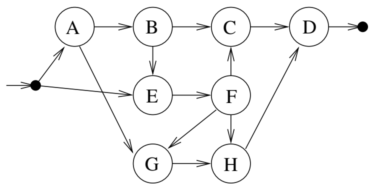
Příklad 1

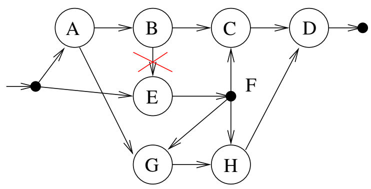
Obvod na obrázku je složen z prvků, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení. Všechny prvky jsou stejné a MTBF každého prvku je 10^5 hodin.



1. Odvoďte MTBF tohoto zapojení. Popište postup řešení, výsledný MTBF uveďte jako násobek zadaného MTBF. [1 bod]
2. Nakreslete zapojení trvalé paralelní zálohy prvku F. [0.2 bodu]
3. Je pravda, že nezáleží na spolehlivosti prvku G? Dokažte výpočtem (např. s využitím řešení první otázky). [0.2 bodu].

0.1 Odvození MTBF

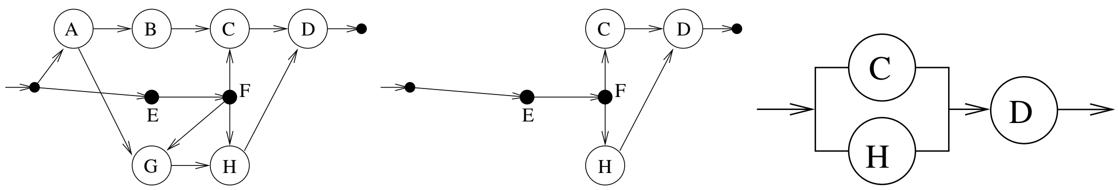
Můžeme postupovat např. metodou rozkladu. Pro rozklad je vhodný prvek F, neboť hodně zjednodušší následné výpočty. Pro přehlednost budeme pravděpodobnosti bezporuchových provozů jednotlivých prvků psát jako $A, B, \ldots, H$ s tím, že víme, že každý prvek má spolehlivost $\mathrm{e}^{-\lambda t}$.



F je funkční

Hrana z B do E je zbytečná, neboť vstup do prvku E je též přímo z hlavního vstupu, tj. jeho funkčnost je nezávislá na prvcích A a B.

Další zjednodušení se provede opět rozkladem, tentokrát podle prvku E:

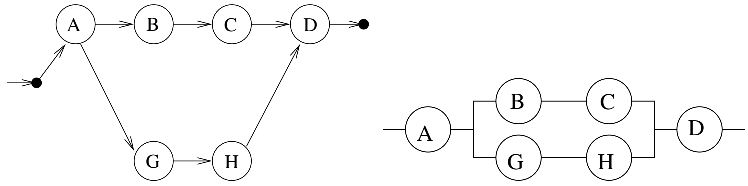


F funkční, E funkční

Zde vidíme, že vstup do C je vždy zajištěn přes cestu vstup→funkčíE →funkčníF, a tudíž funkčnost prvku C nezávisí na vstupu přes A a B. Prvky A a B nemají v této kombinaci na spolehlivost vliv. Výsledek je paralelní zapojení C a H v sérii s D.

$$P(S|F,E) = D\,(C + D - CH)$$

Dále je třeba uvažovat případ, kdy F je funkční a E nefunkční:

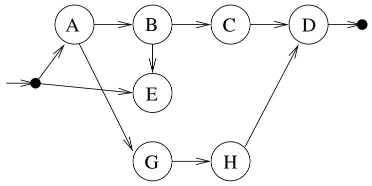


F funkční, E nefunkční

Byť uvažujeme F jako funkční, v tomto případě je jeho jediným vstupem E, který je považován za nefunční. Výsledkem je opět jednoduchá serio-paralelní kombinace.

$$P(S|F, \bar{E}) = AD\,(BC + GH - BCGH)$$

Jako poslední je třeba uvažovat případ, kdy F určitě nefunguje:



F nefunkční

V tomto případě nemá na funčnost vliv ani prvek E, neboť jeho výstup nikam nevede (resp. vede do nefunkčního prvku F). Výsledkem je stejné zapojení jako v případě $F, \bar{E}$.

