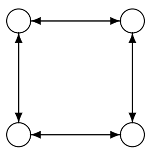
Markovovy řetězce – příklady

Mirko Navara
Centrum strojového vnímání
katedra kybernetiky FEL ČVUT
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a
http://cmp.felk.cvut.cz/˜navara/MVT
http://cmp.felk.cvut.cz/˜navara/psi

20. února 2013

1. V cyklu délky 4 v každém kroku nezávisle vybereme postup po směru hodinových ručiček s pravděpodobností 2/3, v opačném směru s pravděpodobností 1/3. Stanovte pravděpodobnosti stavů po 4 krocích, jestliže počáteční stav je 1.



Řešení: První řádek matice

$$\boldsymbol{P}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{41}{81} & 0 & \frac{40}{81} & 0 \\ 0 & \frac{41}{81} & 0 & \frac{40}{81} \\ \frac{40}{81} & 0 & \frac{41}{81} & 0 \\ 0 & \frac{40}{81} & 0 & \frac{41}{81} \end{pmatrix}$$

(nemusíme násobit celou matici, stačí ji $4\times$ vynásobit zleva vektorem).

2. Alice, Bob a Cyril házejí mincí (v tomto pořadí). Kdo první hodí líc, vyhrává. Hra se opakuje, dokud někdo nehodí líc. Stanovte pravděpodnosti výhry jednotlivých hráčů.

Řešení: $\begin{pmatrix} 4/7 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix}$.

3. Stanovte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s následující maticí přechodu:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení: Stav 3 je přechodný, všechny ostatní jsou trvalé, jejich pravděpodobnosti konvergují k jedinému stacionárnímu rozdělení, $\begin{pmatrix} 4/13 & 6/13 & 0 & 3/13 \end{pmatrix}$.

4. V Markovově řetězci s následující maticí přechodu oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení: Stav 3 je trvalý absorpční, stavy 2 a 4 jsou trvalé s periodou 2, stavy 1 a 5 jsou přechodné. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou $\emptyset, \{3\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}$.

5. V Markovově řetězci s následující maticí přechodu oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ke kterému z nich konverguje rozdělení stavů, vyjdeme-li ze stavu 4?

Řešení: Stav 2 je trvalý absorpční, stavy 1 a 3 jsou trvalé neperiodické, stav 4 je přechodný. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou $\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$. Stacionární rozdělení pravděpodobností dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 1-a-b-c \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a & b & c & 1-a-b-c \end{pmatrix} ,$$

vyjde $\begin{pmatrix} a & 1-3\,a & 2\,a & 0 \end{pmatrix}$, $0 \le a \le 1/3$. Ze stavu 4 dojdeme se stejnou pravděpodobností do absorpčního stavu 2 jako do uzavřené množiny $\{1,3\}$, která tvoří nerozložitelný Markovův podřetězec. Tomu odpovídá hodnota $a = 1/6$ a rozdělení pravděpodobností $\begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Pro následující úlohy můžete použít např. matice přechodu

$$\boldsymbol{P}_A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{P}_B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{P}_C = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{P}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} .$$

6. Vzájemný převod mezi maticí přechodu a přechodovým diagramem.

7. Odhadněte počáteční stav i a koncový stav k Markovova řetězce s danou maticí přechodu, jestliže posloupnost stavů byla $i, 2, 1, 3, k$ (dále ji neznáme) a počáteční rozdělení pravděpodobností bylo rovnoměrné.

Řešení: Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i,k) = p_i(0) \cdot p_{i2} \cdot p_{21} \cdot p_{13} \cdot p_{3k} \, .$$

Lze vytknout konstanty včetně $p_i(0) = 1/3$ (pokud jsou nenulové!), věrohodnost je úměrná $p_{i1} \cdot p_{2k}$. Odhady stavů i, k jsou nezávislé.
Věrohodnost možných hodnot stavu k je dána 3. řádkem matice přechodu, věrohodnost stavu i 2. sloupcem matice přechodu. Je však nutno vyloučit případ D, neboť v něm posloupnost stavů $2, 1, 3$ není možná a věrohodnost je nulová!
[A. 3; 2, B. 1; 1, C. 2; 3, D. –]

