Úvod do problematiky

Karel Richta a kol.

Přednášky byly připraveny i s pomocí materiálů, které vyrobili Marko Berezovský, Petr Felkel, Josef Kolář, Michal Píše a Pavel Tvrdík

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

© Karel Richta a kol., 2019

Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
02/2019, Lekce 1

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b6b36dsa/start

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Úvod do problematiky, důkazy, matematická indukce a rekurentní rovnice

- Základní pojmy
    - Algoritmus
    - Datová struktura
  - Správnost
    - Částečná správnost
    - Úplná správnost
  - Efektivita
    - Časová složitost algoritmu
    - Paměťová složitost algoritmu
  - Příklad
- Matematická indukce
- Rekurentní rovnice

Výpočetní problém

- Specifikace výpočetního problému má dvě části:
  - definici vstupu (vstupních dat) a
  - definici výstupu (výstupních dat).
- Instance výpočetního problému $\rightarrow$ nějaká konkrétní přípustná vstupní data. Obecně může k jedné instanci problému existovat několik správných výstupů (obecně se jedná o výpočet, představující relaci).
- Příklad: problém řazení čísel (Sorting Problem for Numbers).
  - Vstup: Posloupnost *n* čísel *Inp* = $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$.
  - Výstup: Taková permutace *Out* = $\langle a'_1,\ldots,a'_n\rangle$ stejných čísel z *Inp*, pro kterou platí, že $a'_1 \leq \ldots \leq a'_n$.
- Instance problému řazení je např. zadání: seřaďte vzestupně posloupnost *Inp* = $\langle 75, 11, 34, 176, 59, 6, 54\rangle$. Správným výstupem řazení je pak posloupnost *Out* = $\langle 6, 11, 34, 54, 59, 75, 176\rangle$.
- Pozn.: Zde je výstup určen jednoznačně, neboť se žádné číslo neopakuje.

Algoritmus

- Neformálně: algoritmus je jakýkoli dostatečně přesný popis postupu výpočtu – dostatečně přesný znamená:
  - v každém okamžiku postupu víme, který krok bude následovat (postup je deterministický),
  - pro libovolná vstupní data postup vždy skončí (je konečný) a
  - lze jej spustit pro všechny instance problému (je hromadný).
- Mezi algoritmy a výpočetními problémy nemusí být vztah jedna ku jedné – stejný problém lze zpravidla řešit různými algoritmy.
- Algoritmus řešící nějaký výpočetní problém je správný (korektní), pokud pro každou vstupní instanci skončí se správným výstupem. Správnost algoritmu se musí dokázat (proč?).
- Algoritmus není program.
  - Program může být realizací algoritmu v určitém výpočetním prostředí.
- Různé algoritmy pro stejný problém mohou mít různou složitost.

Korektnost algoritmu

- Korektní algoritmus *A* pro problém *V*:
  - pro každou instanci problému *V*, algoritmus *A* skončí v konečném čase se správným výstupem.
- Pak říkáme, že algoritmus *A* řeší problém *V* (nebo je řešením pro *V*).
- Čili: algoritmus *A* není korektní, pokud:
  - pro některou instanci problému neskončí (např. se "zacyklí") nebo
  - pro některou instanci problému skončí s nesprávným výstupem.
- Můžeme pak nejvýše hovořit o jisté proceduře (postupu).
- V DSA uvažujeme téměř výhradně pouze korektní algoritmy – tj. algoritmy, které skutečně řeší odpovídající problém.
- Důkaz korektnosti nemusí být jednoduchý – instancí problému bývá zpravidla nekonečně mnoho – ověřit postup pro všechna data nelze. Je nutno použít sofistikovanější metody, např. matematickou indukci.

Program

- Program *P* je zápis (implementace) algoritmu *A* v nějakém programovacím jazyce, spustitelný (proveditelný) na nějakém počítači s nějakým OS a SW prostředím.
- U návrhu a implementace programu nás zajímají SW inženýrské otázky, jako např.:
  - modularita,
  - ošetření výjimek,
  - datová abstrakce a ošetření vstupu a výstupu,
  - dokumentace.
- Jednomu algoritmu *A* mohou odpovídat různé programy P_1, P_2, . . . dokonce v různých programovacích jazycích.
- Složitosti provedení jednotlivých programů P_i téhož algoritmu se mohou lišit v závislosti na architektuře počítače — nikoli ale řádově.

Jak měřit a určovat složitost algoritmu?

- Analýza složitosti algoritmu: výpočet/odhad/predikce požadavků na výpočetní prostředky, které provedení algoritmu bude vyžadovat v závislosti na velikosti vstupních dat.
- Velikost (složitost) vstupních dat závisí na specifikaci daného problému, může se jednat např. o:
  - počet bitů reprezentace vstupního čísla,
  - délka vstupní posloupnosti čísel,
  - rozměry vstupní matice,
  - počet znaků vstupního textu,
  - . . .
- Pro jeden problém V mohou existovat různé algoritmy $A_1, A_2, \ldots$, pro jeho řešení. Jejich složitosti se mohou výrazně (= řádově) lišit svými nároky na výpočetní prostředky.
- Zvláště se mohou lišit svojí rychlostí (<u>operační složitostí</u>).
- Nebo nároky na použitou paměť (<u>paměťovou složitostí</u>).

