

A6M33SSL: Statistika a spolehlivost v lékařství

Teorie spolehlivosti

Vojta Vonásek
vonasek@labe.felk.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky

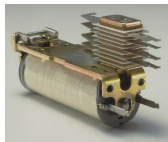
Vícetavové prvky

- Prvky/soustavy mohou mít obecně více typů poruch
- Např. zářivka:
 - svítí (bezporuchový stav)
 - svítí ale se změnou barevnou teplotou
 - svítí a občas blikne
 - svítí a "bzučí", ...



Tří-stavové prvky:

- Dva typy poruch:
 - porucha "přerušením" ("open mode failure")
 - porucha "zkratem" ("close mode failure")
- Vhodné pro diody, tranzistory, ventily, relé obvody
- Three Miles Island: porucha ventilu v "otevřeném" stavu
- **Přidání redundantních prvků může snížit nebo i zvýšit spolehlivost soustavy**



Tří-stavové prvky

- Tři stavy: x (funguje), x_z (zkrat), x_p (přerušení)
- $q_z = P(x_z)$ je pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "zkrat"
- $q_p = P(x_p)$ je pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "přerušení"
- Q_z = pravděpodobnost, že je celá soustava "ve zkratu"
- Q_p = pravděpodobnost, že je celá soustava "přerušená"



funguje



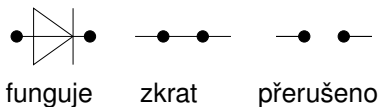
zkrat



přerušeno

Tří-stavové prvky

- Tři stavy: x (funguje), x_z (zkrat), x_p (přerušeni)
- $q_z = P(x_z)$ je pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "zkrat"
- $q_p = P(x_p)$ je pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "přerušeni"
- Q_z = pravděpodobnost, že je celá soustava "ve zkratu"
- Q_p = pravděpodobnost, že je celá soustava "přerušená"



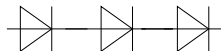
Sériové zapojení

$$Q_z = q_{1z} \cdot q_{2z} \cdot \dots \cdot q_{nz}$$

$$Q_p = 1 - (1 - q_{1p})(1 - q_{2p}) \cdot \dots \cdot (1 - q_{np})$$

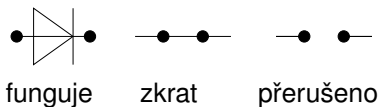
$$R = 1 - Q_z - Q_p$$

$$R = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} r^i q_z^{n-i}$$



Tří-stavové prvky

- Tři stavy: x (funguje), x_z (zkrat), x_p (přerušení)
- $q_z = P(x_z)$ je pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "zkrat"
- $q_p = P(x_p)$ je pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "přerušení"
- Q_z = pravděpodobnost, že je celá soustava "ve zkratu"
- Q_p = pravděpodobnost, že je celá soustava "přerušená"



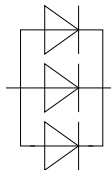
Paralelní zapojení

$$Q_z = 1 - (1 - q_{1z})(1 - q_{2z}) \cdots (1 - q_{nz})$$

$$Q_p = q_{1p} \cdot q_{2p} \cdots q_{np}$$

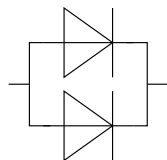
$$R = 1 - Q_z - Q_p$$

$$R = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} r^i q_p^{n-i}$$



Tří-stavové prvky: příklad

- Pravděpodobnost zkratu: $q_z = 0.6$
- Pravděpodobnost přerušení: $q_p = 0.2$
- Určete R , Q_z a Q_p soustavy.



Pravděpodobnost bezporuchového stavu samotné diody je

$$R_d = 1 - q_z - q_p = 1 - 0.6 - 0.2 = 0.2.$$

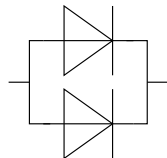
$$Q_z = 1 - (1 - q_z)^2 = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.84$$

$$Q_p = q_p^2 = 0.2^2 = 0.04$$

$$R = 1 - Q_z - Q_p = 1 - 0.84 - 0.04 = 0.12$$

Tří-stavové prvky: příklad

- Pravděpodobnost zkratu: $q_z = 0.6$
- Pravděpodobnost přerušení: $q_p = 0.2$
- Určete R , Q_z a Q_p soustavy.



