Statistika a spolehlivost v lékařství (A6M33SSL)

Osnova statistických cvičení s řešenými příklady

URČENO VÝHRADNĚ PRO STUDENTY V LS 2017/2018

verze 2018-05-25

Obsah

Upozornění: Tento text není učebním textem. Jedná se o jakousi kostru cvičení statistické části cvičení předmětu A6M33SSL, které autor v průběhu školních let 2014/15 - 2017/18 připravil a cvičil. Text obsahuje výběr některých důležitých termínů z pravděpodobnosti a statistiky s ilustračními příklady, které jsou většinou doplněny řešeními a často i dodatečnými faktickými a metodickými poznámkami (vysázenými kurzívou). Těžší partie jsou označeny symbolem ★. Obsahově se text do víceméně kryje s obsahem cvičení a místy jej i přerůstá. Text nabízím studentům jako doplněk k jejich vlastním poznámkám ze cvičení, a budu vděčný, upozorní-li mě na případné chyby zprávou na `siegetom@fel.cvut.cz`.

Za laskavé připomínky vděčím Petru Pošíkovi.

Tomáš Sieger

Stručný přehled značení

X	náhodná veličina (zpravidla velké písmeno latinkou)
x	realizace náhodné veličiny (zpravidla malé písmeno latinkou)
f_X	hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X (nebo rozdělení X)
F_X	distribuční funkce náhodné veličiny X (nebo rozdělení X)
F_X^{-1} nebo q_X	kvantilová funkce náhodné veličiny X (nebo rozdělení X)
$DX \equiv varX$	rozptyl náhodné veličiny X
EX	střední hodnota náhodné veličiny X
$N(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2
$N(0, 1)$	normované normální rozdělení
$\varphi \equiv f_{N(0,1)}$	hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení
$\Phi \equiv F_{N(0,1)}$	distribuční funkce normovaného normálního rozdělení
$\Phi^{-1} \equiv F_{N(0,1)}^{-1}$	kvantilová funkce normovaného normálního rozdělení
t_n	Studentovo t-rozdělení s n stupni volnosti
χ_n^2	χ^2 rozdělení s n stupni volnosti
$Alt(p)$	alternativní rozdělení popisující např. výsledek nějakého pokusu s pravděpodobností úspěchu p
$Bi(n, p)$	binomické rozdělení popisující např. počet úspěchů v sérii nezávislých n pokusů s elementární pravděpodobností úspěchu p
$Po(\lambda)$	Poissonovo rozdělení s parametrem λ, který je roven střední hodnotě i rozptylu tohoto rozdělení (toto rozdělení popisuje např. počet nějakých událostí za daný čas, pokud pravděpodobnost každé události je nezávislá na čase minulé události a průměrný počet událostí za daný čas je roven λ)

Seznam obrázků

1 Opakování: pravděpodobnost

Vysvětlete termíny:

1.1 Náhodný jev (elementární jev, prostor elementárních jevů)

Příklad: Házení kostkou.

1.2 Pravděpodobnost

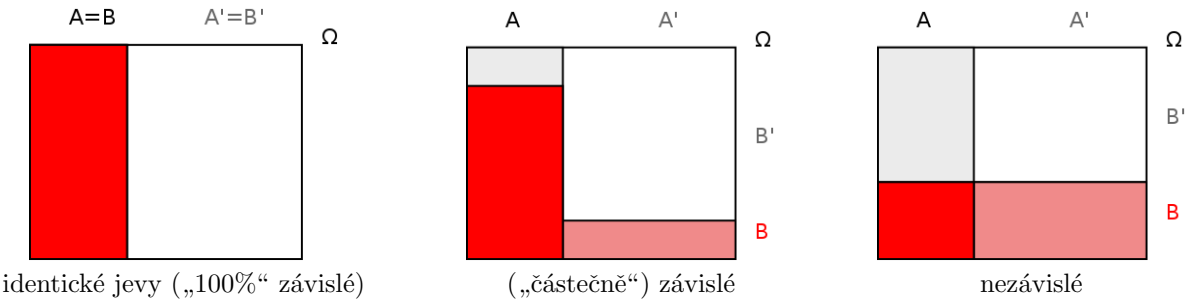
(funkce definovaná na podmnožinách prostoru elementárních jevů)

