která dále pokračuje stejně jako v automatu M_1. Z toho plyne, že řetězec $x \in L(M)$. Důkaz druhé implikace je podobný důkazu první implikace. Důkaz třetí implikace provedeme takto:
Nechť pro řetězec $x = a_1a_2 \dots a_n \in L(M)$, $n \geq 0$. Pak v automatu M existuje posloupnost přechodů:

$(q_0, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_1, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_2, a_2 \dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_n, a_n) \vdash (q_f, \varepsilon)$

taková, že první přechod je ε-přechod a $q_f \in F$. Vynecháme-li počáteční ε-přechod a položíme-li $q_1 = q_{01}$ (nebo $q_1 = q_{02}$), pak vzniklá posloupnost přechodů existuje v automatu M_1 a $q_f \in F_1$ (nebo v automatu M_2 a $q_f \in F_2$), protože $\delta_1(q, a) = \delta(q, a)$ (nebo $\delta_2(q, a) = \delta(q, a)$). Z toho plyne platnost třetí implikace. □

Příklad 2.74

Pro konečné automaty M_1 a M_2 z příkladu 2.72 sestrojíme automat M pomocí algoritmu 2.73. Jeho přechodový diagram je na obr. 2.21. □



Obrázek 2.21: Konečný automat přijímající jazyk $a^+ \cup b^+$ z příkladu 2.74

Konstrukce konečného automatu, který přijímá průnik jazyků se provede podobně jako v algoritmu 2.28 pro sjednocení. Rozdíl je pouze v definici koncových stavů a v tom, že vstupní automaty nemusí být úplně určené.

Algoritmus 2.75
Konstrukce konečného automatu pro průnik jazyků – paralelní činnost.
Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.
Výstup: Automat M přijímající jazyk $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$
Metoda: Označíme $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
Výsledný automat M je definován takto:
$M = (Q_1 \times Q_2, T, \delta, (q_{01}, q_{02}), F_1 \times F_2)$, kde δ je definováno takto:
$\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ pro všechna (q_1, q_2) z $Q_1 \times Q_2$. □

Důkaz:
Je třeba dokázat, že platí pro $x = a_1a_2 \ldots a_n$, že z $x \in L(M_1) \cap L(M_2)$ plyne, že $x \in L(M)$. V automatu M_1 existuje posloupnost přechodů pro x:
$(q_{01}, a_1a_2 \ldots a_n) \vdash (q_{11}, a_2 \ldots a_n) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1,1}, a_n) \vdash (q_{n,1}, \varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_{01}, q_{11}, \ldots, q_{n,1}$, kde $q_{n,1} \in F_1$.

Dále v automatu M_2 existuje posloupnost přechodů pro x:
$(q_{02}, a_1a_2 \ldots a_n) \vdash (q_{12}, a_2 \ldots a_n) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1,2}, a_n) \vdash (q_{n,2}, \varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_{02}, q_{12}, \ldots, q_{n,2}$, kde $q_{n,2} \in F_2$.

Pak musí existovat pro x tato posloupnost přechodů v M:
$((q_{01}, q_{02}), a_1a_2 \ldots a_n) \vdash ((q_{11}, q_{12}), a_2 \ldots a_n) \vdash \ldots \vdash ((q_{n-1,1}, q_{n-1,2}), a_n)$ $\vdash ((q_{n,1}, q_{n,2}), \varepsilon)$ a stav $(q_{n,1}, q_{n,2}) \in F_1 \times F_2$. Dále dokážeme, že z $x \in L(M)$ plyne, že $x \in L(M_1) \cap L(M_2)$. Jestliže v automatu M existuje pro řetězec $x = a_1a_2 \ldots a_n$, $n \geq 0$, posloupnost přechodů
$((q_{01}, q_{02}), a_1a_2 \ldots a_n) \vdash ((q_{11}, q_{12}), a_2 \ldots a_n) \vdash \ldots \vdash ((q_{n-1,1}, q_{n-1,2}, a_n) \vdash ((q_{n,1}, q_{n,2}), \varepsilon)$ a stav $(q_{n,1}, q_{n,2}) \in F_1 \times F_2$, pak v automatu $M_i, i = 1, 2$, existuje posloupnost přechodů:
$(q_{0i}, a_1a_2 \ldots a_n) \vdash (q_{1i}, a_2 \ldots a_n) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1,i}, a_n) \vdash (q_{n,i}, \varepsilon)$ a $q_{n,i} \in F_i$.
Z toho plyne, že řetězec x je přijat oběma automaty M_1 a M_2 a $x \in L(M_1) \cap L(M_2)$. □