Pravděpodobnost bezporuchového stavu samotné diody je

$$R_d = 1 - q_z - q_p = 1 - 0.6 - 0.2 = 0.2.$$

$$Q_z = 1 - (1 - q_z)^2 = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.84$$

$$Q_p = q_p^2 = 0.2^2 = 0.04$$

$$R = 1 - Q_z - Q_p = 1 - 0.84 - 0.04 = 0.12$$

Přidáním dalšího prvku paralelně došlo ke zhoršení spolehlivosti!

Tří-stavové prvky

- Přidáním prvků v sérii zvyšujeme pravděpodobnost přerušení
- Přidáním prvků paralelně zvyšujeme pravděpodobnost zkratu
- Jak zvolit počet prvků, aby byla pravděpodobnost bezporuchového provozu maximální?

Sériové zapojení

$$n_0 = \frac{\log\left(\frac{q_p}{1-q_z}\right)}{\log\left(\frac{q_z}{1-q_p}\right)}$$

Paralelní zapojení

$$n_0 = \frac{\log\left(\frac{q_z}{1-q_p}\right)}{\log\left(\frac{q_p}{1-q_z}\right)}$$

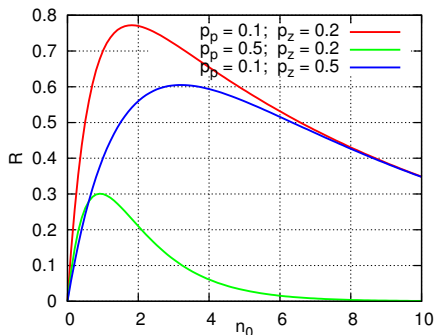
$$n = \begin{cases} \lfloor n_0 \rfloor + 1 & \text{když } n_0 \text{ není celé číslo} \\ n_0 \text{ nebo } n_0 + 1 & \text{pokud } n_0 \text{ je celé číslo} \end{cases}$$

Tří-stavové prvky

Příklad: Relé má pravděpodobnost přerušení $q_p = 0.1$ a zkratu $q_z = 0.2$. Kolik těchto prvků je třeba zapojit sériově, aby byla maximalizována R ?

$$n_0 = \frac{\log\left(\frac{q_p}{1-q_z}\right)}{\log\left(\frac{q_z}{1-q_p}\right)} = \frac{\log\left(\frac{0.1}{1-0.2}\right)}{\log\left(\frac{0.2}{1-0.1}\right)} = 1.38$$

Optimální počet prvků je $n = \lfloor n_0 \rfloor + 1 = 2$.



Tří-stavové obvody: příklad



q_z	q_p	Sériové			Paralelní		
		Q_z	Q_p	R	Q_z	Q_p	R
0.6	0.2	0.36	0.36	0.28	0.84	0.04	0.12
0.2	0.2	0.04	0.36	0.6	0.36	0.04	0.6
0.1	0.2	0.01	0.36	0.63	0.19	0.04	0.77

- Porucha zkratem nevádí v sériovém zapojení
- Porucha přerušením nevádí v paralelním zapojení

Tří-stavové obvody: příklad



q_z	q_p	Sériové			Paralelní		
		Q_z	Q_p	R	Q_z	Q_p	R
0.6	0.2	0.36	0.36	0.28	0.84	0.04	0.12
0.2	0.2	0.04	0.36	0.6	0.36	0.04	0.6
0.1	0.2	0.01	0.36	0.63	0.19	0.04	0.77

- Porucha zkratem nevadí v sériovém zapojení
- Porucha přerušením nevadí v paralelním zapojení
- Pokud převažují poruchy typu "zkrat", je lepší sériové zapojení
- Pokud převažuje porucha "přerušením", je lepší paralelní zapojení

Zvýšení spolehlivosti systémů

- Vstupem je požadovaná míra spolehlivosti po určenou dobu
- Volba lepších materiálů, technologie výroby, konstrukce . . .
- Použití prvků s vyšší spolehlivostí
- Volba zapojení komponent
- Zálohování (zvýšení redundance)
 - Stálé
 - Majoritní
 - S přepínáním

Nelze dosáhnout absolutní spolehlivosti systému.