1.3 ★Pravděpodobnostní prostor: $(\Omega, \mathcal{A}, p)$

1.4 Nezávislost náhodných jevů

Příklad: Příprava na zkoušku.
Alice: "Bobe, jak je pravděpodobné, že tu zkoušku oba uděláme?"
Bob: "Řekl bych 70%."
Alice: "Ale včera jsi tvrdil, že ji na 90% uděláš a že já mám stejnou šanci."
Bob: "No a¿' Alice: "To není možné, a jestli to nevidíš, tak tu zkoušku asi neuděláš."

Příklad: Házení kostkou: jev "padne liché číslo" vs. jev "padne číslo větší než 3". Jsou tyto jevy nezávislé?



identické jevy („100%" závislé) („částečně") závislé nezávislé

Obr. 1: Ilustrace závislosti a nezávislosti dvou jevů.

Příklad: Házení dvěma kostkami. Jev A: na první kostce padne liché číslo, jev B: na druhé kostce padne sudé číslo, jev C: součet čísel na obou kostkách je sudý. Jsou tyto 3 jevy nezávislé? Jsou tyto jevy po dvou nezávislé?

1.5 Podmíněná pravděpodobnost

Ukázat přes geometrickou představu 2 množin A a B s neprázdným průnikem.

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \qquad \text{(za podmínky } p(B) > 0) \tag{1}$$

Příklad: Tenista má první podání úspěšné s pravděpodobností 0,6; druhé s pravděpodobností 0,8. S jakou pravděpodobností se dopustí dvojchyby?

Řešení: jev N_1 - chyba v prvním podání, jev N_2 - chyba ve druhém podání. $p(N_1) = 0,4$, $p(N_2|N_1) = 0,2$ (pozor, toto není $p(N_2)$!). $P(N_1 \cap N_2) = p(N_2|N_1)p(N_1) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

1.6 Úplná pravděpodobnost

aneb celková pravděpodobnost jevu A se dá „spočítat po kouskách a posčítat“

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \tag{2}$$

Příklad: Spočtěte průměrné zastoupení studentek ve škole, která má 2 posluchárny a 2 šatny a v každé místnosti je jiné zastoupení dívek. (Předpokládáme, že průměrné zastoupení studentek nelze zjistit přímo, např. anketou.)

Řešení: Jev D - náhodně vybraný(á) student(ka) je dívka. Jev M_i - student(ka) se nachází v místnosti i.

$$p(D) = \sum_{i=1}^{4} p(D \cap M_i) = \sum_{i=1}^{4} p(D|M_i)p(M_i)$$

1.7 Bayesův vzorec

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

aneb výpočet posteriorní podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$ z apriorních pravděpodobnost $P(A)$, nebo přepočet podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A)$ na podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$.

Označuje-li např. $P(B|A)$ podmíněnou pravděpodobnost určitého výsledku klinického testu (jev B) u zdravého člověka (podmínka A), pak Bayesův vzorec dává na základě výsledku testu (a apriorních pravděpodobností) podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$ toho, že testovaná osoba je zdravá či nemocná.

Příklad: Klinický test, jehož účelem je odhadnout, zda pacient má určitou nemoc, má senzitivitu (pravděpodobnost toho, že u nemocného bude test pozitivní) 90% a specificitu (pravděpodobnost toho, že u zdravého bude test negativní) 95%. Spočítejte pravděpodobnost toho, že pacient s pozitivním testem nemoc skutečně má, a dále pravděpodobnost toho, že pacient s negativním testem nemoc skutečně nemá. Předpokládejme, že nemocí trpí 20% populace.

