

Příklady č. 3 (k řešení mezi 26.3. – 9.4., vyzářování, vyžaduje programování)

Příklad 1 (3 body)

Představte si dva velmi tenké a nekonečně dlouhé proudovodiče rovnoběžné s osou x a ležící v rovině x - y . Necht' jimi generovaná proudová hustota má tvar

$$\mathbf{J}(x, y, z, \omega) = \mathbf{x}_0 I_0(\omega) \left[\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(z).$$

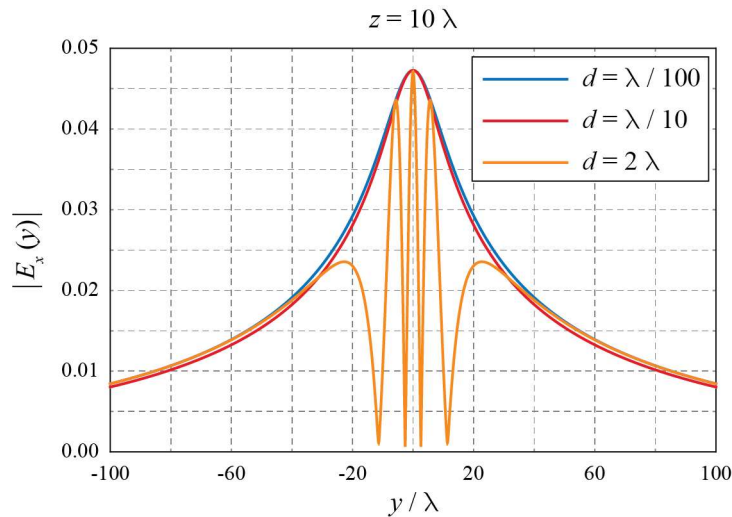
Určete obecný vztah pro elektrické pole v poloprostoru $z > 0$ generované tímto proudem. Pro výpočet použijte rozklad pole do rovinných vln. Za předpokladu harmonického časového průběhu a normalizace $I_0(\omega) = -1/(\omega\mu)$ vykreslete absolutní hodnotu elektrického pole v řezu $z = 10\lambda$. Vykreslení proveďte pro $d = 2\lambda$, $\lambda/10$, $\lambda/100$. Pro numerické výpočty nevyužívejte pozn. 2, procvičte si numerickou implementaci Fourierovy transformace pomocí FFT algoritmu.

Představte si, že byste výsledné pole z Obr. 1 měřili (samozřejmě jak amplitudu, tak fázi) a snažili se použít vztahy z přednáškového slidu č. 41 opačně, tedy k rekonstrukci proudové hustoty (k rekonstrukci tvaru zdroje). Jednalo by se o jakousi mikroskopii. Obrázek 1 ukazuje, že pro $d < \lambda$, se vám rekonstrukce nepodaří. Vysvětlete proč. Vysvětlete dále, co bych měl udělat, abych zrekonstruoval (abych „viděl“) i zdroje s $d < \lambda$.

Výsledek:

$$\mathbf{E}(x, y, z > 0, \omega) = -\omega\mu\mathbf{x}_0 I_0(\omega) \mathcal{F}_{k_y}^{-1} \left\{ \cos\left(k_y \frac{d}{2}\right) \frac{e^{-jk_z z}}{k_z} \right\}$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}$$



Obr. 1 Absolutní hodnota elektrického pole v řezu $z = 10\lambda$.

Pozn. 1. Při provádění zpětné Fourierovy transformace je třeba dát pozor na člen $1/k_z$. Tuto singularitu, lze snadno odstranit fyzikálním předpokladem, že okolní prostředí je alespoň málo ztrátové, tedy, že vlnové číslo k je komplexní (pozor na znaménka imaginárních částí k, k_z). Použití $k \rightarrow k(1 - j10^{-3})$ pro naše účely postačí.

Pozn. 2. Lze dokázat následující identitu

$$H_0^{(2)}\left(k\sqrt{y^2+z^2}\right)=2\mathcal{F}_{k_y}^{-1}\left\{\frac{e^{-jk_z|z|}}{k_z}\right\},$$

kde $H_0^{(2)}(\xi)$ je Hankelova funkce nultého řádu a druhého druhu (https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function). To znamená, že elektrické pole námi popisovaného systému lze také popsat jako

$$\mathbf{E}(x,y,z,\omega)=-\frac{\omega\mu_0\mathbf{x}_0I_0(\omega)}{4}\left[H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+z^2}\right)+H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+z^2}\right)\right].$$
 Použitím

superpozice můžeme dokonce obecně říci, že proudová hustota $\mathbf{J}(x,y,z,\omega)=\mathbf{x}_0K_0(y,\omega)\delta(z)$

generuje elektrické pole $\mathbf{E}(x,y,z,\omega)=-\frac{\omega\mu_0}{4}\mathbf{x}_0\int_{y'}K_0(y',\omega)H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{(y-y')^2+z^2}\right)dy'$. Tyto

vztahy můžete použít pro ověření správnosti výpočtu pomocí FFT.