Stálé zálohování prvků

- Prvky v záloze jsou trvale zapnuty
- Náklady na běžící zálohu

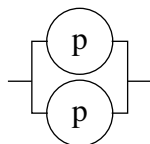
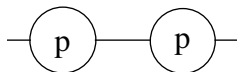
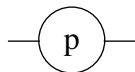
Záloha v sérii

- Vhodná při častých poruchách typu "zkrat"
- Např. spínací obvody

Paralelní záloha

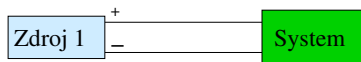
- Vhodná při častých poruchách typu "přerušení"
- Vhodné pro systémy, kdy lze připustit současný běh záloh (např. datové zálohy, poč. sítě)
- Nevhodné např. pro regulační obvody
- Někdy je nutné doplnit zálohovaný systém o další člen umožňující paralelní běh záloh

Výchozí prvek



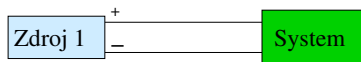
Stálé zálohování soustav

- Výchozí systém

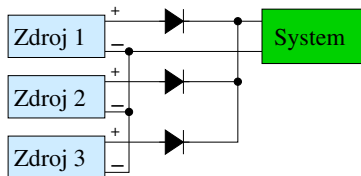


Stálé zálohování soustav

- Výchozí systém

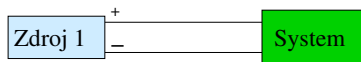


- Paralelní záloha napájení

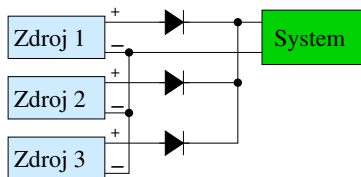


Stálé zálohování soustav

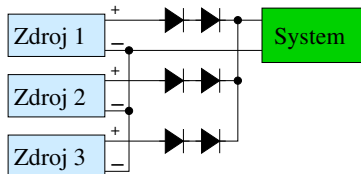
- Výchozí systém



- Paralelní záloha napájení

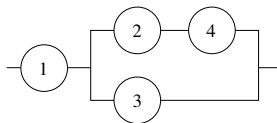


- Zvýšení odolnosti vůči poruchám diod



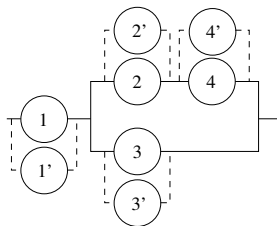
Stálé zálohování soustav

Výchozí systém



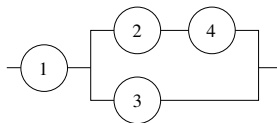
Zálohování jednotlivých prvků

- Každý prvek je zálohován samostatně



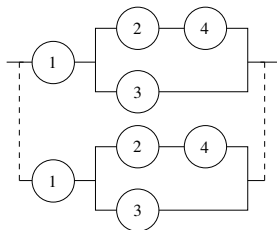
Stálé zálohování soustav

Výchozí systém



Zálohování soustav

- Soustava se zálohuje jako celek



Zálohování prvků nebo soustavy

Je lepší zálohování "po prvcích" nebo "celé soustavy" (uvažujme stejné dvoustavové prvky)?

Původní systém: $R = p^2$

Záloha celé soustavy:

$$R_s = 1 - (1 - p^2)^2 = 2p^2 - p^4$$

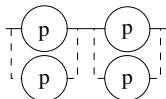
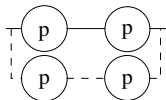
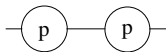
Záloha po prvcích:

$$R_p = (2p - p^2)^2 = 4p^2 - 4p^3 + p^4$$

Porovnáním R_p a R_s , např:

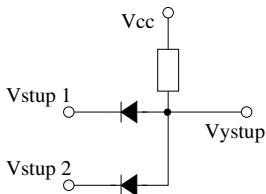
$$R_p - R_s = 2(p - 2p)^2$$

zjistíme, že záloha po prvcích je v tomto případě lepší. Toto lze zobecnit na n dvoustavových stejných prvků, **obecně to ale neplatí!**



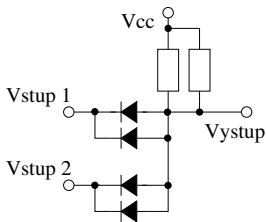
Příklad paralelního zálohování

- Obvod realizuje operaci AND
- Možné poruchy: diody, rezistory
- Záloha použita např. v NASA Orbiting Astronomical Observatory



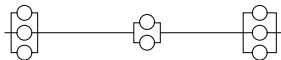
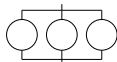
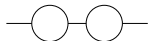
Příklad paralelního zálohování

