Answer Key for Exam $\boxed{\text{A}}$

1. Při N hodech mincí padl k-krát orel. Jaký je odhad pravděpodobnosti, že v jednom hodu padne orel, dle principu maximální věrohodnosti? Uveďte postup!

   Answer: Označme θ hledanou pravděpodobnost. Pak můžeme věrohodnostní funkci vyjádřit následovně

$$L(\theta) = \theta^k(1-\theta)^{n-k} \Rightarrow \ell(\theta) = k\ln(\theta) + (n-k)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{k}{\theta} - \frac{n-k}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{k}{n}$$

2. Opakovaná měření stejné koncentrace látky vedla k následujícím výsledkům:
   $(0.2, 0.23, 0.21, 0.16, 0.18, 0.19, 0.14, 0.18, 0.21)$.
   Najděte symetrický oboustranný 90%-ní odhad střední hodnoty

   Answer: Odhadujeme parametry náhodné veličiny X z realizace rozsahu $n = 9$, jejíž statistiky jsou realizace výběrového průměru $\overline{x} \doteq 0.189$, realizace výběrového rozptylu $s_x^2 \doteq 7.6 \cdot 10^{-4}$, realizace směrodatné odchylky $s_x \doteq 2.76 \cdot 10^{-2}$. Intervalový odhad střední hodnoty

$$\left\langle \hat{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(0.95),\ \hat{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(0.95) \right\rangle$$

$$\doteq \langle 0.172,\ 0.206 \rangle$$

3. Hustota pravděpodobnosti pro náhodné veličiny X a Y je dána vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(2x+y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

   Určete regresní přímku pro závislost Y na X.

   Answer:

$$f_1(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} \tag{2}$$

$$E(Y|X) = \int_0^1 y f(x,y)/f_1(x) dy = \frac{2}{3}\frac{3x+1}{4x+1} \tag{3}$$

Answer Key for Exam $\boxed{\mathsf{B}}$

1. Opakovaná měření stejné koncentrace látky vedla k následujícím výsledkům: $(0.2, 0.23, 0.21, 0.16, 0.18, 0.19, 0.14, 0.18, 0.21)$.
   Najděte symetrický oboustranný 90%-ní odhad rozptylu

   Answer: Odhadujeme parametry náhodné veličiny X z realizace rozsahu $n = 9$, jejíž statistiky jsou realizace výběrového průměru $\overline{x} \doteq 0.189$, realizace výběrového rozptylu $s_x^2 \doteq 7.6 \cdot 10^{-4}$, realizace směrodatné odchylky $s_x \doteq 2.76 \cdot 10^{-2}$. Intervalový odhad rozptylu

$$\left\langle \frac{(n-1)s_x^2}{q_{\chi^2(n-1)}(0.95)}, \frac{(n-1)s_x^2}{q_{\chi^2(n-1)}(0.05)} \right\rangle$$

$$\doteq \left\langle 3.9 \cdot 10^{-4},\ 2.2 \cdot 10^{-3} \right\rangle$$

2. Náhodná veličina může nabývat hodnot $0, 1, 2$. Její rozdělení, závislé na parametrech p, q a četnost hodnot v realizaci uvádí tabulka. Odhadněte parametry p, q.

hodnota	0	1	2
teoretická pravděpodobnost	p	q	q^2
pozorovaná četnost	2	12	6

   Answer: Odhadujeme jen jeden parametr, protože $p = 1 - q - q^2$.

$$\ell(q) = 2\ln p + 12\ln q + 6\ln q^2 = 2\ln(1 - q - q^2) + 24\ln q$$

$$\frac{\partial \ell(q)}{\partial q} = \frac{24}{q} + 2\frac{-2q-1}{1-q^2-q} \Rightarrow q_1 = -\frac{3}{2}, \quad q_2 = \frac{4}{7}$$

   q_1 nevyhovuje zadání, q_2 vyhovuje.

3. Hustota pravděpodobnosti pro náhodné veličiny X a Y je dána vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(2x+y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

   Určete podmíněnou střední hodnotu Y na $f(y|x)$.