Příklad 2.76
Sestrojíme konečný automat, který přijímá řetězce nad abecedou $\{a, b\}$ začínající předponou aba a končící příponou bab.
Automat M_1, který přijímá řetězce začínající předponou aba má tvar:
$M_1 = (\{1, 2, 3, 4, \emptyset\}, \{a, b\}, \delta_1, 1, \{4\})$, zobrazení δ_1 je definováno tabulkou přechodů:

δ_1	a	b
1	2	$\emptyset$
2	$\emptyset$	3
3	4	$\emptyset$
4	4	4
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Automat M_2, který přijímá řetězce končící příponou bab má tvar: $M_2 = (\{1', 2', 3', 4'\}, \{a, b\}, \delta_2, 1', \{4'\})$, zobrazení δ_2 je definováno tabulkou přechodů:

δ_2	a	b
$1'$	$1'$	$2'$
$2'$	$3'$	$2'$
$3'$	$1'$	$4'$
$4'$	$3'$	$2'$

Výsledný automat bude mít tvar:
$M = (\{(1,1'), (2,1'), (3,2'), (4,1'), (4,2'), (4,3'), (4,4'), (\emptyset,1'), (\emptyset,2'), (\emptyset,3'), (\emptyset,4')\}, \{a,b\}, \delta, (1,1'), \{(4,4')\})$.

δ	a	b
$(1,1')$	$(2,1')$	$(\emptyset,2')$
$(2,1')$	$(\emptyset,1')$	$(3,2')$
$(\emptyset,1')$	$(\emptyset,1')$	$(\emptyset,2')$
$(\emptyset,2')$	$(\emptyset,3')$	$(\emptyset,2')$
$(\emptyset,3')$	$(\emptyset,1')$	$(\emptyset,4')$
$(\emptyset,4')$	$(\emptyset,3')$	$(\emptyset,2')$
$(3,2')$	$(4,3')$	$(\emptyset,2')$
$(4,3')$	$(4,1')$	$(4,4')$
$(4,1')$	$(4,1')$	$(4,2')$
$(4,2')$	$(4,3')$	$(4,2')$
$(4,4')$	$(4,3')$	$(4,2')$

Při optimalizaci tohoto automatu je možno stavy $(\emptyset,1'), (\emptyset,2'), (\emptyset,3'), (\emptyset,4')$ sjednotit.
□

Algoritmus 2.77
Konstrukce konečného automatu pro průnik jazyků – jen dosažitelné stavy.
Vstup: Dva konečné automaty $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
Výstup: Konečný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, který přijímá jazyk $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.
Metoda:

1. Definujeme $Q = \{(q_{01}, q_{02})\}$ a stav (q_{01}, q_{02}) budeme považovat za neoznačený.
2. Jestliže v Q jsou všechny stavy označeny, pokračuj krokem 4.
3. Vybereme z Q neoznačený stav $q = (q_{n1}, q_{m2})$ a provedeme tyto operace:
   (a) určíme $\delta((q_{n1}, q_{m2}), a) = (\delta_1(q_{n1}, a), \delta_2(q_{m2}, a))$ pro všechna $a \in T$,
   (b) jestliže oba přechody $\delta_1(q_{n1}, a)$ a $\delta_2(q_{m2}, a)$ jsou definovány a vedou do jiného než nulového stavu, pak $Q = Q \cup (\delta_1(q_{n1}, a), \delta_2(a_{m2}, a))$ a stav $(\delta_1(q_{n1}, a), \delta_2(q_{m2}, a))$ budeme považovat za neoznačený, pokud jde o nový stav v Q,
   (c) stav (q_{n1}, q_{m2}) v Q označíme,
   (d) pokračujeme krokem 2.
4. $q_0 = (q_{01}, q_{02})$.
5. $F = \{q : q \in Q,\ q = (q_{n1}, q_{m2}),\ q_{n1} \in F,\ q_{m2} \in F\}$. □

Konečný automat, který přijímá doplněk jazyka do T^* se sestrojí velice jednoduše. Je-li $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ automat, který přijímá jazyk L, potom automat, který přijímá jazyk $T^* - L$ je $M' = (Q, T, \delta, q_0, Q - F)$, to znamená, že pouze množina koncových stavů se mění a to tak, že za koncové stavy automatu M' považujeme všechny stavy automatu M, které nebyly koncové a naopak. Připomeňme, že automat M je úplně určený a deterministický.