Řešení: Jev, že pacient je nemocný, označíme jako N, jev opačný jako Z. Pozitivní výsledek testu označíme jako Poz a negativní jako Neg. Víme, že $p(Poz|N) = 0,9$, $p(Neg|Z) = 0,95$ a $p(N) = 0,2$.

Použitím Bayesova vzorce dostáváme:

$$p(N|Poz) = \frac{p(Poz|N)p(N)}{p(Poz)},$$

kde $p(Poz)$ neznáme, ale dokážeme spočítat pomocí věty o úplné pravděpodobnosti:

$$p(Poz) = p(Poz|N)p(N) + p(Poz|Z)p(Z).$$

Z toho

$$p(N|Poz) = \frac{p(Poz|N)p(N)}{p(Poz)} = \frac{p(Poz|N)p(N)}{p(Poz|N)p(N) + p(Poz|Z)p(Z)} = \frac{0,9 \cdot 0,2}{0,9 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,8} \doteq 0,818.$$

Pozitivní výsledek testu tedy přítomnost nemoci neindikuje příliš spolehlivě.

Podobně

$$p(Z|Neg) = \frac{p(Neg|Z)p(Z)}{p(Neg)} = \frac{p(Neg|Z)p(Z)}{p(Neg|Z)p(Z) + p(Neg|N)p(N)} = \frac{0,95 \cdot 0,8}{0,95 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2} \doteq 0,974,$$

tedy $p(N|Neg) \doteq 0,026$ a falešně negativní výsledek lze naštěstí čekat jen u necelých tří procent testovaných osob.

Která chyba vadí víc: falešná pozitivita nebo falešná negativita? Jaká je celková očekávaná chyba a co je její hlavní příčinou? Jak byste test vylepšili?

Poznamenejme, že kromě vlastností daného klinického testu (jeho senzitivity a specificity) má na pravděpodobnosti $p(N|Poz)$ a $p(Z|Neg)$ vliv i prevalence nemoci. Pokud by nemocí trpěla např. pouhá 2% populace, bylo by $p(N|Poz) \doteq 0,269$ a $p(Z|Neg) \doteq 0,998$.

Příklad: V obléhaném městě, které se skládá ze dvou vzájemně oddělených čtvrtí Mordor (tvoří desetinu města) a Londor (tvoří zbylých 90% města), nepřítel kontaminoval jedem vodovod zásobující Mordor. 90% mordorských obyvatel je otráveno (všichni krom těch, kteří se vody zatím nenapili). V Londoru je otráveno pouze 10% obyvatel (patrně z jiných zdrojů, než z vody). Jednomu obyvateli se z města podaří tajnou chodbou uniknout, avšak záhy umírá – byl otráven. Dá se odhadnout, zda tajná chodba vede do Mondoru, nebo Londoru? (Pro zjednodušení budeme předpokládat, že pravděpodobnost toho, že chodbou z města někdo unikne, je stejná, ať už chodba vede kamkoli.) Jak se tato pravděpodobnost změní, vyjde-li z chodby další otrávený?

Řešení:

Jev, že chodba vede do jedem otrávené části města, označíme jako J a jev, že člověk přicházející chodbou je otrávený a zemře, jako M.

