

Semestrální projekt–přehled

Při numerickém řešení diferenciálních rovnic se objevují třídiagonální matice. Zde se podíváme na matice typu

$$A_d(n) = \begin{pmatrix} d & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & d & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & d & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & d \end{pmatrix}$$

pro $d > 0$. Experimentálně vyzkoušíme, pro které hodnoty d bude na soustavy rovnic dané takovouto maticí možno úspěšně aplikovat Gauss-Seidelovu iteraci. Dá se očekávat, že existuje nějaká speciální hodnota d_0 taková, že dostáváme konvergenci pro $d \geq d_0$. Bude nás také zajímat, zda toto záleží na velikosti matice n . Vzhledem ke tvaru budeme uvažovat pouze $n \geq 3$.

Abychom měli situaci jednodušší, budeme se pouze zajímat o čísla s přesností na desetiny, tedy čísla jako $d = 13.0$, $d = 2.4$ a podobně. Hledáme tedy d_0 takové, že máme konvergenci pro $d_0, d_0 + 0.1, d_0 + 0.2, \dots$ a divergenci pro $d_0 - 0.1, d_0 - 0.2, \dots$

Teoretická příprava:

Podívejte se na probrané věty o konvergenci iteračních metod. Jedna z nich by vám měla identifikovat jisté d_T takové, že pro $d \geq d_T$ bude Gauss-Seidelova metoda jistě konvergovat pro libovolné soustavy dané maticí $A_d(n)$ s libovolným $n \geq 3$.

Na cvičení dostanete bližší pokyny a připravený worksheet s potřebnými příkazy pro generování matic a Gauss-Seidelovu iteraci. Rozmyslete si, jak budete při vypracovávání práce postupovat.

Očekávaný výstup:

Bude se od vás chtít napsání zprávy, která popíše, pro která $d > 0$ bude u soustavy $A_d(n)$ konvergovat Gauss-Seidelova iterace a pro která ne. Určitě je třeba zmínit ono d_T a okomentovat, jak souvisí se získaným d_0 .

Pokud se ukáže, že n hraje roli, pak by bylo dobré experimentálně najít funkci $d_0(n)$ takovou, že pro dané n bude Gauss-Seidel konvergovat pro matice $A_d(n)$ s $d \geq d_0(n)$. Jak přesně tuto funkci identifikujete, záleží na vás (téměř jistě se nedá čekat nějaký vzorec, spíše hodnoty), ale alespoň základní představu by bylo dobré vytvořit.