Konstrukci konečného automatu, který přijímá součin (zřetězení) dvou jazyků provedeme pomocí následujícího algoritmu, který je založen na „paralelní" činnosti obou automatů.

Algoritmus 2.78
Konstrukce konečného automatu pro zřetězení jazyků – paralelní činnost.
Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.
Výstup: Konečný automat M přijímací jazyk $L(M) = L(M_1).L(M_2)$.
Metoda:

1. Označíme $M_1 = (Q_1, T_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ a $M_2 = (Q_2, T_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
2. Sestrojíme nedeterministický konečný automat
   $M' = (Q_1 \cup Q_2 \cup [q_{01}, q_{02}], T_1 \cup T_2, \delta, q_0, F)$, kde
   $$q_0 = \begin{cases} q_{01}, \text{ jestliže } q_{01} \notin F_1, \\ [q_{01}, q_{02}], \text{ jestliže } q_{01} \in F_1, \end{cases}$$
   $\delta(q, x)$ bude definováno takto:
   (a) $\delta(q, x) = \delta_1(q, x)$, jestliže $q \in Q_1, \delta_1(q, x) \notin F_1$,

(b) $\delta(q,x) = \delta_1(q,x) \cup \{q_{02}\}$, jestliže $q \in Q_1, \delta_1(q,x) \in F_1$,

(c) $\delta(q,x) = \delta_2(q,x)$, jestliže $q \in Q_2$,

(d) $\delta(q,x) = \delta_1(q_{01},x) \cup \delta_2(q_{02},x)$, jestliže $q = [q_{01},q_{02}]$.

(e) Množinu F sestrojíme takto:

Jestliže $q_{01} \notin F_1$, pak $F = F_2$.

Jestliže $q_{01} \in F_1$ a $q_{02} \in F_2$, pak $F = F_2 \cup \{[q_{01},q_{02}]\}$.

3. Sestrojíme deterministický konečný automat M. □

Důkaz:

Je třeba dokázat, že platí pro $y_1 = a_1a_2\ldots a_n$ a $y_2 = b_1b_2\ldots b_m$, $m,n \geq 0$, že z $y_1 \in L(M_1)$, $y_2 \in L(M_2)$ plyne, že $y_1y_2 \in L(M)$.

V automatu M_1 existuje posloupnost přechodů pro y_1:

$(q_{01},a_1a_2\ldots a_n) \vdash (q_{11},a_2\ldots a_n) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1,1},a_n) \vdash (q_{n,1},\varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_{01},q_{11},\ldots,q_{n,1}$, kde $q_{n,1} \in F_1$.

Dále v automatu M_2 existuje posloupnost přechodů pro y_2:

$(q_{02},b_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{12},b_2\ldots b_m) \vdash \ldots \vdash (q_{m-1,2},b_m) \vdash (q_{m,2},\varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_{02},q_{12},\ldots,q_{m,2}$, kde $q_{m,2} \in F_2$.

Pak musí pro y_1y_2 existovat tato posloupnost přechodů v automatu M pro $m,n > 0$:

$(q_{01},a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{11},a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m) \vdash \ldots$
$\vdash (q_{n-1,1},a_nb_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{02},b_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{12},b_2\ldots b_m) \vdash \ldots$
$\vdash (q_{m-1,2},b_m) \vdash (q_{m,2},\varepsilon)$ a stav $q_{m,2} \in F_2$.

Jestliže $n = 0$ a $m \geq 1$, pak počáteční stav je $[q_{01},q_{02}]$ a v automatu M existuje posloupnost přechodů:

$([q_{01},q_{02}],b_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{12},b_2\ldots b_m) \vdash \ldots \vdash (q_{m-1,2},b_m) \vdash (q_{m,2},\varepsilon)$ a $q_{m,2} \in F_2$.

Jestliže $n \geq 1$ a $m = 0$, pak v automatu M existuje posloupnost přechodů:

$(q_{01},a_1a_2\ldots a_n) \vdash (q_{11},a_2\ldots a_n) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1,1},a_n) \vdash (q_{02},\varepsilon)$ a stav $q_{02} \in F_2$.