Výpočetní (operační) složitost

- Varianty měření operační složitosti:
  - doba běhu algoritmu,
  - doba výpočtu,
  - počet provedených operací,
  - počet provedených instrukcí (aritmetických, logických, paměťových),
  - počet transakcí nad databází.
- Případová analýza složitosti:
  - Typický algoritmus obsahuje podmíněné příkazy nebo cykly $\Rightarrow$ složitost algoritmu může obecně záviset nejen na velikosti vstupních dat, ale také na jejich hodnotách (říkáme pak, že algoritmus je citlivý na vstupní data).
- Proto je obecně potřebné vyjádřit složitost algoritmu:
  - v nejlepším případě,
  - v nejhorším případě,
  - v průměrném případě.

Umění analýzy složitosti algoritmu

- Odhad složitosti v průměrném případě je nejobtížnější, protože není vždy zřejmé, co to jsou vstupní data v "průměrném" případě.
- Typicky náhodně vygenerovaná data, ale to nemusí být v praxi splněno.
- Platí pro časovou, paměťovou, komunikační, transakční,. . . .
- Umění analyzovat složitost algoritmu vyžaduje řadu znalostí a schopností:
  - znalosti odhadu řádu rychlosti růstu funkcí,
  - schopnost abstrakce výpočetního modelu,
  - matematické znalosti z diskrétní matematiky, kombinatoriky,
  - znalosti sčítání řad a řešení rekurentních rovnic,
  - znalosti základu teorie pravděpodobnosti,
  - a další.

RAM model

- Pro analýzu složitosti algoritmu potřebujeme model výpočetního systému, na kterém bude algoritmus hypoteticky implementován.
- Nejčastěji se používá matematická abstrakce stroje s přímým přístupem do paměti - jednoprocesorový model RAM (Random Access Machine):
  - data jsou uložena v adresovatelné paměti,
  - stroj umí aritmeticko-logické, řídicí, paměťové instrukce,
  - časová složitost instrukcí je jednotková nebo konstantní,
  - instrukce jsou prováděny postupně (sekvenčně).
- Neumí manipulace s větším množstvím dat naráz a práci s neomezeně velkými čísly (řetězci).
- Zpracování každé instrukce trvá přesně jeden krok.
- Nemá „keše“, disky a vstupně/výstupní zařízení (lze je ale simulovat pomocí přidružených datových struktur).
- <u>Díky své obecnosti přežil tento model desetiletí.</u>

Turingův stroj a RAM počítač

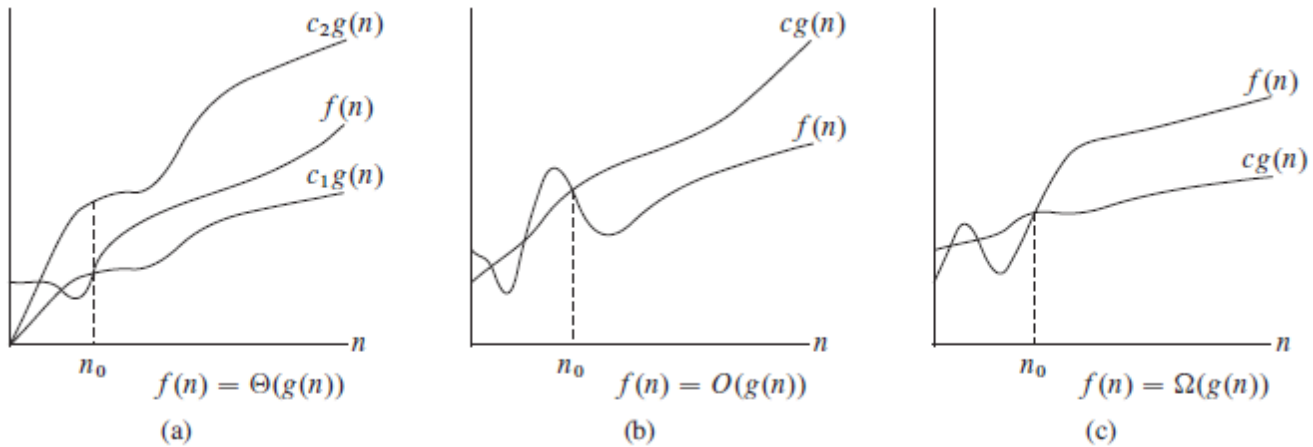
- RAM počítač je dostatečnou abstrakcí pokud neuvažujeme vstup ani výstup. Na druhé straně je paměť RAM počítače neomezená.
- Pokud bychom chtěli tento stroj přiblížit standardním modelům výpočtů, je možno rozšířit RAM počítač o vstupně/výstupní zařízení – např. Turingovu pásku.
- Ta je nekonečná na obě strany (vlevo i vpravo). Můžeme na ní zapisovat symboly (data) a poté je číst. Na pásku zapisujeme data pomocí čtecí/zápisové hlavy, která se může také pohybovat vlevo či vpravo.
- RAM počítač s Turingovou páskou tvoří tzv. Turingův stroj. Lze dokázat, že každá funkce realizovatelná Turingovým strojem je také realizovatelná RAM počítačem s nekonečnou pamětí.
- Existuje tzv. Churchova teze, která tvrdí, že všechny rekurzivně vyčíslitelné funkce jsou realizovatelné Turingovým strojem nebo RAM počítačem s nekonečnou pamětí. To ale dokázat nelze (proto teze), nikdy nebude existovat algoritmus, který by např. řešil pro libovolný program (resp. pro libovolný Turingův stroj) problém zastavení Turingova stroje.

