<u>Teorie obnovy</u>

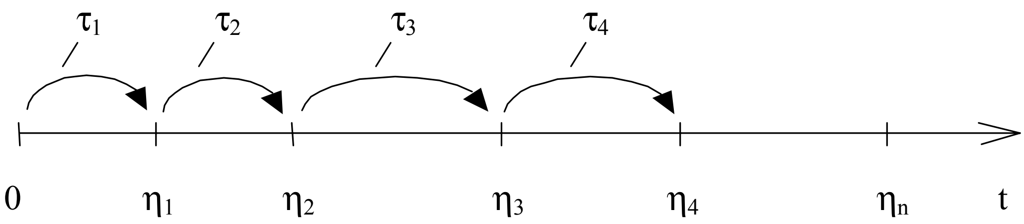
- <u>Dosud</u>: prvek pracuje <u>jen</u> do okamžiku poruchy
- Obvykle se porouchaný prvek opravuje $\Rightarrow$ <u>proces obnovy</u>

  posloupnost bezporuchových stavů & stavů poruchy náhodného procesu

1. <u>Proces s okamžitou obnovou</u>:

- Doba obnovy $\rightarrow 0$ (~ provoz soustavy nebo prvku s přepínáním a nekonečným počtem záloh)
- Nechť porucha: η

  doba bezporuchového provozu: τ



$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$$

- Doba provozu pro n-1 obnov je rovna době n-té poruchy
- Jsou-li prvky soustavy po výměně shodné, platí distr. funkce:

$$F_n(t) = P(\eta_n \leq t) = \int F_{n-1}(t-\tau)dF(\tau)$$

kde: $F_1(t) = F(t)$ je distr. funkce poruchy jednoho prvku derivováním:

hustota: $f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$

kde: $f_1(t) = f(t)$ je hustota pravděp. poruchy jednoho prvku.

Nechť prvky s konst. <u>***???***</u> intenzitou poruch $\lambda(t)=\lambda$ potom $f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$ (Poissonův proces) a vypočteme předchozí (jednodušší v L-transformaci) hustoty pravděp. doby provozu <u>pro 1,2,…,n</u> obnov:

$$f_1(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$$
$$f_2(t) = \lambda^2 \cdot t \cdot \exp(-\lambda t)$$

.

$$f_n(t) = \frac{\lambda.(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \exp(-\lambda t)$$ …Erlaugovo rozdělení doby provozu

- Z předchozí rovnice je obvykle třeba určit:
    1. pravděp. , s jakou nastane n-tá obnova před časem *t*
    2. s jakou pravděp. nastane do doby *t* určený počet obnov

Tedy: nechť N(t) je počet obnov do doby t

platí: $N(t) < n \Leftrightarrow \eta_n > t \Rightarrow P[N(t) < n] = P(\eta_n > t)$

také: $P(\eta_n > t) = 1 - P(\eta_n \le t) = 1 - F_n(t)$ integrací hustoty

$$P[N(t) < n] = 1 - F_n(t)$$

hledámé však: $P[N(t) = n]$ pro což platí:

$$P[N(t) = n] = P[N(t) < n+1] - P[N(t) < n] = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

dosazením z rovnice $f_n(t)$ – Erlangova rozdělení a integrací dostáváme:

$$P[N(t) = n] = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda t) dt - \int_0^t \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{n!} \exp(-\lambda t) dt$$

distr. funkce:

$$F_n(t) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{n!} \exp(-\lambda t) dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

dosazením 2. rovnice do 1. Dostáváme:

$$P[N(t) = n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t)$$

- Počet obnov má Poissonovo rozdělení
- Střední počet obnov (zde současně střední počet poruch) jež nastaly do doby t je funkce obnovy H(t)

$$H(t) = E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n.P[N(t) = n]$$

střední hodnota

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n[F_n(t) - F_{n-1}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

Též platí:

$$H(t) = F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t F_n(t-\tau) dF(\tau)$$

nebo: $H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-\tau) dF(\tau)$

nebo: $H(t) = \int_0^t 1 + H(t-\tau) dF(\tau)$

- Střední počet poruch v intervalu (t_1,t_2) je $H(t_1)$- $H(t_2)$
- Odpovídající funkce obnovy v čase $H(t)=\lambda t$
- V Poissonově procesu roste počet obnov lineárně s časem

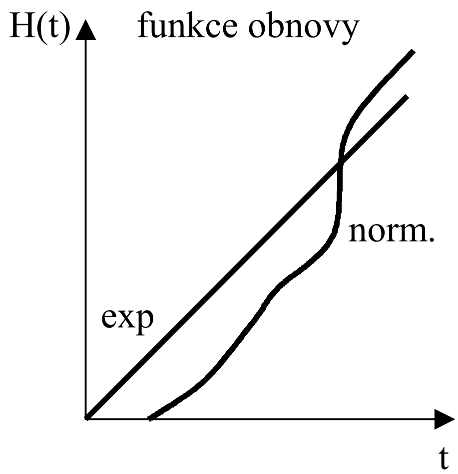
hustota obnovy: $h(t)=\frac{dH(t)}{dt}$

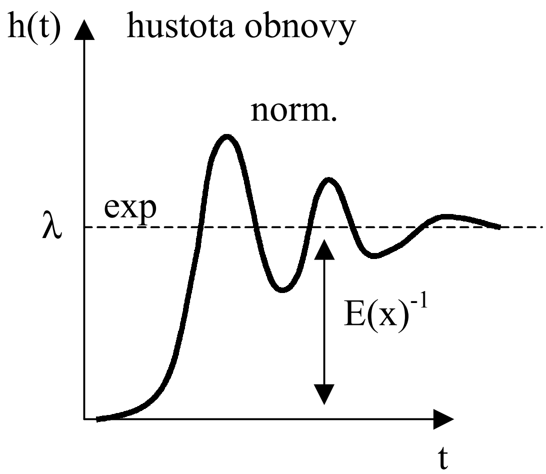
počet poruch v jednom ($\rightarrow 0$) časovém intervalu $\Rightarrow h(t)dt \sim$ pravděp. že dostaneme $(t, t+\Delta t)$