Jestliže $n,m = 0$, pak automat M přijímá prázdný řetězec a stav $[q_{01},q_{02}]$ je koncový stav. Dále je třeba dokázat, že z $y_1y_2 \in L(M)$ plyne, že $y_1 \in L(M_1)$ a $y_2 \in L(M_2)$. Předpokládejme, že existuje v automatu M tato posloupnost přechodů:

$(q_{01},a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{11},a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1,1},a_nb_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{n,1},b_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{12},b_2\ldots b_m) \vdash \ldots \vdash (q_{m-1,2},b_m) \vdash (q_{m,2},\varepsilon)$. Přitom stav $q_{n,1} \in F_1$ a $q_{m,2} \in F_2$. To znamená, že řetězec $y_1 = a_1a_2\ldots a_n \in L(M_1)$ a $y_2 = b_1b_2\ldots b_m \in L(M_2)$. Jestliže $n = 0$ a $m \geq 1$ pak existuje posloupnost přechodů v automatu M:

$([q_{01},q_{02}],b_1b_2\ldots b_m) \vdash (q_{12},b_2\ldots b_m) \vdash \ldots \vdash (q_{m,2},\varepsilon)$ a $q_{m,2} \in F_2$, což znamená, že $y_2 \in L(M_2)$. Jestliže $n \geq 1$ a $m = 0$, pak v automatu M existuje posloupnost přechodů:

$(q_{01}, a_1a_2\dots a_n) \vdash (q_{11}, a_2\dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n-1,1}, a_n) \vdash (q_{n,1}, \varepsilon)$ a stav $q_{n,1} \in F_1$, což znamená, že $y_1 \in L(M_1)$. Jestliže $n, m = 0$, pak automat M přijímá prázdný řetězec a stavy $q_{01} \in F_1$ a $q_{02} \in F_2$ a oba automaty M_1 a M_2 přijímají prázdné řetězce. □

Příklad 2.79
Sestrojíme automat, který přijímá jazyk a^+b^+. Automat, který přijímá jazyk a^+ je automat M_1 z příkladu 2.72. Automat M_2 v témže příkladu přijímá jazyk b^+. Pomocí algoritmu 2.78 sestrojíme konečný automat, který bude přijímat zřetězení jazyků a^+ a b^+, tj. jazyk a^+b^+.
Výsledný automat získáme tímto postupem:

1. Nejdříve sestrojíme nedeterministický konečný automat:
   $M = (\{1, 2, \emptyset, 1', 2', \emptyset', [1, 1']\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{2'\})$.
   Zobrazení δ je definováno tabulkou přechodů.

δ	a	b
1	$\{2, 1'\}$	$\emptyset$
2	$\{2, 1'\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$1'$	$\emptyset'$	$\{2'\}$
$2'$	$\emptyset'$	$\{2'\}$
$\emptyset'$	$\emptyset'$	$\emptyset'$

   Stav $[1, 1']$ je nedosažitelný, protože $1 \notin F_1$.

2. Získaný nedeterministický automat převedeme na ekvivalentní deterministický. □

Další možná konstrukce konečného automatu pro zřetězení jazyků je založena na použití ε–přechodů z koncových stavů prvního automatu do počátečního stavu druhého automatu.

Algoritmus 2.80
Konstrukce konečného automatu pro zřetězení jazyků – ε-přechody.
Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.
Výstup: Konečný automat M přijímací jazyk $L(M) = L(M_1).L(M_2)$.
Metoda:

1. Označíme $M_1 = (Q_1, T_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ a $M_2 = (Q_2, T_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
2. Výsledný automat je zkonstruován takto:
   $M = (Q, T, \delta, q_{01}, F_2)$
   (a) $Q = Q_1 \cup Q_2$,

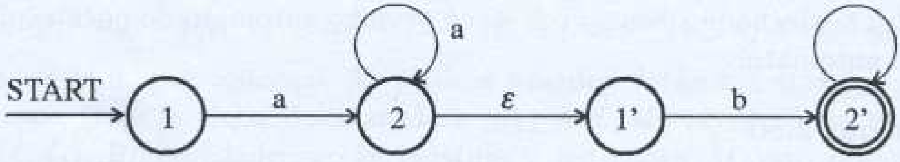
(b) $\delta(q,a) = \delta_1(q,a)$ pro všechna $q \in Q_1$ a $a \in T_1$,
$\delta(q,a) = \delta_2(q,a)$ pro všechna $q \in Q_2$ a $a \in T_2$,
$\delta(q,\varepsilon) = q_{02}$ pro všechna $q \in F_1$. □