Asymptotická složitost

- Zajímá nás, jak složitost algoritmu závisí na velkosti vstupních dat v limitě, pokud velikost instance problému poroste nade všechny meze.
- Pro první porozumění chování algoritmu nás nemusejí zajímat ani multiplikativní konstanty - říkáme, že nás zajímá asymptotická složitost.
- Je to složitost vyjádřená pro instance problému dostatečně velké, aby se jasně projevil řád růstu funkce složitosti v závislosti na velikosti vstupních dat.
- Asymptoticky lepší algoritmus bude lepší pro všechny instance problému kromě případného konečného počtu menších instancí.
- Asymptotická notace nám umožnuje zjednodušovat výrazy zanedbáním nepodstatných částí.
- Co znamená zápis $f(n) = 4n^3 + \Theta(n^2)$?
- Výraz $\Theta(n^2)$ zastupuje anonymní funkci z množiny $\Theta(n^2)$ (nějaká kvadratická funkce), jejíž konkrétní podobu prozatím zanedbáváme.

Grafické znázornění pro vysvětlení

- Pokud uvažujeme asymptotickou složitost, zajímá nás zejména chování pro velká vstupní data, pro singulární malá data (menší než n_0) se může chovat trochu jinak. Varianta (a) ukazuje tzv. průměrnou složitost – $f(n) = \Theta(g(n))$ se drží mezi $c_2g(n)$ a $c_1g(n)$ (pro $n \geq n_0$). Varianta (b) ukazuje tzv. asymptotickou horní mez - $f(n) = O(g(n))$ se drží pod $cg(n)$. Naopak varianta (c) ukazuje tzv. asymptotickou dolní mez - $f(n) = \Omega(g(n))$ se drží nad $cg(n)$.



Příklad

- Uvažme problém řazení a dva vývojáře.
- Jeden má rychlý počítač C_1 a navrhl řazení pomocí přímého zatřiďování (InsertionSort) – výstup tvoříme tak, že do prázdné posloupnosti postupně zatřiďujeme jednotlivé prvky vstupní posloupnosti.
- Druhý má pomalý počítač C_2 (např. 1000x pomalejší než C_1), ale navrhl řazení slučováním (MergeSort) – vstup rozdělíme na dvě části které (rekurzivně) setřídíme a poté sloučíme do výsledku.
- Lze ukázat (to se naučíme později), že asymptotická složitost InsertionSort bude $\Theta(n^2)$, zatímco složitost MergeSort bude $\Theta(n*\log_2 n)$.
- Pokud budeme třídit 10 milionů (10^7) čísel, počítač C_1 provede 10^{10} instrukcí za vteřinu, počítač C_2 provede 10^7 instrukcí za vteřinu (je 1000x pomalejší), pak:

$$(10^7)^2/(10^{10}) = 10^4 \text{ vteřin} \geq (10^7*\log_2 10^7)/(10^7) = 161 \text{ vteřin}$$

- Tj. rychlejší C_1 počítá téměř 3 hodiny, pomalejší C_2 ani ne 3 minuty.

Základní funkce jedné proměnné

- dolní celá část $\lfloor x \rfloor$, horní celá část $\lceil x \rceil$,
- polynomiální
  - exponent > 1, např. n^2,
  - lineární, např. n,
  - exponent < 1, např. $\sqrt{n}$,
- exponenciální, např. 2^n,
- polylogaritmické, např. $\log^3 n$,
- faktoriální n!,
- logaritmická iterace $\log^* n$,
- Fibonacciho čísla F(n).
- . . . .

Srovnání časových složitostí

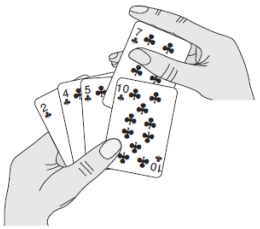
- Předpokládejme, že 1 operace trvá čas 1µs a že počet operací je dán funkcí v prvním sloupci. Pak doba výpočtu bude pro různé hodnoty n následující: (Připomeňme, že počet atomů ve vesmíru se odhaduje na 10^{80} a stáří vesmíru na 14×10^9 let.)

n	10	20	40	80	500	1000
$\log n$	$3,3\ \mu s$	$4,3\mu s$	$5\mu s$	$5,8\mu s$	$9\mu s$	$10\mu s$
n	$10\mu s$	$20\mu s$	$40\mu s$	$60\mu s$	$0,5ms$	$1ms$
$n \log n$	$33\mu s$	$86\mu s$	$0,2ms$	$0,35ms$	$4,5ms$	$10ms$
n^2	$0,1ms$	$0,4ms$	$1,6\ ms$	$3,6ms$	$0,25s$	$1s$
n^3	$1ms$	$8ms$	$64ms$	$0,2s$	$125s$	$17min$
n^4	$10ms$	$160ms$	$2,56s$	$13s$	17 h	11,6 dní
2^n	$1ms$	$1s$	12,7dní	3600 let	10^{137} let	10^{287} let
$n!$	$3,6s$	77100 let	10^{34} let	10^{105} let	10^{1110} let	10^{2554} let

Příklad: Řazení přímým vkládáním (InsertionSort)

Algoritmus: vstup – posloupnost s:

1. Pokud je posloupnost s kratší než 2, skonči, *Out* = *Inp*.
2. Jinak postupně vyber prvek, který je na j-tém místě (j nabývá hodnot od 2 do délky posloupnosti – aktuálně je v čele) a zařaď jej na správné místo v posloupnosti – před nejbližší větší prvek (pokud existuje) v levé části posloupnosti.