- Obvod realizuje operaci AND
- Možné poruchy: diody, rezistory
- Záloha použita např. v NASA Orbiting Astronomical Observatory



Příklad paralelního zálohování

- Spojky lan
- Porucha spojky: spojení se přeruší
- Podobně u mostních konstrukcích



Zdroj: <http://www.pcworld.com/article/3071180>

Hard Drive Failure Stats through 3/31/2016

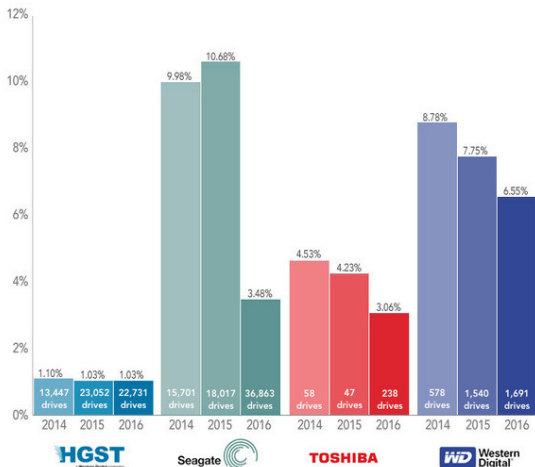
Cumulative from 4/2013 through period indicated

MFG	Model	Drive Size	3/31/2014 (1 year)		3/31/2015 (2 years)		03/31/2016 (3 years)	
			Drive Count	Annualized Failure Rate	Drive Count	Annualized Failure Rate	Drive Count	Annualized Failure Rate
HGST	HDS5C3030ALA630	3TB	4,591	0.85%	4,596	0.74%	4,552	0.81%
HGST	HDS5C4040ALE630	4TB	2,582	1.33%	2,653	1.16%	2,706	1.03%
HGST	HDS722020ALA330	2TB	4,713	1.08%	4,664	1.15%	4,264	1.57%
HGST	HDS723030ALA640	3TB	1,020	1.54%	1,013	1.83%	998	1.71%
HGST	HMS5C4040ALE640	4TB	47	2.67%	7,026	1.18%	7,075	0.79%
HGST	HMS5C4040BLE640	4TB	494	20.29%	3,100	0.48%	3,091	0.38%
HGST	HUH728080ALE600	8TB	—	—	—	—	45	3.84%
Seagate	ST3000DM001	3TB	4,074	13.92%	485	28.26%	—	—
Seagate	ST31500341AS	1.5TB	404	22.27%	259	24.12%	—	—
Seagate	ST31500541AS	1.5TB	1,746	9.87%	1,485	10.18%	45	10.12%
Seagate	ST32000542AS	2TB	211	8.03%	81	9.93%	—	—
Seagate	ST33000651AS	3TB	287	6.53%	234	5.27%	—	—
Seagate	ST4000DM000	4TB	8,800	3.83%	14,803	2.83%	34,729	2.90%
Seagate	ST4000DX000	4TB	179	0.75%	175	1.61%	207	2.95%
Seagate	ST6000DX000	6TB	—	—	495	1.70%	1,882	1.42%
Toshiba	DT01ACA300	3TB	58	4.63%	47	4.23%	47	4.22%
Toshiba	MD04ABA400V	4TB	—	—	—	—	146	2.21%
Toshiba	MD04ABA500V	5TB	—	—	—	—	45	2.05%
WD	WD3000FSTX	3TB	—	—	—	—	133	10.51%

Zdroj: <http://www.pcworld.com/article/3071180>

Hard Drive Failure Rates by Manufacturer

All drive sizes for a given Manufacturer are combined



Paralelní zálohování — RAID

RAID (Redundant Array of Independent Disks)

- Data se ukládají na více disků
- Časté použití na serverech
- Různé úrovně zabezpečení (zvýšení spolehlivosti)
- **Nenahrazuje zálohování!**



Paralelní zálohování — RAID

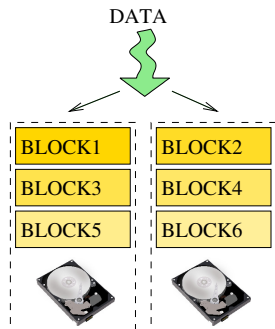
RAID 0

- Data se dělí rovnoměrně mezi disky
- Rychlejší čtení/zápis
- Data nelze obnovit při selhání jakéhokoliv disku
- Celková kapacita je součet kapacit jednotlivých disků
- Minimálně pro 2 HDD
- Použití: pro zvýšení rychlosti zápisu/čtení

