Příklad 1

Pravděpodobnost poruch výrobku X je

$$Q(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^3$$

kde t je čas v hodinách a $\lambda > 0$ je parametr.

1. Odvoďte T_s (uvažujte obecné λ). [1 bod]
2. Jaká je pravděpodobnost poruchy v období mezi 6–8 hodinou používání pokud $\lambda = 0.1$? (odvoďte vzorec, dosaďte). [0.5 bodu]
3. Lze pravděpodobnost poruch tohoto výrobku modelovat exponenciálním rozdělením? Dokažte výpočtem. [0.5 bodu]

Řešení

Odvoďte T_s (uvažujte obecné λ). [1 bodu]
Nejprve odvodíme $R(t) = 1 - Q(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^3 = 3\mathrm{e}^{-\lambda t} - 3\mathrm{e}^{-2\lambda t} + \mathrm{e}^{-3\lambda t}$.

$$T_s = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty 3\mathrm{e}^{-\lambda t} - 3\mathrm{e}^{-2\lambda t} + \mathrm{e}^{-3\lambda t} \quad \mathrm{d}t = \frac{3}{\lambda} - \frac{3}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda} = \frac{11}{6\lambda}.$$

Jaká je pravděpodobnost poruchy v období mezi 6–8 hodinou používání pokud $\lambda = 0.1$?
Jedno z možných řešení:
$Q(6-8) = \int_6^8 f(t)\mathrm{d}t = Q(8) - Q(6) = 0.0751$, kde
$Q(6) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{0.1\cdot 6})^3$, a obdobně pro $Q(8)$.

Lze pravděpodobnost poruch tohoto výrobku modelovat exponenciálním rozdělením? Dokažte výpočtem.
Existuje více způsobů, jak to zdůvodnit.

- Porovnání zadaného $R(t)$ s $R_{exp}(t)$ obecného exponenciálního rozdělení. V tomto případě je $R(t)$ součtem několika rozdělení s různými intenzitami:

$$3\mathrm{e}^{-\lambda t} - 3\mathrm{e}^{-2\lambda t} + \mathrm{e}^{-3\lambda t}$$

  všimněte si, že zde figurují tři různé intenzity: λ, 2λ a 3λ. Tento vzorec nemá stejný průběh jako $R_{exp}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, takže se nejedená o exponenciální rozdělení (viz obrázek).

- Porovnáním hustoty pravděpodobnosti zadaného obvodu a hustoty pravděpodobnosti obecného exponenciálního rozdělení:

$$f(t) = -\frac{\partial R(t)}{\partial t} = 3\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} - 6\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda t} - 3\mathrm{e}^{-3\lambda t}$$

  a toto není stejná funkce jako $f_{exp}(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

- Graficky — vykreslením průběhu $\lambda(t)$, vidíme, že není konstatní.