Důkaz:
Je třeba dokázat, že platí pro $y_1 = a_1a_2\dots a_n$ a $y_2 = b_1b_2\dots b_m$, $m,n \geq 0$, že z $y_1 \in L(M_1)$, $y_2 \in L(M_2)$ plyne, že $y_1y_2 \in L(M)$.
V automatu M_1 existuje posloupnost přechodů pro y_1:
$(q_{01}, a_1a_2\dots a_n) \vdash (q_{11}, a_2\dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n-1,1}, a_n) \vdash (q_{n,1}, \varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_{01}, q_{11}, \dots, q_{n,1}$, kde $q_{n,1} \in F_1$.
Dále v automatu M_2 existuje posloupnost přechodů pro y_2:
$(q_{02}, b_1b_2\dots b_m) \vdash (q_{12}, b_2\dots b_m) \vdash \dots \vdash (q_{m-1,2}, b_m) \vdash (q_{m,2}, \varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_{02}, q_{12}, \dots, q_{m,2}$, kde $q_{m,2} \in F_2$.

Pak musí pro y_1y_2 existovat tato posloupnost přechodů v automatu M pro $m,n \geq 0$:
$(q_{01}, a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_m) \vdash (q_{11}, a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_m) \vdash \dots$
$\vdash (q_{n-1,1}, a_nb_1b_2\dots b_m) \vdash (q_{n,1}, b_1b_2\dots b_m) \vdash (q_{02}, b_1b_2\dots b_m)$
$\vdash (q_{12}, b_2\dots b_m) \vdash \dots \vdash (q_{m-1,2}, b_m)$
$\vdash (q_{m,2}, \varepsilon)$ a stav $q_{m,2} \in F_2$.
Z toho plyne, že $y_1y_2 \in L(M)$. Důkaz, že z $y_1y_2 \in L(M)$ plyne, že $y_1 \in L(M_1)$ a $y_2 \in L(M_2)$ je podobný stejné části důkazu správnosti algoritmu 2.78 a je ponechán na čtenáři. □

Příklad 2.81
Sestrojíme konečný automat pro zřetězení jazyků a^+ a b^+.

$M = (\{1, 2, 1', 2'\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{2'\})$, kde zobrazení δ je znázorněno přechodovým diagramem na obr. 2.22. □



Obrázek 2.22: Přechodový diagram konečného automatu přijímajícího jazyk a^+b^+

Nakonec ještě ukážeme postup, jak je možno sestrojit automat, který přijímá iteraci jazyka L. Opět uvedeme dvě varianty. První vede na konečný automat bez ε-přechodů a druhá využívá ε-přechodů.

Algoritmus 2.82
Konstrukce konečného automatu pro iteraci jazyka – bez ε-přechodů.
Vstup: Konečný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, který přijímá jazyk L.

Výstup: Konečný automat M^*, který přijímá jazyk L^*.
Metoda:

1. Sestrojíme nedeterministický konečný automat $M' = (Q, T, \delta', q_0, F \cup \{q_0\})$, kde zobrazení δ' je definováno takto:
   $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$ jestliže $q \in Q, \delta(q, x) \cap F = \emptyset$.
   $\delta'(q, x) = \delta(q, x) \cup \{q_0\}$ jestliže $q \in Q, \delta(q, x) \cap F \neq \emptyset$.
2. K automatu M' sestrojíme deterministický konečný automat M^*. □

Důkaz:
Je třeba dokázat, že když automat M přijme řetězec $x = a_1 a_2 \dots a_n$, pak automat M^* přijme řetězec x^n pro všechna $n \geq 0$. V automatu M existuje tato posloupnost přechodů:

$(q_0, a_1 a_2 \dots a_n) \vdash (q_1, a_2 \dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n-1}, a_n) \vdash (q_n, \varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$, kde $q_n \in F$.

Potom automat M^* přijme:

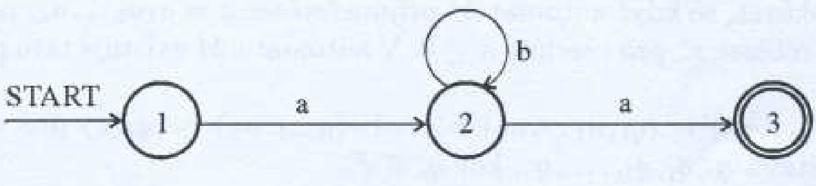
a) prázdný řetězec, protože q_0 je koncový stav,

b) řetězec x, protože q_n je koncový stav,

c) řetězec $x^n, n > 1$, protože po přečtení řetězce x může být automat M^* ve stavu q_0 a znovu může být vždy řetězec x přečten s tím, že po jeho přečtení může automat M^* přejít do stavu $q_n \in F$ nebo do stavu q_0. □