Pravděpodobnost bezporuchového provozu:

$$R = p^n$$

pro n stejných disků, (sériové zapojení z hlediska spolehlivosti)



Paralelní zálohování — RAID

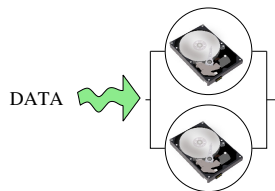
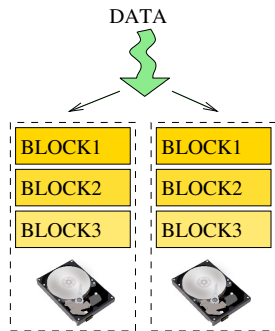
RAID 1

- Data se kopírují současně na všechny disky
- Rychlejší čtení (jakýkoliv disk může poskytnout data)
- Zápis je dán rychlostí HDD
- Data lze obnovit, pokud funguje alespoň 1 HDD
- Celková kapacita se nezvyšuje
- Minimálně pro 2 HDD

Pravděpodobnost bezporuchového provozu:

$$R = 1 - (1 - p)^n$$

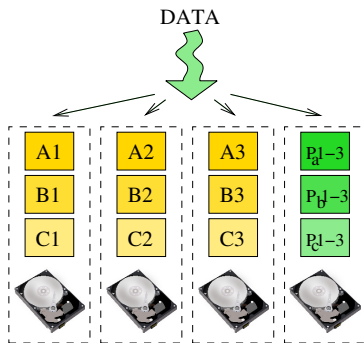
pro stejné disky, (paralelní zapojení z hlediska spolehlivosti)



Paralelní zálohování — RAID

RAID 3

- Data jsou rozdělena na disky, jeden disk obsahuje paritu
- Vhodné pro zápis dlouhých sekvencí (stream) dat
- Nevhodné pro obsluhu malých požadavků (malé soubory)
- Lze tolerovat chybu jednoho HDD
- Minimálně pro 3 HDD
- Kritická je porucha při obnovování dat



Pravděpodobnost bezporuchového provozu:

$$R = np^{n-1}(1 - p) + p^n$$

pro stejné disky, (systém "n-1"z "n")

Paralelní zálohování — RAID

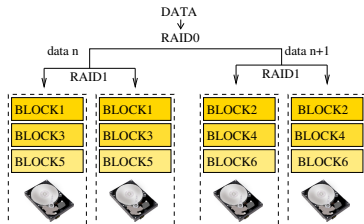
RAID 1+0

- Kombinace RAID 1 a RAID 0
- Data nejdříve dělena jako v RAID 0
- Data jsou dále organizována v RAID 1

Pravděpodobnost bezporuchového provozu:

$$R = (2p - p^2)^2$$

pro stejné disky

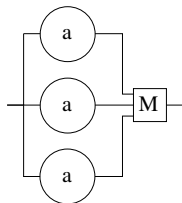


Paralelní zálohování — RAID

- Existuje mnoho úrovní RAID (0,1,2,3,4,5,6, kombinované)
- Volba podle požadavků na rychlost zápisu a čtení, počtu dostupných disků
- Vyžaduje speciální HW (řadiče)
- HDD se často nakupují "společně"
- Nejsou nezávislé, podléhají stejným vlivům (např. teplota)
- Admini preferují nákup různých disků

Zálohování majoritou

- n systémů běží současně
- Bere se ten výstup, který má majorita systémů
- n liché
- Vhodné pro digitální systémy
- Předpoklad: fungující majorizační člen
- Jen pro systémy, kde lze určit majoritu
- Typicky pro "digitální" systémy
- Zálohy běží → spotřeba, náklady, údržba



Použití:

- integrované obvody
- ECC paměti
- Výpočty ve vesmíru (např. na satelitech)
- Komunikace, např. protokol FlexRay (automobilový průmysl)
- První použití Maj. systémů v čs. počítači SAPO (1957–1960)

Zálohování majoritou

- Prvky fungují s pravděpodobností p
- Uvažujme soustavu s $n = 3$ prvky.
- Pro správnou funkčnost jsou třeba alespoň 2 prvky