   Answer:

$$f_1(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} \tag{2}$$

$$E(Y|X) = \int_0^1 y f(x,y)/f_1(x) dy = \frac{2}{3}\frac{3x+1}{4x+1} \tag{3}$$

Answer Key for Exam $\boxed{\mathsf{C}}$

1. Náhodná veličina nabývá výsledky $1, 2, 3$. Tabulka udává jejich pravděpodobnosti a pozorované četnosti. Odhadněte parametry a, b.

hodnota	1	2	3
teoretická pravděpodobnost	$a+b$	$a+2b$	$a+3b$
četnost	10	10	20

Answer: Odhadujeme pouze jeden parametr, protože $3a+6b=1, \quad \Rightarrow a = \frac{1}{3} + 2b$.

$$\ell(b) = 10\ln(a+b) + 10\ln(a+2b) + 20\ln(a+3b) = 10\ln(\frac{1}{3} - b) + 10\ln\frac{1}{3} + 20\ln(\frac{1}{3} + b)$$

$$\frac{\partial \ell(b)}{\partial b} = -\frac{10}{\frac{1}{3} - b} + \frac{20}{\frac{1}{3} + b} = 0, \quad \Rightarrow b = \frac{1}{9},\ a = \frac{1}{9}$$

2. Opakovaná měření stejné koncentrace látky vedla k následujícím výsledkům: $(0.2, 0.23, 0.21, 0.16, 0.18, 0.19, 0.14, 0.18, 0.21)$.
Najděte symetrický oboustranný 90%-ní odhad směrodatné odchylky

Answer: Odhadujeme parametry náhodné veličiny X z realizace rozsahu $n = 9$, jejíž statistiky jsou realizace výběrového průměru $\overline{x} \doteq 0.189$, realizace výběrového rozptylu $s_x^2 \doteq 7.6 \cdot 10^{-4}$, realizace směrodatné odchylky $s_x \doteq 2.76 \cdot 10^{-2}$. Intervalový odhad směrodatné odchylky

$$\left\langle \sqrt{\frac{(n-1)s_x^2}{q_{\chi^2(n-1)}(0.95)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s_x^2}{q_{\chi^2(n-1)}(0.05)}} \right\rangle$$

$$\doteq \left\langle 1.97 \cdot 10^{-2},\ 4.7 \cdot 10^{-2} \right\rangle$$

3. Hustota pravděpodobnosti pro náhodné veličiny X a Y je dána vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(2x+y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

Určete regresní přímku pro závislost X na Y.

Answer:

$$f_1(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \frac{3}{5}y + \frac{3}{5} \tag{2}$$

$$y = E(X|Y) = \int_0^1 x f(x,y)/f_1(y) dx = \frac{1}{6}\frac{3y+4}{y+1} \tag{3}$$

Answer Key for Exam $\boxed{\text{D}}$

1. Roční spotřeba teplé vody měřená ve 100 dvoučlenných domácnostech je průměrně 30 m^2. Výběrový rozptyl byl spočten na $64\mathrm{m}^2$. Spočtěte na hladině významnosti 0.95 oboustranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu spotřeby teplé vody.

   Answer: Intervalový odhad střední hodnoty

$$\left\langle \hat{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(0.95),\ \hat{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(0.95) \right\rangle$$

$$\doteq \langle 28.41,\ 31.58 \rangle$$

2. Předpokládáme, že náhodná veličina X má posunuté exponenciální rozdělení s hustotou

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}\exp(-\frac{t-T}{\tau}), & \text{pro } t \geq T, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

   kde $\tau > 0$. Z realizace $x = (2, 3, 8, 4, 10, 3, 5)$ odhadněte parametry T, τ.

   Answer: Logaritmovaná věrohodnostní funkce

$$\ell(T,\tau) = \ln\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau}\exp(-\frac{x_i - T}{\tau})\Big) = -n \ln\ln\tau - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\tau} nT,$$

   pokud $T \leq \min_i x_i$ (jinak 0). To je rostoucí funkce, takže $\hat{T} = \min_i x_i$.

$$\frac{\partial \ell(T,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{n}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\tau^2} nT, \quad \Rightarrow \hat{\tau} = \overline{x} - \hat{T} = \overline{x} - \min_i x_i.$$

$$\hat{T} = 2, \quad \hat{\tau} = 5 - 2 = 3$$

3. Hustota pravděpodobnosti pro náhodné veličiny X a Y je dána vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(2x+y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

   Určete podmíněnou střední hodnotu X na $f(x|y)$.

