Statistika a spolehlivost v lékařství – vzorce ke zkoušce

1 Intervalové odhady parametrů normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

1.1 Odhad střední hodnoty při známém rozptylu σ^2

$$\left(-\infty, \overline{\boldsymbol{X}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(1-\alpha)\right\rangle,$$
$$\left\langle \overline{\boldsymbol{X}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty\right),$$
$$\left\langle \overline{\boldsymbol{X}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \overline{\boldsymbol{X}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right\rangle,$$

1.2 Odhad střední hodnoty při neznámém rozptylu

$$\left(-\infty, \overline{\boldsymbol{X}} + \frac{S_X}{\sqrt{n}}\,q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\alpha)\right\rangle,$$
$$\left\langle \overline{\boldsymbol{X}} - \frac{S_X}{\sqrt{n}}\,q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\alpha), \infty\right),$$
$$\left\langle \overline{\boldsymbol{X}} - \frac{S_X}{\sqrt{n}}\,q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\tfrac{\alpha}{2}), \overline{\boldsymbol{X}} + \frac{S_X}{\sqrt{n}}\,q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\tfrac{\alpha}{2})\right\rangle.$$

1.3 Odhad rozptylu

$$\left(-\infty, \frac{(n-1)\,S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)}\right\rangle,$$
$$\left\langle \frac{(n-1)\,S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)}, \infty\right),$$
$$\left\langle \frac{(n-1)\,S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1)\,S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right\rangle.$$

2 Testování hypotéz

2.1 Testy střední hodnoty normálního rozdělení

2.1.1 Při známém rozptylu σ^2

$$t = \frac{\bar{\boldsymbol{x}} - c}{\sigma}\sqrt{n}$$

porovnáváme s kvantily **normovaného normálního rozdělení**:

H_0	zamítáme pro	dosažená významnost
$\mu \le c$	$t > \Phi^{-1}(1-\alpha)$	$1 - \Phi(t)$
$\mu \ge c$	$t < -\Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$	$\Phi(t)$
$\mu = c$	$\lvert t\rvert > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$	$2\,\min\left(\Phi(t), 1-\Phi(t)\right)$

2.1.2 Při neznámém rozptylu

$$t = \frac{\bar{\boldsymbol{x}} - c}{s_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{n}$$

porovnáváme s kvantily **Studentova rozdělení** s $n-1$ stupni volnosti:

H_0	zamítáme pro	dosažená významnost
$\mu \le c$	$t > q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\alpha)$	$1 - F_{\mathrm{t}(n-1)}(t)$
$\mu \ge c$	$t < -q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\alpha)$	$F_{\mathrm{t}(n-1)}(t)$
$\mu = c$	$\lvert t\rvert > q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$	$2\min\left(F_{\mathrm{t}(n-1)}(t), 1 - F_{\mathrm{t}(n-1)}(t)\right)$

2.2 Testy rozptylu normálního rozdělení

$$t = \frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{c}$$

porovnáváme s kvantily χ^2**-rozdělení** s $n-1$ stupni volnosti:

H_0	zamítáme pro	dosažená významnost
$\sigma^2 \le c$	$t > q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)$	$1 - F_{\chi^2(n-1)}(t)$
$\sigma^2 \ge c$	$t < q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)$	$F_{\chi^2(n-1)}(t)$
$\sigma^2 = c$	$t < q_{\chi^2(n-1)}(\frac{\alpha}{2})$ nebo $t > q_{\chi^2(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$	$2\min\left(F_{\chi^2(n-1)}(t), 1 - F_{\chi^2(n-1)}(t)\right)$

2.3 Porovnání dvou normálních rozdělení

Předpoklad: Nezávislé výběry

$$(X_1, \dots, X_m) \text{ z rozdělení } \mathrm{N}(\mathrm{E}X, \mathrm{D}X),$$
$$(Y_1, \dots, Y_n) \text{ z rozdělení } \mathrm{N}(\mathrm{E}Y, \mathrm{D}Y).$$

2.3.1 Testy rozptylů dvou normálních rozdělení (Fisherův)

$$t = \frac{s_{\boldsymbol{x}}^2}{s_{\boldsymbol{y}}^2}$$

testujeme na $\mathrm{F}(m-1, n-1)$:

H_0	zamítáme pro	dosažená významnost
$\mathrm{DX} \le \mathrm{DY}$	$t > q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(1-\alpha)$	$1 - F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t)$
$\mathrm{DX} \ge \mathrm{DY}$	$t < q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(\alpha)$	$F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t)$
$\mathrm{DX} = \mathrm{DY}$	$t < q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(\frac{\alpha}{2})$ nebo $t > q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$	$2\min(F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t), 1 - F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t))$

2.3.2 Testy středních hodnot dvou normálních rozdělení se známým rozptylem σ^2

$$t := \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_m - \bar{\boldsymbol{y}}_n}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

testujeme na $\mathrm{N}(0,1)$.

2.3.3 Testy středních hodnot dvou normálních rozdělení se (stejným) neznámým rozptylem

$$s^2 := \frac{(m-1)\, s_X^2 + (n-1)\, s_Y^2}{m+n-2}$$

$$t := \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_m - \bar{\boldsymbol{y}}_n}{s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

testujeme na $\mathrm{t}(m+n-2)$.

2.4 Testy středních hodnot dvou normálních rozdělení – párový pokus

Předpoklad: Náhodné veličiny X_j, Y_j $(j = 1, \dots, n)$ mají normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu_j, \sigma^2)$ se stálým rozptylem σ^2 a proměnnými středními hodnotami $\mu_j = \mathrm{E}X_j = \mathrm{E}Y_j$.
Pak $\Delta_j := X_j - Y_j$ má rozdělení $\mathrm{N}(0, 2\sigma^2)$, $\bar{\boldsymbol{\Delta}}$ má $\mathrm{N}\left(0, \frac{2\sigma^2}{n}\right)$.

2.4.1 Pro známý rozptyl σ^2

$$t := \frac{\bar{\boldsymbol{\delta}}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

testujeme na $\mathrm{N}(0, 1)$.

2.4.2 Pro neznámý rozptyl

$$t := \frac{\bar{\boldsymbol{\delta}}}{s_\delta}\sqrt{n}$$

testujeme na $\mathrm{t}(n-1)$.

2.5 Test nekorelovanosti dvou normálních rozdělení

$$r_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \bar{\boldsymbol{x}})\,(y_j - \bar{\boldsymbol{y}})}{\sqrt{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \bar{\boldsymbol{x}})^2\right)\,\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(y_j - \bar{\boldsymbol{y}})^2\right)}} = \frac{n\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\,y_j - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\,\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right)}{\sqrt{\left(n\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2\right)\,\left(n\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right)^2\right)}}$$

$$t = \frac{r_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^2}}$$

testujeme na $\mathrm{t}(n-2)$.