Příklad 2.83

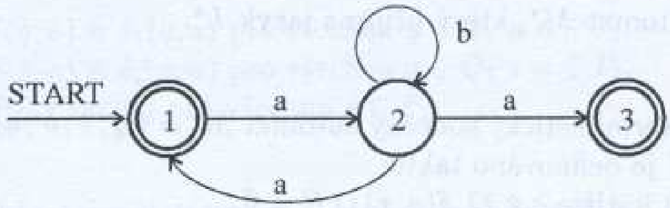
Je dán automat M, který přijímá všechny řetězce tvaru ab^*a. Přechodový diagram tohoto automatu je na obr. 2.23.



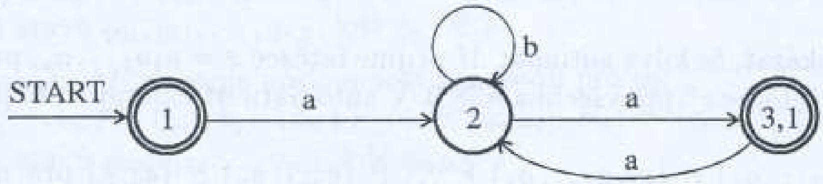
Obrázek 2.23: Přechodový diagram konečného automatu, který přijímá jazyk ab^*a

Automat, který přijímá iteraci jazyka ab^*a, tj. jazyk $(ab^*a)^*$ získáme pomocí algoritmu 2.82. Jeho přechodový diagram je na obr. 2.24.

Deterministický konečný automat má přechodový diagram podle obr. 2.25. □



Obrázek 2.24: Přechodový diagram nedeterministického konečného automatu, který přijímá jazyk $(ab^*a)^*$



Obrázek 2.25: Přechodový diagram deterministického konečného automatu, který přijímá jazyk $(ab^*a)^*$

Algoritmus 2.84
Konstrukce konečného automatu pro iteraci jazyka – s ε–přechody.
Vstup: Konečný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, který přijímá jazyk L.
Výstup: Konečný automat M^*, který přijímá jazyk L^*.
Metoda: Sestrojme konečný automat $M^* = (Q, T, \delta', q_0, F \cup \{q_0\})$, kde zobrazení δ' je definováno takto:
$\delta'(q, x) = \delta(q, x)$ pro všechna $q \in Q$ a všechna $x \in T$,
$\delta'(q, \varepsilon) = \{q_0\}$ pro všechna $q \in F$. □

Důkaz:
Je třeba dokázat, že když automat M přijme řetězec $x = a_1a_2 \dots a_n$, pak automat M^* přijme řetězec x^n pro všechna $n \geq 0$. V automatu M existuje tato posloupnost přechodů:
$(q_0, a_1a_2 \dots a_n) \vdash (q_1, a_2 \dots a_n) \vdash \dots \vdash (q_{n-1}, a_n) \vdash (q_n, \varepsilon)$ pro nějakou posloupnost stavů $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$, kde $q_n \in F$.

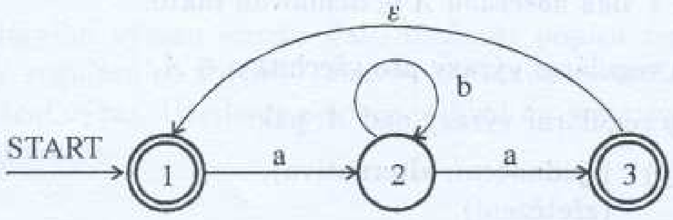
Potom automat M^* přijme:

a) prázdný řetězec, protože q_0 je koncový stav,

b) řetězec x, protože q_n je koncový stav,

c) řetězec $x^n, n > 1$, protože po přečtení řetězce x je automat M^* v koncovém stavu q_n a z tohoto stavu může přejít ε–přechodem do počátečního stavu q_0 a čtení řetězce x se může opakovat. □

Příklad 2.85
Sestrojíme konečný automat, který přijímá iteraci jazyka ab^*a z příkladu 2.83. Výsledný automat má tvar $M = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{3,1\})$, kde zobrazení δ je znázorněno přechodovým diagramem na obr. 2.26. □



Obrázek 2.26: Konečný automat přijímající jazyk $(ab^*a)^*$