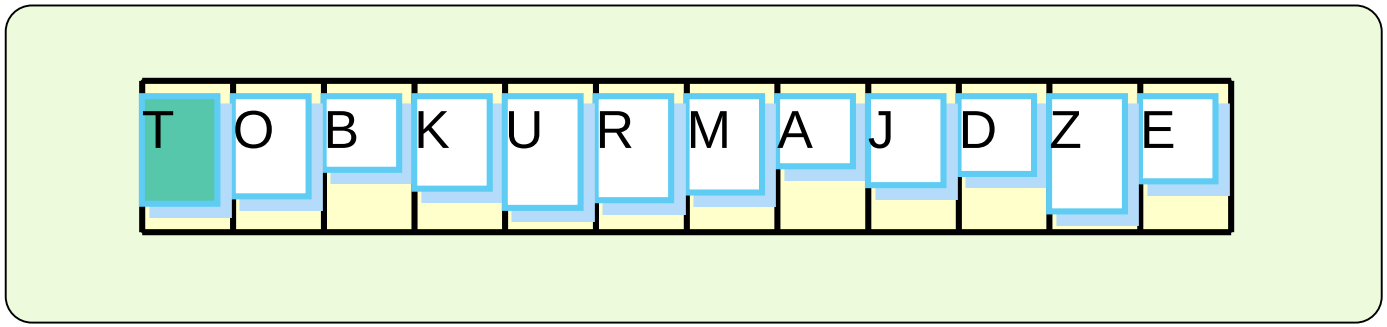


Program (pseudokód):

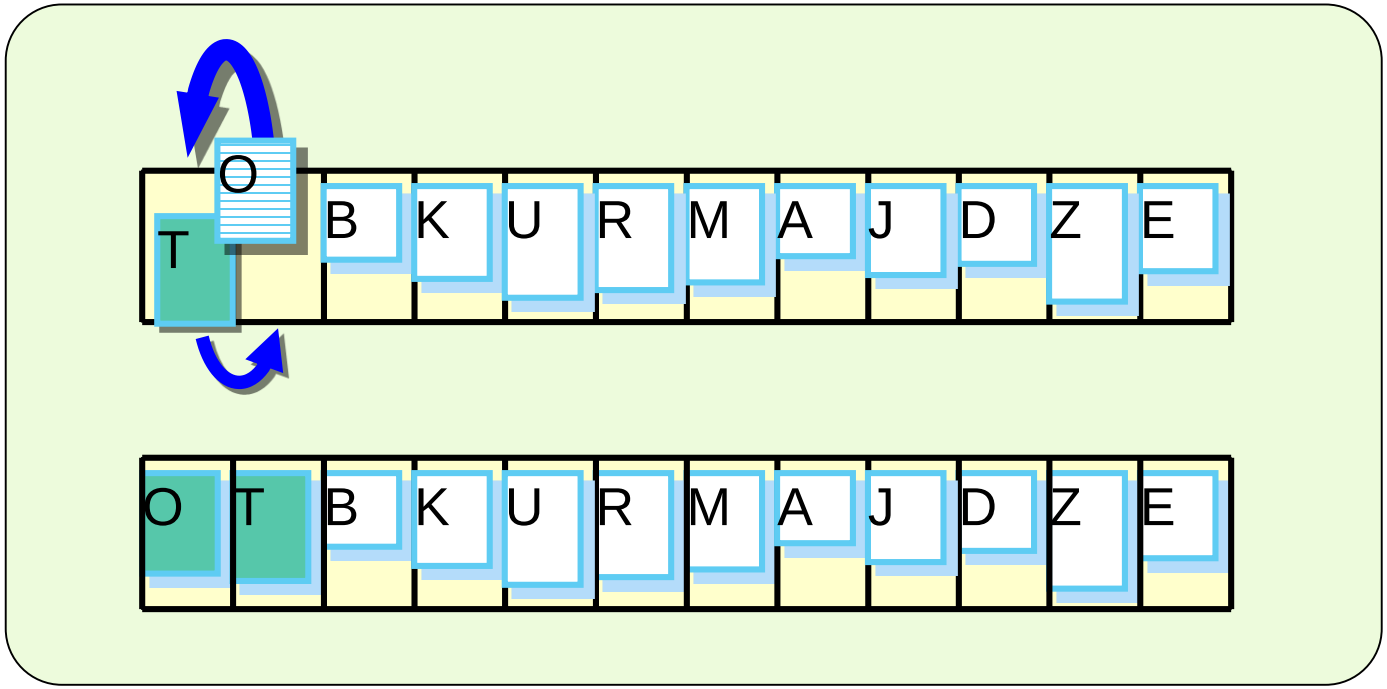
```
for (i = 1; i < n; i++) { // find & make
                          // place for s[i]
  insVal = s[i];
  j = i-1;
  while ((j >= 0) && (s[j] > insVal)) {
    s[j+1] = s[j];
    j--;
  }
  s[j+1] = insVal; // insert s[i]
}
```