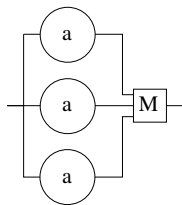
Pravděpodobnost, že funguje právě m prvků:

$$P_m = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

Spolehlivost majoritního zálohování:

$$R = \sum_{m=2}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} = P_2 + P_3$$

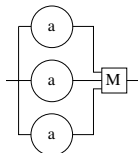
$$R = 3p^2(1-p) + p^3$$



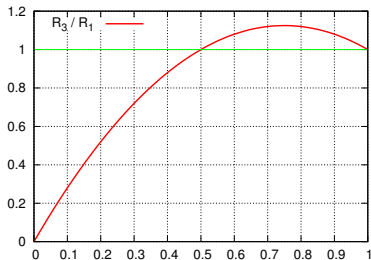
Spolehlivost majoritního zálohování

- Systém se třemi prvky
- Spolehlivost 1 prvku je p
- Alespoň 2 musí fungovat

$$R_3 = 3p^2(1 - p) + p^3$$



Porovnání spolehlivost oproti nezálohovanému prvku: R_3/p :

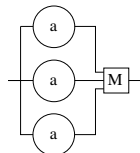


Poměr $R_3/p > 1$ pokud $p > 0.5$.

Spolehlivost majoritního zálohování

- Systém se třemi prvky
- Spolehlivost 1 prvku je p
- Alespoň 2 musí fungovat

$$R_3 = 3p^2(1 - p) + p^3$$



Majoritní zálohování zlepšuje spolehlivost pokud p každého prvku je $p > 0.5$.

Obecně volíme lichý počet členů, tj. $2n + 1$. Spolehlivost pak je:

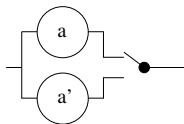
$$R = \sum_{m=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} p^m (1-p)^{2n+1-m}$$

Pokud uvažujeme poruchu majorizačního členu (jeho spolehlivost je R'):

$$R = R \cdot R'$$

Zálohování přepínáním

- Též záloha s okamžitou obnovou
- Při poruše prvku se přepne na prvek v záloze
- Předpokládáme, že prvek v záloze nestárne



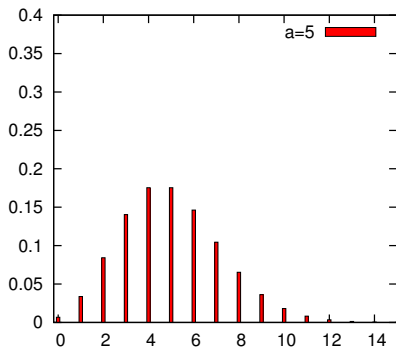
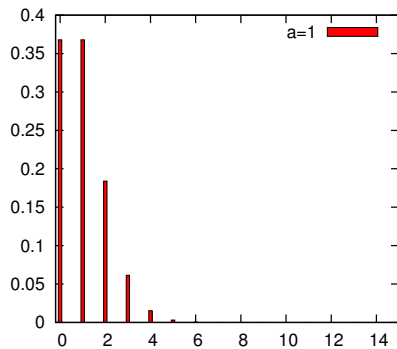
- Vyžaduje (včas) rozpoznat chybu
- Vyžaduje spolehlivý přepínač
- Prvek v záloze nemusí běžet (ale musí se rychle zapnout)
- Pravděpodobnost poruchy lze modelovat Poissonovým rozdělením

Poissonovo rozdělení

- Pro vyhodnocení pravděpodobnosti počtu jevů v určitém intervalu (intervaly času, délky, km, apod)
- Předpokládejme, že v jednom intervalu se průměrně děje a událostí

Pravděpodobnost výskytu x událostí je:

$$P(X = x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$



Poissonovo rozdělení

- Pro vyhodnocení pravděpodobnosti počtu jevů v určitém intervalu (intervaly času, délky, km, apod)
- Předpokládejme, že v jednom intervalu se průměrně děje a událostí

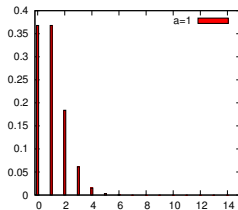
Pravděpodobnost výskytu x událostí je:

$$P(X = x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

Příklad: Ve serverovně se každý měsíc porouchá v průměru 1 HDD. Jaká je pravděpodobnost, že se porouchají tři disky?

$$a = 1$$

$$P(X = 3) = \frac{a^3}{3!} e^{-a} = 0.061$$



Poissonovo rozdělení

- Pro vyhodnocení pravděpodobnosti počtu jevů v určitém intervalu (intervaly času, délky, km, apod)
- Předpokládejme, že v jednom intervalu se průměrně děje a událostí