$$P(S|\bar{F}) = AD\,(GH + BC - BCGH)$$

Celkovou spolehlivost můžeme vyjádřit jako

$$P(S) = FP(S|F) + (1 - F)P(S|\bar{F}).$$

Po dosazení:

$$P(S) = F\,[ED\,(C + H - CH) + (1 - E)ADX] + (1 - F)ADX,$$

kde $X = BC + GH - BCGH$.
Odtud celková spolehlivost:

$$P(S) = FECD - FEDH - FEDCH - ADFEBC - ADFEGH + \qquad (1)$$
$$+ ADFEBCGH + ADBC + ADGH - ADBCGH. \qquad (2)$$

Jelikož platí $A = B = \ldots = H = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, můžeme dosadit a rovnou zpočítat T_s:

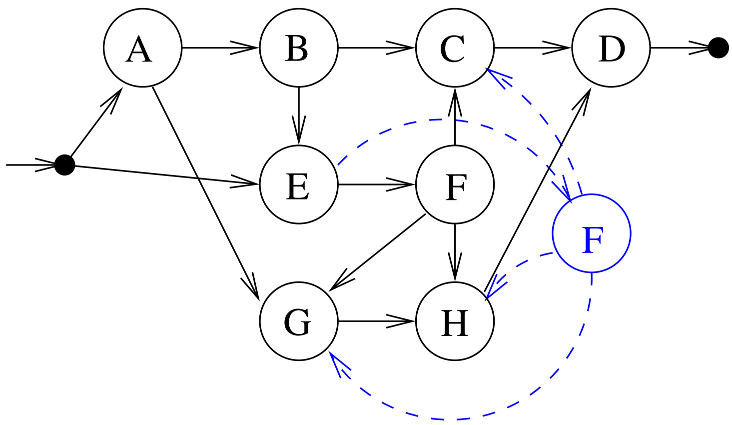
$$R(t) = 4\mathrm{e}{-}4\lambda t - \mathrm{e}^{-5\lambda t} - 3\mathrm{e}^{-6\lambda t} + \mathrm{e}^{-8\lambda t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{5\lambda} - \frac{3}{6\lambda} + \frac{1}{8\lambda} = \frac{17}{40}\frac{1}{\lambda} = \frac{17}{40}\mathrm{MTBF},$$

kde MTBF je střední doba každého prvku.

Paralelní záloha F

Záloha je nakreslena modře.



Vliv prvku G

Je pravda, že nezáleží na spolehlivosti prvku G? Dokažte výpočtem (např. s využitím řešení první otázky).

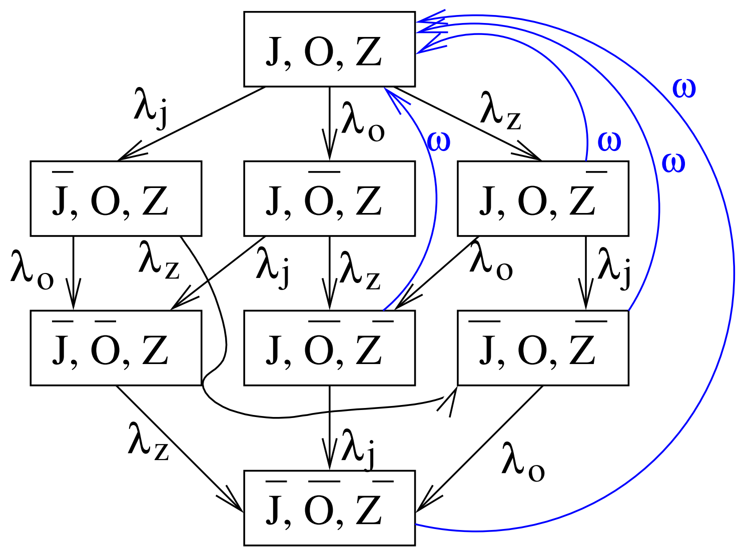
Není, neboť spolehlivost obvodu $P(S)$ závisí na G (G se vysytuje v rovnici pro $P(S)$).

Příklad 2

Výrobní linka na plnění jogurtů se skládá ze tří částí (plnič jogurtu, plnič ovocné směsi, zátkování) spojených pohyblivým pásem. Na vstupu linky jsou prázdné kelímky, na výstupu linky jsou očekávány kelímky naplněné ovocným jogurtem (tj. jogurtem s ovocnou směsí).