Za apriorní (předem očekávanou) pravděpodobnost toho, že chodba vede do otrávené části města, musíme (bez znalosti dodatečných informací) vzít poměr plochy otrávených částí města vůči celému městu, tedy $p(J) = 0,1$. Dále víme, že pravděpodobnost, že chodbou vedoucí do otráveného Mordoru někdo uteče a zemře, je $p(M|J) = 0,9$, a pravděpodobnost, že chodbou vedoucí do neotráveného Londoru někdo uteče a zemře, je $p(M|\bar{J}) = 0,1$. Poté, co chodbou přijde otrávený člověk, se pravděpodobnost, že chodba vede do otrávené části města, změní z $p(J)$ na $p(J|M)$:

$$p(J|M) \overset{Bayes}{=} \frac{p(M|J)p(J)}{p(M)} = \frac{p(M|J)p(J)}{\underbrace{p(M|J)p(J) + p(M|\bar{J})p(\bar{J})}_{\text{úplná pravděpodobnost}}} = \frac{0,9 \cdot 0,1}{0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,9} = \frac{1}{2}$$

Pravděpodobnost se zvýšila z apriorní pravděpodobnosti $0,1$ na posteriorní pravděpodobnost $0,5$. To znamená, že před tím, než z chodby kdokoli vyšel, mysleli jsme si, že chodba vede spíše do otrávené části města. Poté, co z chodby vyšel otrávený člověk, naprosto nevíme, zda chodba vede do trávené nebo neotrávené části města.

Pokud z chodby vystoupí další člověk a také zemře, změní se pravděpodobnost, že chodba vede do otrávené části města, dále na:

$$p(J|M_2, M_1) = \frac{p(M_2|J, M_1)p(J|M_1)}{p(M_2|J, M_1)p(J|M_1) + p(M_2|\bar{J}, M_1)p(\bar{J}|M_1)}.$$

Za předpokladu, že pravděpodobnost výskytu otráveného člověka v otrávené oblasti (resp. mimo otrávenou oblast) se po příchodu prvního otráveného nezmění (tj. pokud je ve městě hodně obyvatel a odchodem jednoho otráveného se pravděpodobnosti prakticky nezmění), platí $p(M_2|J, M_1) = p(M_2|J)$ a $p(M_2|\bar{J}, M_1) = p(M_2|\bar{J})$ a tedy

$$p(J|M_2, M_1) = \frac{p(M_2|J)p(J|M_1)}{p(M_2|J)p(J|M_1) + p(M_2|\bar{J})p(\bar{J}|M_1)} = \frac{0,9 \cdot 0,5}{0,9 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5} = 0,9.$$

Poté, co z chodby vyjde druhý otrávený, budeme tedy spíše přesvědčeni, že chodba vede do otrávené části města. Naši apriorní představu o tom, že chodba vede spíše do neotrávené části města, jsme tedy na základě dat byli nuceni zcela přehodnotit.

Pro srovnání: v případě, že by chodbou přišli (a vzápětí zemřeli) dva lidé nezávisle na sobě a my bychom aposteriorní pravděpodobnost toho, že chodba vede do otrávené části města, počítali nikoli postupně, ale najednou, došli bychom ke stejnému výsledku. Položili bychom

$$p(M_{1+2}|J) = p(M|J) \cdot p(M|J) = p(M|J)^2$$

a

$$p(M_{1+2}|\bar{J}) = p(M|\bar{J}) \cdot p(M|\bar{J}) = p(M|\bar{J})^2$$

a proto

$$\begin{aligned} p(J|M_{1+2}) &= \frac{p(M_{1+2}|J)p(J)}{p(M_{1+2}|J)p(J) + p(M_{1+2}|\bar{J})p(\bar{J})} \\ &= \frac{p(M|J)^2 p(J)}{p(M|J)^2 p(J) + p(M|\bar{J})^2 p(\bar{J})} \\ &= \frac{0,9^2 \cdot 0,1}{0,9^2 \cdot 0,1 + 0,1^2 \cdot 0,9} \\ &= \frac{0,9^2}{0,9^2 + 0,1 \cdot 0,9} \\ &= \frac{0,9}{0,9 + 0,1} \\ &= 0,9. \end{aligned}$$

1.8 Náhodná veličina

Náhodná veličina je striktně řečeno funkce definovaná na prostoru elementárních jevů:

★ měřitelná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ splňující $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$ pro každý interval I, tj. vzorem každého intervalu je měřitelná množina ze σ-algebry $\mathcal{A}$ (systému podmnožin prostoru elementárních jevů Ω.