Pravděpodobnost výskytu x událostí je:

$$P(X = x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

Ve spolehlivosti $a = \lambda t$, kde λ je intenzita poruch

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

- intenzita poruch je konstantní $\lambda \rightarrow$ pouze pro normální období života prvku

Poissonovo rozdělení — příklad

- Průměrný počet poruch na tažném lanu je 0.05 za rok
- Vypočítejte pravděpodobnost 0, 1, 2, ... poruch během 20 let

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

Intenzita poruch je $\lambda = 0.05/\text{rok}$.

$$P_0(20) = \frac{(0.05 \cdot 20)^0}{0!} e^{-0.05 \cdot 20} = e^{-1} = 0.367$$

$$P_1(20) = \frac{(0.05 \cdot 20)^1}{1!} e^{-0.05 \cdot 20} = 0.367$$

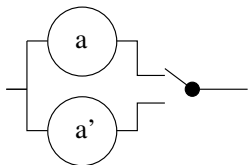
$$P_2(20) = \frac{(0.05 \cdot 20)^2}{2!} e^{-0.05 \cdot 20} = 0.183$$

$$P_3(20) = \frac{(0.05 \cdot 20)^3}{3!} e^{-0.05 \cdot 20} = 0.061$$

Zálohování přepínáním

Předpoklady

- Poruchy prvků v záloze nejsou závislé na běžícím prvku
- Prvky jsou stejné a mají konstantní intenzitu poruch λ
- Přepínací (a měřící) prvek je 100% spolehlivý



System se dvěma prvky (tj. jeden je v záloze) je funkční, pokud nastane max. 1 porucha:

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \quad P_1(t) = \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t}$$

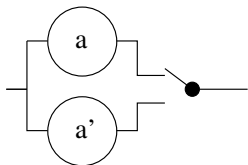
Pravděpodobnost, že tento systém běží je:

$$R(t) = P_0(t) + P_1(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

Zálohování přepínáním

Předpoklady

- Poruchy prvků v záloze nejsou závislé na běžícím prvku
- Prvky jsou stejné a mají konstantní intenzitu poruch λ
- Přepínací (a měřící) prvek je 100% spolehlivý



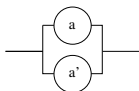
Obecně Systém s n prvky v záloze může vykázat max. n poruch

$$R(t) = \sum_{x=0}^n P_x(t) = \sum_{x=0}^n \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

$$T_s = \sum_{i=1}^{n+1} MTBF_i$$

Porovnání paralelní zálohy a zálohy s přepínáním

Paralelní záloha

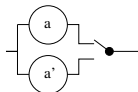


- Záložní prvky trvale v provozu (stárnou)
- Výstupy záloh se nesmí rušit
- Záloha je okamžitá
- Není třeba detekovat poruchu

$$R(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$$

$$T_s = \frac{3}{2\lambda}$$

Záloha s přepínáním



- Prvek v záloze je vypnut (nestárne)
- Přepínání není nekonečně krátké
- Přepínání může selhat

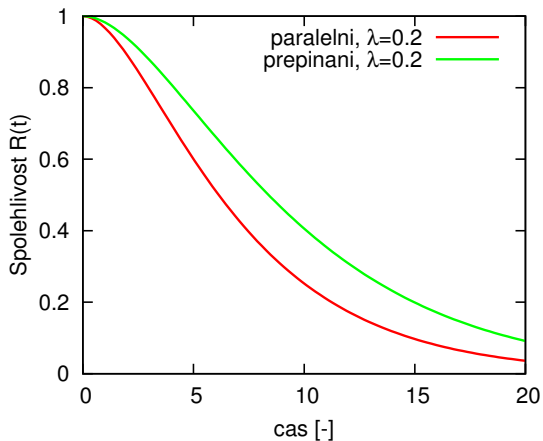
$$R(t) = e^{\lambda t}(1 + \lambda t)$$

$$T_s = \frac{2}{\lambda}$$

Paralelní zálohování je horší než záloha s přepínáním

Porovnání paralelní zálohy a zálohy s přepínáním

Pro $n = 2$ prvky, $\lambda = 0.2$



Porovnání paralelní zálohy a zálohy s přepínáním

Pro n prvků, $\lambda = 0.2$