InsertionSort

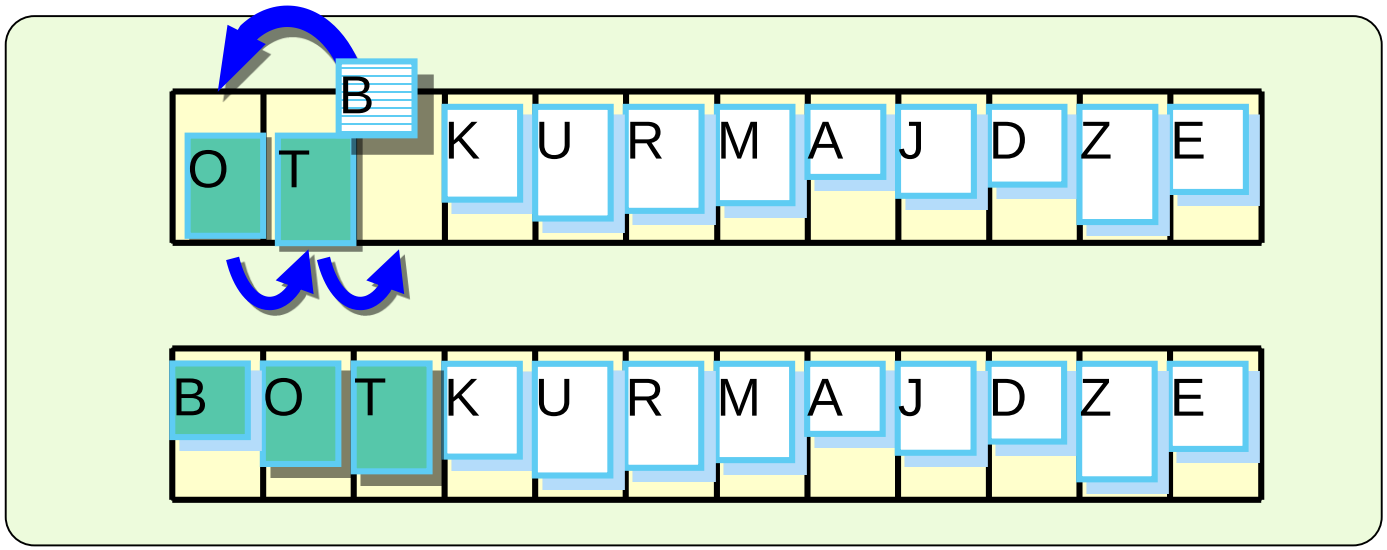
Start



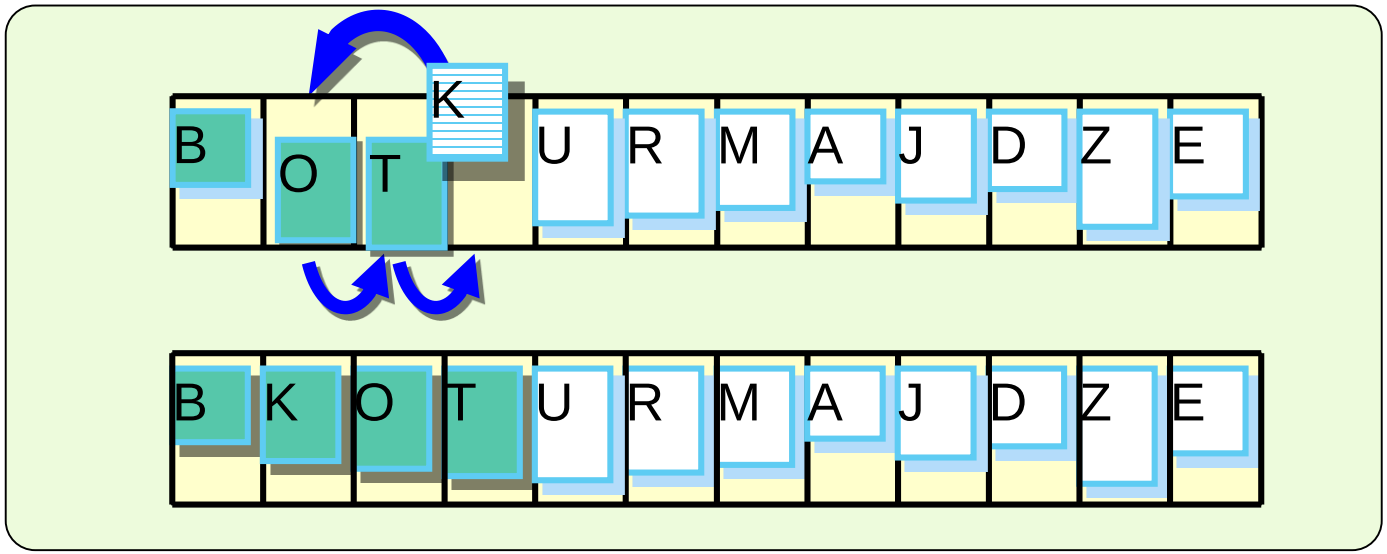
Krok 1

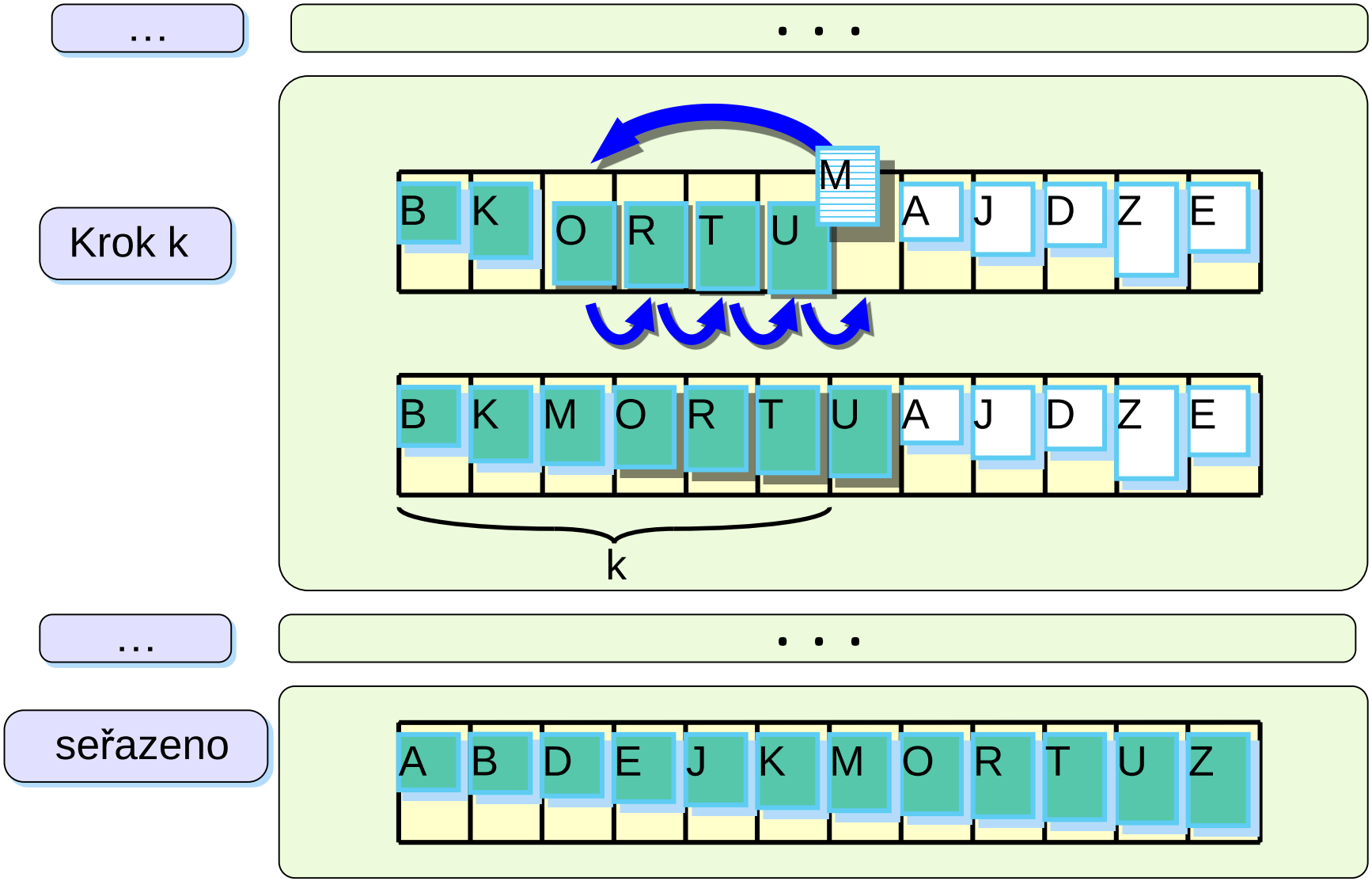


Krok 2



Krok 3