   Answer:

$$f_1(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \frac{3}{5}y + \frac{3}{5} \tag{2}$$

$$E(X|Y) = \int_0^1 x f(x,y)/f_1(y) dx = \frac{1}{6}\frac{3y+4}{y+1} \tag{3}$$

Answer Key for Exam $\boxed{\text{E}}$

1. Náhodná procházka s absorpčními bariérami ve stavech $1, 5$ začíná ve stavu 3. Pokud stav i není absorpční, krok do stavu $i-1$ má pravděpodobnost q, do stavu $i+1$ pravděpodobnost $1-q$. Šestý krok byl ze stavu 2 do stavu 1. Odhadněte pravděpodobnost q metodou maximální věrohodnosti.

   Answer: Museli jsme udělat 4 kroky směrem k menším hodnotám a 2 k větším (celkem existují 4 možnosti jak cesta mohla vypadat). Věrohodnost je

$$L(q) = 4q^4(1-q)^2, \quad \Rightarrow \ell(q) = \ln 4 + 4\ln q + 2\ln(1-q)$$

$$\frac{\partial \ell(q)}{\partial q} = \frac{4}{q} - \frac{2}{1-q} = 0, \quad \Rightarrow \hat{q}_{MLE} = \frac{2}{3}$$

2. Hustota pravděpodobnosti pro náhodné veličiny X a Y je dána vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(2x+y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

   Určete střední hodnotu a rozptyl X.

   Answer:

$$EX = \int_0^1 \int_0^1 x f(x,y) dx dy = \frac{11}{20} \tag{2}$$

$$DX = \int_0^1 \int_0^1 x^2 f(x,y) dx dy - (EX)^2 = \frac{2}{5} - \frac{121}{400} = \frac{39}{400} \tag{3}$$

3. Deset balíčků mouky pocházejících z balícího stroje mělo hmotnosti v gramech $(985, 1001, 993, 994, 993, 1005, 1007, 999, 995, 1002)$. Sestrojte oboustranný 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu hmotnosti.

   Answer: Odhadujeme parametry náhodné veličiny X z realizace rozsahu $n = 10$, jejíž statistiky jsou realizace výběrového průměru $\overline{x} \doteq 997.6$, realizace výběrového rozptylu $s_x^2 \doteq 38.93$, realizace směrodatné odchylky $s_x \doteq 6.2394$. Intervalový odhad střední hodnoty

$$\left\langle \hat{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(0.95),\ \hat{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(0.95) \right\rangle$$

$$\doteq \langle 993.14,\ 1002.06 \rangle$$

Answer Key for Exam $\boxed{\mathsf{F}}$

1. Deset balíčků mouky pocházejících z balícího stroje mělo hmotnosti v gramech $(985, 1001, 993, 994, 993, 1005, 1007, 999, 995, 1002)$. Sestrojte oboustranný 95% interval spolehlivosti pro rozptyl hmotnosti.

   Answer: Odhadujeme parametry náhodné veličiny X z realizace rozsahu $n = 10$, jejíž statistiky jsou realizace výběrového průměru $\overline{x} \doteq 997.6$, realizace výběrového rozptylu $s_x^2 \doteq 38.93$, realizace směrodatné odchylky $s_x \doteq 6.2394$. Intervalový odhad rozptylu

$$\left\langle \frac{(n-1)s_x^2}{q_{\chi^2(n-1)}(0.95)},\ \frac{(n-1)s_x^2}{q_{\chi^2(n-1)}(0.05)} \right\rangle$$

$$\doteq \langle 18.42,\ 129.70 \rangle$$

2. V pojišťovně naměřili doby mezi dvěma hlášenými událostmi postupně rovny $1.5, 2.3, 0.8, 1.2, 3.1$ a 1.1 dne. Předpokládáme, že tato data pocházejí s exponenciálního rozdělení ($p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$). Metodou maximální věrohodnosti spočítejte odhad parametru λ. Uveďte postup!

   Answer: Odvodíme MLE odhad parametru λ obecně.

$$\ell(\lambda) = n \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} -\lambda t_i, \quad \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

   Dosadíme hodnoty ze zadání a zjistíme, že $\hat{\lambda} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$.

3. Hustota pravděpodobnosti pro náhodné veličiny X a Y je dána vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(2x+y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

   Určete střední hodnotu a rozptyl Y.

   Answer:

$$EY = \int_0^1 \int_0^1 y f(x,y) dx dy = \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$DY = \int_0^1 \int_0^1 y^2 f(x,y) dx dy - (EY)^2 = \frac{7}{20} - \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \tag{3}$$