Kelímek nejprve putuje k plniči jogurtu, který má intenzitu poruch λ_j (jeho porucha se projevuje tím, že do kelímku není naplněn žádný jogurt), následně putuje k plniči ovocné směsi, který má intenzitu poruch λ_o (jeho porucha se projevuje tak, že do kelímku není naplněna ovocná směs), a nakonec k zátkovači (intenzita poruch λ_z). Za zátkovačem se detektuje správnost zazátkování. Porucha zátkovače znamená, že na kelímek není umístěna zátka. V případě, že detektor odhalí špatně zazátkovaný kelímek, provede se hromadná oprava (reset celé linky) s intenzitou ω.

Budeme uvažovat poruchy každého prvku, označme je J (jogurtovač), O (plnič ovoce) a Z (zátkovač). Vytvoříme model postihující všechny kombinace poruch.



J — jogurtovač, O — plnič ovoce, Z — zátkovač

Vývoj pravděpodobnosti stavů v čase lze popsat:

$$\bar{P}(t+\Delta t) = \mathbf{M}\bar{P}(t),$$

kde $\mathbf{M}$ je matice pravděpodobností a vektor $\bar{P}$ odpovídá stavům:

$$\bar{P}(t+\Delta t) = \begin{bmatrix} P_{JOZ}(t+\Delta t) \\ P_{\bar{J}OZ}(t+\Delta t) \\ P_{J\bar{O}Z}(t+\Delta t) \\ P_{JO\bar{Z}}(t+\Delta t) \\ P_{\bar{J}\bar{O}Z}(t+\Delta t) \\ P_{J\bar{O}\bar{Z}}(t+\Delta t) \\ P_{\bar{J}O\bar{Z}}(t+\Delta t) \\ P_{\bar{J}\bar{O}\bar{Z}}(t+\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1-(\lambda_j+\lambda_o+\lambda_z)\Delta t & 0 & 0 & \omega\Delta t & 0 & \omega\Delta t & \omega\Delta t & \omega\Delta t \\ \lambda_j\Delta t & 1-(\lambda_o+\lambda_z)\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_o\Delta t & 0 & 1-(\lambda_j+\lambda_z)\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_z\Delta t & 0 & 0 & 1-(\omega+\lambda_o+\lambda_j)\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_o\Delta t & \lambda_j\Delta t & 0 & 1-\lambda_z\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z\Delta t & \lambda_o\Delta t & 0 & 1-(\lambda_j+\omega)\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_z\Delta t & 0 & \lambda_j\Delta t & 0 & 0 & 1-(\lambda_o+\omega)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_z\Delta t & \lambda_j\Delta t & \lambda_o\Delta t & 1-\omega\Delta t \end{bmatrix}$$

1. Jaká je pravděpodobnost, že linka produkuje zazátkované kelímky bez jogurtu?

$$P_{\bar{J}OZ}(t) + P_{\bar{J}\bar{O}Z}(t)$$

2. Jaká je pravděpodobnost, že kelímek je úplně prázdný a zazátkovaný? [0.2 b]

$$P_{\bar{J}\bar{O}Z}(t)$$

3. Vytvořte Markovův model tak, abyste mohli odpovědět na výše uvedené otázky. [1 b]
4. Sestrojte odpovídající matici pravděpodobností. [0.1 b]
5. Sestrojte odpovídající matici intenzit. [0.1 b]

   Matice intenzit $\mathbf{M}'$:

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} -\lambda_j - \lambda_o - \lambda_z & 0 & 0 & \omega & 0 & \omega & \omega & \omega \\ \lambda_j & -\lambda_o - \lambda_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_o & 0 & -\lambda_j - \lambda_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_z & 0 & 0 & -\omega - \lambda_o - \lambda_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_o & \lambda_j & 0 & -\lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z & \lambda_o & 0 & -\lambda_j - \omega & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_z & 0 & \lambda_j & 0 & 0 & -\lambda_o - \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_z & \lambda_j & \lambda_o & -\omega \end{bmatrix}$$

Pokyny:

- Úkol nahrajte do odevzdávacího systému v PDF souboru, dokument připravte v TEXu nebo Wordu apod.
- Na začátku dokumentu uveďte své jméno a email.
- Řešení musí obsahovat postup výpočtu, samotný výsledek nestačí k udělení bodů.
- Naskenované ručně psané řešení nebude uznáno.