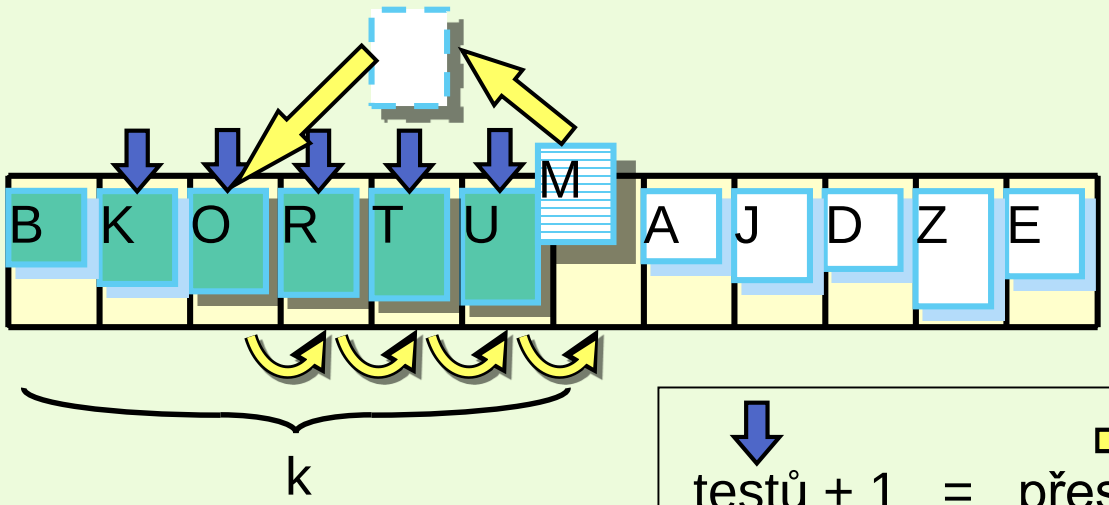

...
. . .
Krok k
B K O R T U M A J D Z E
B K M O R T U A J D Z E
k
...
. . .
seřazeno
A B D E J K M O R T U Z

Je tato implementace korektní?

