DRN: Ukázková semestrální písemka

1. Najděte řešení úlohy

$$y' = -3\frac{y-3}{x}, \qquad y(-1) = 5.$$

2. Načrtněte vektorové pole pro rovnici $y' = \dfrac{\ln(x)}{y-x}$.

3. a) Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

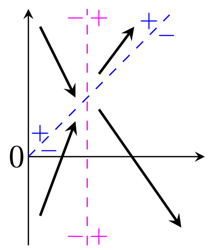
b) Diskutujte jeho typické chování v nekonečnu.
c) Najděte řešení pro počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

4. Uvažujte rovnici $y'' - 2y' = 13e^{3x} + 23$.
Odhadněte obecný tvar partikulárního řešení y_p.

Řešení

1. Z rovnice $x \neq 0$.
Separace: $\displaystyle\int \frac{dy}{y-3} = -3\int \frac{dx}{x}$. Stac. řeš. $y(x) = 3$.
Integrace: $\ln|y-3| = -3\ln|x| + c = \ln\left|\frac{1}{x^3}\right| + c$, trik s $C = \pm e^c \neq 0$, proto $y(x) = \frac{C}{x^3} + 3$.
Existence: $x \neq 0$. Z postupu chceme $y \neq 3$, to je pro $C \neq 0$ pravda. Volba $C = 0$ zahrne stac. řeš.
Proto obecné řešení $y(x) = \frac{C}{x^3} + 3$, $x \neq 0$.
P.p.: $\frac{C}{(-1)^3} + 3 = 5$ dá $C = -2$. Chceme interval s $x_0 = -1$, proto
řešení $y(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$, $x \in (-\infty, 0)$.

2. Z rovnice $x > 0$ a $y - x \neq 0$. Pravá strana je podíl, tedy znaménko derivace je určeno pomocí znamének faktorů $\ln(x)$ a $y - 2$.
První faktor: $\ln(x) = 0$ dává $x = 1$, tato (svislá) přímka rozdělí rovinu na levou a pravou část, v pravé části je $\ln(x) > 0$. Druhý faktor: $y - x = 0$ dává $y = x$, tato přímka (diagonála) rozdělí rovinu na levou horní (tam je $y - x > 0$) a pravou dolní část.
Vzniknou tak čtyři oblasti, ve kterých skládáme znaménka jednotlivých faktorů. S přihlédnutím k omezení na x vznikne náčrt.



3. a) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = -1 \pm 2i$.
$y(x) = a\,e^{-x}\sin(2x) + b\,e^{-x}\cos(2x)$, $x \in I\!R$.
b) Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \to 0$.
c) $y'(x) = -a\,e^{-x}\sin(2x) + 2a\,e^{-x}\cos(2x) - b\,e^{-x}\cos(2x) - 2b\,e^{-x}\sin(2x)$.
P.p.:
$$\begin{array}{r} 0 + b = 0 \\ -0 + 2a - b - 0 = 2 \end{array} \implies a = 1,\ b = 0.$$
Řešení: $y(x) = e^{-x}\sin(2x)$, $x \in I\!R$.

4. Napravo dva různé typy, exponenciála s $\alpha = 3$ a polynom. První nástřel je tedy $A\,e^{3x} + B$.
Korekce? Levá strana (hom. rovnice) má charakteristická čísla
$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0, 2.$$
Pravá strana: Exponenciální část je popsána parametrem $\lambda = 3$, není korekce. Polynomiální část nemá exponenciálu ani sinus/kosinus, proto je popsána parametrem $\lambda = 0$, jednonásobný překryv s charakteristickými čísly, bude korekce.
Závěr: Odhad je $y_p = A\,e^{3x} + Bx$.