8. Odhadněte stav i Markovova řetězce s danou maticí přechodu, jestliže posloupnost stavů byla $3, 2, i, 1$.

Řešení: Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i) = p_3(0) \cdot p_{32} \cdot p_{2i} \cdot p_{i1} \, .$$

Lze vytknout nenulové konstanty, pak je věrohodnost úměrná $p_{2i} \cdot p_{i1}$, jednotlivým hodnotám odpovídají součiny 2. řádku a 1. sloupce po složkách. V případě A je pro všechny hodnoty i nulová.
[A. –, B. 3, C. –, D. 1]

9. Který z daných Markovových řetězců spíše mohl vygenerovat posloupnost stavů (a) $2, 3, 2, 1, 2$, (b) $1, 2, 1, 3$?

Řešení: (a) B (jako jediný může vygenerovat tuto posloupnost), (b) A.

10. Je-li počáteční rozdělení pravděpodobností rovnoměrné, jaké je po 2 krocích?

Řešení: $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_A^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_B^2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_C^2 = \begin{pmatrix}0.28 & 0.27 & 0.45\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_D^2 = \begin{pmatrix}\frac{85}{108} & \frac{19}{108} & \frac{1}{27}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.787 & 0.176 & 0.037\end{pmatrix}$.

11. Klasifikujte stavy řetězců (též v příkladu 1).

Řešení: A, B, C. Všechny stavy jsou trvalé neperiodické (ergodické), řetězec je nerozložitelný.
D. Stav 1 je trvalý absorpční, 2 a 3 jsou přechodné.
Př. 1. Všechny stavy jsou trvalé s periodou 2, řetězec je nerozložitelný.

12. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností stavů a posuďte, zda k nim rozdělení stavů konverguje.

Řešení: A, B, C. Řetězce jsou ergodické, mají tedy jediné stacionární rozdělení pravděpodobností, ke kterému konvergují z libovolného počátečního stavu. Dostaneme je řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix}a & b & 1-a-b\end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}a & b & 1-a-b\end{pmatrix} .$$

A. $\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12}\end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ (ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové)

13. (Obnovování paměti) Přepisujeme binární informaci, přičemž s pravděpodobností 1 % přepíšeme 0 jako 1, s pravděpodobností 2 % přepíšeme 1 jako 0. Jaké bude rozdělení pravděpodobností po velkém počtu přepisů?

Řešení: Matice přechodu je

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}0.99 & 0.01 \\ 0.02 & 0.98\end{pmatrix} .$$

Řetězec je ergodický, z libovolného počátečního stavu konverguje k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností, kterým je $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Stejný výsledek dává mocnina matice

$$\boldsymbol{P}^t = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} + 0.97^t \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} .$$

14. Alice a Bob hrají následující hru: Hráč, který je na řadě, hodí kostkou. Padne-li 6, vyhrává a hra končí. Padne-li jiné sudé číslo, pokračuje stejný hráč. Padne-li liché číslo, pokračuje druhý hráč. Začíná Alice. Jaké jsou pravděpodobnosti výsledků hry?

Řešení: Matice přechodu po vhodné permutaci stavů („vyhrála Alice“, „vyhrál Bob“, „hraje Alice“, „hraje Bob“) je

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix} ,$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 2 přechodné,

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}1/6 & 0 \\ 0 & 1/6\end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix} .$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix}2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3\end{pmatrix}^{-1} = \frac{36}{7} \begin{pmatrix}2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3\end{pmatrix} ,$$
$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix}2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/7 & 3/7 \\ 3/7 & 4/7\end{pmatrix} .$$

Začíná Alice, tj. počáteční rozdělení stavů je $\boldsymbol{p}(0) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ a asymptotické

$$\boldsymbol{p}(0)\,\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4/7 & 3/7 \\ 3/7 & 4/7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/7 & 3/7\end{pmatrix} .$$

Pravděpodobnost výhry začínajícího hráče (Alice) je 4/7.