- **Formálně**: ∀s:posloupnost platí: výstup InsertionSort(s) je seřazená posloupnost a obsahuje permutaci prvků z s.
- Náznak důkazu:
- Ad a) konečnost – evidentně algoritmus po n krocích skončí.
- Ad b) správnost (indukcí podle délky posloupnosti s):
  - Pokud je s prázdná posloupnost ε, *Out* = InsertionSort(*Inp*) – tj. ε = InsertionSort(ε) a výstup je korektní.
  - Pokud je s posloupnost délky 1, *Inp* = ⟨a⟩ – tj. *Out* = ⟨a⟩ = InsertionSort(⟨a⟩) a výstup je korektní.
  - Předpokládejme, že InsertionSort funguje správně pro posloupnost s délky n, musíme ověřit, že funguje správně i pro posloupnost s' délky n+1, tj.: InsertionSort(s') je seřazená, neboť InsertionSort(s) je seřazená (indukční předpoklad) a zařazením nového prvku do posloupnosti InsertionSort(s) vznikne seřazená posloupnost InsertionSort(s'), protože jeden průběh cyklem zařadí nový prvek před nejblíže větší prvek v InsertionSort(s).

Složitost řazení vkládáním (INSERTIONSORT)

Krok k



testů + 1 = přesunů

testů …….	1	nejlepší případ
	k	nejhorší případ
	(k+1)/2	průměrný případ

přesunů …….	2	nejlepší případ
	k+1	nejhorší případ
	(k+3)/2	průměrný případ

Shrnutí

Celkem testů	$n - 1$	$= \Theta(n)$	nejlepší případ
	$(n^2 - n)/2$	$= \Theta(n^2)$	nejhorší případ
	$(n^2 + n - 2)/4$	$= \Theta(n^2)$	průměrný případ
Celkem přesunů	$2n - 2$	$= \Theta(n)$	nejlepší případ
	$(n^2 + n - 2)/2$	$= \Theta(n^2)$	nejhorší případ
	$(n^2 + 5n - 6)/4$	$= \Theta(n^2)$	průměrný případ

Asymptotická složitost INSERTIONSORT je $O(n^2)$ (!!)

Základní diskrétní posloupnosti a řady

- **Aritmetická posloupnost:**
  Základní: $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$
  Obecná: $a_1 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.
- **Geometrická posloupnost:** Pro $x \neq 1$:
  $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
- **Obecná posloupnost:** Je-li $f(n)$ **monotonně rostoucí** funkce, lze součet řady $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ aproximovat určitým integrálem:

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$

Aplikace:

- Příklad 1: **Harmonická posloupnost:**
  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$.
- Příklad 2: **Součet kvadrátů:**
  $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \doteq \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}$.

Základní kombinatorika

- **Permutace:** (prvky se neopakují, záleží na pořadí)
  Počet k-permutací z n prvků je $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$.
  Počet permutací z n prvků je $n!$.
- **Permutace s opakováním:** (prvky se opakují, záleží na pořadí)

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_d!},$$

  kde $\sum_{i=1}^{d} k_i = n$.
- **Kombinace:** (prvky se neopakují, nezáleží na pořadí).
  Počet k-kombinací z n prvků je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
  $=$ Počet k-podmnožin z n-prvkové množiny.
  $=$ Počet n-bitových řetězců s k bity 1.
  $=$ Permutace s opakováním pro $d = 2$.
- **Variace** (prvky se opakují libovolně, záleží na pořadí):
  Počet k-variací z n-prvkové množiny je n^k.

Techniky matematických důkazů

- Důkaz je postup, kdy pro nějaké tvrzení dokazujeme, že je pravdivé.
- Jeden typ důkazu je tzv. **konstruktivní důkaz**, kdy zkonstruujeme řešení, které má požadované vlastnosti.
- Jiný typ důkazu je **důkaz sporem** – hledáme protipříklad, kde tvrzení neplatí. Často to lze obrátit tak, že uvažujeme negaci nějakého tvrzení a dokazujeme, že neplatí.
- Pro nekonečné (spočetné) případy musíme použít metody **důkazu matematickou indukcí**. Skládá se ze dvou kroků – nejprve dokazujeme nějaký triviální počáteční krok a poté předpokládáme, že tvrzení platí pro problém velikosti n a dokazujeme, že pak platí i pro n+1. Z toho pak indukcí usuzujeme, že platí pro všechna n. Věříme totiž, že když z platnosti pro n plyne platnost pro n+1, bude to platit pro libovolně velké n – to je ale jen naše víra v indukci, třeba to za obzorem může být jinak.

  (Pokud Darwin tvrdí, že předkem člověka je opice a platí, že opici se může narodit jen opice, pak je důsledek odvozený indukcí zřejmý.)

Konstruktivní důkaz

Zpravidla postupujeme tak, že hledáme řešení, pro které by tvrzení platilo.

Příklad tvrzení: Existuje prvočíslo větší než 8.