derivováním výrazů pro H(t):

$$h(t)=f(t)+\int h(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

nebo: $h(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ $\qquad f_n(t)\ldots$n-násobná konvoluce hustoty pravděp.

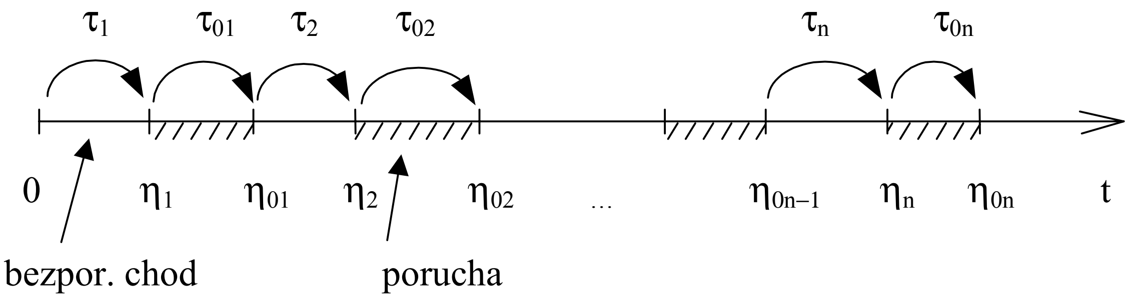




Procesy s konečnou dobou obnovy

- doba obnovy prvků bez zálohy je srovnatelná s dobou bezporuchového provozu

průběh procesu:



okamžik n-té poruchy:

$$\eta_n = \tau_1 + \tau_{01} + \tau_2 + \tau_{02} + ... + \tau_n$$

okamžik skončení n-té poruchy:

$$\eta_{0n} = \tau_1 + \tau_{01} + \tau_2 + \tau_{02} + ... + \tau_n + \tau_{0n}$$

celková doba bezpor. provozu:

$$T_p = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_n$$

celková doba obnovy:

$$T_0 = \tau_{01} + \tau_{02} + ... + \tau_{0n}$$

- Z předchozích rovnic lze vyjádřit:

konec n-té poruchy: $\eta_{0n} = T_p + T_0$

+dále předpoklad, že „bezpor. provoz“ a „obnova“ mají shodné zákony s diskr. Funkcemi F(t) a Q(t)

potom funkce obnovy: $H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}(t)$ střední počet obnov v (0,t)

kde $F_{0n}(t) = P(\eta_{0n} \le t)$

$$F_{0n}(t) = \int_0^t F_n(t-\tau)\,dG_n(\tau)$$

poruchy + obnovy =distr. funkce

poruchy: $F_n(t) = P(T_p \le t) = \int F_{n-1}(t-\tau)\,dF(\tau)$

obnova: $G_n(t) = P(T_0 \le t) = \int F_{n-1}(t-\tau)\,dG(\tau)$

$$F_1(t) = F(t)$$
$$G_1(t) = G(t)$$

hustota obnov: $h(t) = \frac{dH(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{0n}(t)$; kde $f_{0n}(t) = \frac{dF_{0n}(t)}{dt}$

kuchařka: pro exp. rozdělení poruch a obnov

$$\lambda(t) = \lambda;\ f(t) = \lambda.\exp(-\lambda t)$$
$$\mu(t) = \mu;\ g(t) = \mu.\exp(-\mu t)$$

$$\downarrow$$

funkce obnovy: $H(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} t - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left[1 - \exp[-(\lambda+\mu)t]\right]$

střední počet poruch v čase t:

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} t + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}\left[1 - \exp[-(\lambda+\mu)t]\right]$$

pozn.: součinitel pohotovosti ~ soustava s konečnou dobou obnovy má pravděp. $k_p(t)$, že je v čase t ve stavu bez poruchy:

$$k_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\eta_{0n} < t < \eta_{n+1})$$

lze odvodit:

$$k_p(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-\tau)] h(\tau) d\tau$$

Součinitel pohotovosti ~ též poměr celkové doby bezporuchového provozu do času t k času provozu (poruchy + obnova) do času t:

$k_p(t) = \frac{T_p(t)}{T_p(t) + T_0(t)}$; kde $T_p(t)$ – bezporuchový provoz

$T_0(t)$ – obnova

pro $t \to \infty$:

$k_p = \lim_{t\to\infty} k_p(t) = \frac{T_{Sp}}{T_{Sp} + T_{S0}}$; kde T_{Sp} – stř. doba bezp. provozu

T_{S0} – stř. doba obnovy

Pozn.:

je-li obnova (μ) a bezporuchový provoz (λ) s exp. rozdělením

$$T_{Ts} = \frac{1}{\lambda} \qquad T_{S0} = \frac{1}{\mu}$$

je $k_p(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Pozn.: složitější případy dekomponují obnovu na: čekání na opravu
vlastní opravu

s různou statistikou…