Pro praktické účely budeme chápat náhodnou veličinu jako číslo, které vhodným způsobem charakterizuje náhodný jev, např. hmotnost nějakého pacienta, počet líců v sérii nezávislých hodů mincí, nebo doba bezchybného provozu nějaké součástky.

1.9 Realizace náhodné veličiny

ilustrace: 3 světy (reálný, zjednodušený reálný (modelový), „statistický“)

Příklad: Hmotnost studentů určitého kurzu – v modelovém a „statistickém“ světě graficky vyznačte jednu konkrétní realizaci náhodné veličiny „hmotnost“ a samotnou náhodnou veličinu „hmotnost“.

Nechat studenty vyznačit na reálné ose jedno pozorování - hmotnost a pak to samé chtít pro náhodnou veličinu, aby byli konfrontováni s tím, že vlastně nějakou hodnotu nakreslit nelze. Chová se náhodně (paralela s kvantovým světem a štěrbinovým experimentem). Jediné, co o ní víme, je jak se chová „typicky“, „průměrně“. Dojít k tomu, že někde je větší pravděpodobnost výskytu, jinde menší.

1.10 Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny

Příklad: Definujte rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.

Pozor: u spojitého rozdělení $p(X = x) = 0$, proto používáme $p(X \leq x)$.

Příklad: Načtrtněte rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při hodu mincí.

Příklad: Načtrtněte rozdělení pravděpodobnosti počtu ok při hodu kostkou.

Příklad: Načtrtněte rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při dvou nezávislých hodech mincí.

1.11 Distribuční funkce $F_X(x)$ náhodné veličiny X

$F_X(x) \stackrel{def.}{=} p(X \leq x), x \in \mathbb{R}$

Vlastnosti distribuční funkce:

- $lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *(protože* $lim_{x \to -\infty} p(X \leq x) = 0$*)*
- $lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ *(protože* $lim_{x \to \infty} p(X \leq x) = 1$*)*

Příklad: Načtrtněte distribuční funkci rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při hodu mincí.

Příklad: Načtrtněte distribuční funkci rozdělení pravděpodobnosti počtu ok při hodu kostkou.

Příklad: Načtrtněte distribuční funkci rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při dvou nezávislých hodech mincí.

1.12 Hustota pravděpodobnosti f_X náhodné veličiny X

V případě jakých rozdělení o ní hovoříme?

Hustotu pravděpodobnosti definujeme u spojitých rozdělení.

U spojitého rozdělení platí, že $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.

Příklad: Určuje $f_X(x) = sin(x)$ pro $0 \leq x \leq \pi$ hustotu pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny?

Řešení: Ne, $\int_0^{\pi} sin(t)dt = [-cos(t)]_0^{\pi} = 1-(-1) = 2$, tedy hustota se neintegruje do 1 a nejedná se o hustotu.

Příklad: Určuje $f_X(x) = 2 - x$ pro $0 \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$ hustotu pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny?

Řešení: Ne, $\int_0^{2+\sqrt{2}} f_X(x)dx = 1$, ale $f_X(2 + \sqrt{2}) < 0$.

Příklad: Načtrtněte hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci rovnoměrného rozdělení na intervalu (a, b).

1.13 Kvantilová funkce F_X^{-1}

Pro spojité ryze rostoucí inverzní funkce k F_X.

Příklad: Je dáno $p(X \leq x) = x$ pro $0 \leq X \leq 1$. Odvoďte a načtrtněte distribuční funkci F_X, hustotu f_X a kvantilovou funkci F_X^{-1}.

Řešení: Distribuční funkce $F_X(x)$ je právě $p(X \leq x) = x$. Hustota $f_X(x)$ je derivací $F_X(x)$, tedy $f_X(x) = 1$. Kvantilová funkce je inverzí k distribuční funkci, tedy $F_X^{-1}(u) = u$ (má smysl samozřejmě jen pro $0 < u < 1$).