- Konstruktivní důkaz - konstruujeme řešení – probíráme čísla > 8:
- Přirozené číslo 9 je dělitelné 1, 3 a 9 - není tedy prvočíslo.
- Přirozené číslo 10 je dělitelné 1, 2, 5 a 10 - není tedy prvočíslo.
- Přirozené číslo 11 je dělitelné pouze 1 a samo sebou. Pak ale je 11 prvočíslo a protože 11 > 8, tvrzení platí.

Důkaz sporem

Zpravidla postupujeme tak, že předpokládáme opak dokazovaného tvrzení a hledáme protipříklad, který by to vyvrátil. Neplatí-li opak, musí platit dokazované tvrzení.

Příklad tvrzení: Neexistuje největší přirozené číslo.

- Důkaz sporem: Předpokládejme opak - že existuje největší přirozené číslo, např. X. Pak ale existuje i přirozené číslo X+1 (podle definice přirozených čísel). X+1 je ale větší než X, tj. X není největší a je zde spor.

Příklad tvrzení: Číslo 8 není prvočíslo.

- Důkaz sporem: Předpokládejme opak – 8 je prvočíslo. Pak musí být dělitelné pouze 1 a 8. Ale 8 je dělitelné 2, což je spor a 8 není prvočíslo.

Důkaz indukcí

Při důkazu indukcí zpravidla postupujeme tak, že nejprve dokazujeme počáteční krok – tvrzení musí platit pro minimální případ (např. pro 0). Poté zavedeme předpoklad (indukční hypotézu), že tvrzení platí pro problém rozsahu n a dokazujeme, že pak platí i pro n+1.

Příklad tvrzení: Součet prvých n přirozených čísel je n(n+1)/2.

- Počáteční krok: Ukažme, že toto tvrzení platí pro n=1. Dosadíme-li za n do vztahu: n(n+1)/2 = n = 1 a tvrzení platí. (Lze uvažovat i 0.)
- Indukční krok: Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro n, tj. že součet prvých n přirozených čísel je $\sum_{i=1}^{n} i$ = n(n+1)/2. Dokažme, že pak tvrzení platí i pro n+1, tj. že součet prvých n+1 přirozených čísel je (n+1)((n+1)+1)/2:

  $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 = n(n+1)/2 + n + 1 = (n(n+1) + 2n + 1)/2 = (n^2+n+2n+1)/2 =$
  $= (n^2+3n+2)/2 = (n^2+n+2n+2)/2 = (n+1)(n+2)/2 = (n+1)((n+1)+1)/2.$ q.e.d.

Důkaz indukcí (pokr.)

Příklad tvrzení: Libovolnou hodnotu známky v korunách větší než 3 lze vyjádřit pomocí známek s hodnotou 2 Kč a 5 Kč.

- Počáteční krok: Ukažme, že toto tvrzení platí pro n=4 (pro n=1 a n=3 tvrzení neplatí). Zde 4=2+2, tj. hodnotu vyjádřit lze.
- Indukční krok: Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro hodnotu n, tj. že tuto hodnotu lze vyjádřit pomocí 2 a 5. Musíme ukázat, že pak tvrzení platí i pro n+1.
  - Pokud vyjádření n obsahuje známku s hodnotou 5, nahradíme ji 3-mi známkami s hodnotou 2 – výsledkem je hodnota n+1.
  - Pokud vyjádření n neobsahuje známku s hodnotou 5, musí obsahovat nejméně 2 známky s hodnotou 2 ($n \geq 4$). Ty nahradíme známkou s hodnotou 5 – výsledkem je hodnota n+1.

q.e.d.

Důkaz indukcí (pokr.)

Příklad tvrzení: Každé přirozené číslo n > 1 je dělitelné nějaký prvočíslem.

- Počáteční krok: Pro n = 2, je zřejmě dělitelné 2 – což je prvočíslo.
- Indukční krok: Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro hodnotu n, tj. že všechna x, taková že: $2 \leq x \leq n$ jsou dělitelná nějakým prvočíslem. Musíme ukázat, že pak tvrzení platí i pro n+1.
  - Pokud je n+1 prvočíslo, je dělitelné samo sebou a tvrzení platí.
  - Pokud n+1 není prvočíslo, pak $n+1 = x \times y$, kde $2 \leq x \leq n$ a $2 \leq y \leq n$. Podle indukčního předpokladu je x dělitelné nějakým prvočíslem q, tj. $x = a \times q$ - tímto prvočíslem je pak dělitelné i $n+1 = a \times q \times y$.

q.e.d.

- Pozn. Zde se jedná o tzv. silnou indukci, neboť musíme v indukčním kroku předpokládat, že tvrzení platí pro všechna čísla x, kde: $2 \leq x < n$.

Rekurzivní rovnosti

- Rekurzivní rovnosti představují způsob definice funkce (procedury, postupu, algoritmu) pomocí odkazu na ně samé.
- Teoretická informatika vyjadřuje tezi, že každou parciálně vyčíslitelnou funkci, která může být implementovaná na von Neumannovském počítači, lze vyjádřit rekurzivně.
- Později budeme studovat vztah mezi rekurzí a iterací – někdy lze rekurzivní řešení nahradit iterací, která bývá zpravidla efektivnější.

Př.: Funkce faktoriál se často vyjadřuje pomocí rekurzivní definice (pro n >= 0):

```
faktoriál(n) = n * faktoriál(n-1)
faktoriál(0) = 1
```

The End