Příklad: Je dáno $f_X(x) = 3x$ pro $0 \leq X \leq 1$. Odvoďte a načtrtněte distribuční funkci F_X, $p(X \leq x)$ a kvantilovou funkci F_X^{-1}.

Řešení: Nelze řešit: f_X není hustota, neintegruje se do 1.

Příklad: Je dáno $f_X(x) = 2x$ pro $0 \leq X \leq 1$. Odvoďte a načtrtněte distribuční funkci F_X, $p(X \leq x)$ a kvantilovou funkci F_X^{-1}.

Řešení: Distribuční funkce je integrál hustoty, tedy $F_X(x) = x^2$. $p(X \leq x) = F_X(x)$ z definice. Kvantilová funkce F_X^{-1} je inverzí k F_X, tedy $F_X^{-1}(u) = \sqrt{u}$ (má smysl samozřejmě jen pro $0 < u < 1$).

Příklad: V lese zakresleném na mapě jako rovnostranný trojúhelník o straně 30km se ztratilo dítě. Na záchranu se vypravily tři stejné rojnice, z každé strany lesa jedna, které dokáží prohledávat terén rychlostí 500 m/hodinu. Za jak dlouho dítě najdou? Za jak dlouho bude pravděpodobnost, že dítě našli, stejná, jako že dítě ještě nenašli? Za jak dlouho bude pravděpodobnost, že dítě našli, rovna 75%, resp. 95%?

Nalezněte rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližšího okraje lesa a popište jeho hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci.

Řešení: Uvědomíme si, že stačí uvažovat jen část celého trojúhelníku mezi jednou stranou a těžištěm. Označíme-li $a = 30km$, je vzdálenost těžiště od strany třetinou dělky těžnice (a zároveň výšky), tj. $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \doteq 8,660km$, a pro jednoduchost si označíme toto číslo jako b. Potom hustota rozdělení pravděpodobnosti vzdálenosti dítěte od nejbližší strany bude největší v blízkosti strany (zde se totiž může dítě nacházet podél celé strany) a bude klesat směrem k těžišti (kde dítě již nebude mít žádnou volnost - pokud nebylo nalezeno dříve, musí být jedině v těžišti), a lze ji popsat jako

$$f(x) = lb - \frac{lb}{b}x = lb - lx = l(b - x),$$

kde konstantu l vypočteme tak, aby se hustota pravděpodobnosti integrovala do 1, tj. aby plocha pod hustotou byla jednotková:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}lbb &= 1 \\ l &= \frac{2}{b^2} \end{aligned}$$

tedy

$$f(x) = \frac{2}{b^2}(b - x).$$

Hledáme-li pravděpodobnost, že dítě bude nalezeno do určité doby (resp. vzdálenosti), tj. hledáme-li $p(X \leq x)$, hodí se zavést funkci $F(x) = p(X \leq x) = \int_{y=0}^{x} f(y)dy$.

Výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{y=0}^{x} f(y)dy \\ &= \int_{y=0}^{x} \frac{2}{b^2}(b - y)dy \\ &= \frac{2}{b^2}\Big[by - \frac{y^2}{2}\Big]_{y=0}^{x} \\ &= \frac{2}{b^2}\Big(bx - \frac{x^2}{2}\Big). \end{aligned}$$

Nyní budeme hledat takovou vzdálenost od kraje lesa, že pravděpodobnost, že dítě našli, bude stejná, jako že dítě ještě nenašli. Budeme tedy hledat takové x, aby $F(x) = 0,5$. Protože se ale budeme dále ptát na další otázky, můžeme rovnou řešit obecně jako $F(x) = c$:

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{2}{b^2}(bx - \frac{x^2}{2}) &= c \\ \frac{2}{b}x - \frac{x^2}{b^2} &= c \\ x^2 - 2bx + b^2c &= 0 \end{aligned}$$

a řešíme kvadratickou rovnici:

$$D = 4b^2 - 4b^2c = 4b^2(1 - c) = (2b)^2\sqrt{1 - c}$$

a protože má smysl hledat pouze mezi stranou lesa a jeho středem (těžištěm), tedy $x < b$

$$x = \frac{2b - 2b\sqrt{1 - c}}{2} = b(1 - \sqrt{1 - c}).$$

Tento vztah mezi c a x si můžeme označit jako $F^{-1}(c) = b(1 - \sqrt{1 - c})$.

Nyní dostáváme, že 50% pravděpodobnost nalezení dítěte nastane v okamžiku, kdy rojnice projdou $F^{-1}(0,5) = b(1-\sqrt{1-0,5}) \doteq 2,537km$ lesa, tj. za cca 5 hodin bude již dítě s pravděpodobností $0,5$ zachráněno.

Pravděpodobnost, že bude zachráněno s pravděpodobností 75%, nastane, až bude prohledáno $F^{-1}(0,75) = b(1-\sqrt{1-0,75}) \doteq 4,330km$ lesa, tedy cca za 8 hodin 40 minut. Úplná záchrana pak bude zajištěna, až rojnice dojdou do těžiště, tedy až prohledají $F^{-1}(1) = b(1-\sqrt{1-1}) = b \doteq 8,660km$ lesa, tedy cca za 17 hodin 19 minut.

Poznamenejme, že funkce $F(x)$ se nazývá *distribuční funkce* a říká, jak pravděpodobné je, že se dítě dostalo do určité vzdálenosti od okraje lesa (obecně jak pravděpodobné je, že náhodná veličina nabývá nanejvýš dané hodnoty). Funkce $F^{-1}(c)$ se nazývá *kvantilová funkce* a říká, do jaké vzdálenosti dojde rojnice v okamžiku, kdy bude pravděpodobnost nalezení dítěte $P\%$ (obecně při jaké hodnotě náhodné veličiny bude pravděpodobnost jejího výskytu mezi $-\infty$ a touto hodnotou rovna dané pravděpodobnosti). Např. pravděpodobnost nalezení náhodné veličiny s hodnotou nejvýše $F^{-1}(50\%)$ je 50%.

Příklad: (Použití tabulek kvantilů a kritických hodnot:) Hmotnost vyráběné pilulky lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $120mg$ a rozptylem $1mg^2$. Výstupní kontrola testuje, zda tomu tak skutečně je. Rozumně velký náhodný vzorek pilulek byl zvážen a setříděn podle narůstající hmotnosti.

1. V jakém rozmezí lze čekat hmotnost 10% nejlehčích pilulek?
2. V jakém rozmezí asi bude hmotnost 10% nejtěžších pilulek?
3. V jakém rozmezí lze čekat hmotnost 1% nejlehčích pilulek?
4. V jakém rozmezí asi bude hmotnost 1% nejtěžších pilulek?
5. V jakém rozmezí lze čekat hmotnost $0,1\%$ nejlehčích pilulek?
6. V jakém rozmezí asi bude hmotnost $0,1\%$ nejtěžších pilulek?
7. Jaká je pravděpodobnost, že nalezneme pilulku o hmotnosti 120mg?
8. Jaká je pravděpodobnost, že nalezneme pilulku těžší než 120mg?
9. Jaká je pravděpodobnost, že nalezneme pilulku těžší než 123mg?
10. Jaká je pravděpodobnost, že nalezneme pilulku o hmotnosti nižší než 117,5mg?

Řešení: *Uvažujme symetrii* $\Phi(x)$.

1. rozmezí hmotnosti 10% nejlehčích pilulek: $(max(0, 120 + \Phi^{-1}(0\%)),\ 120 + \Phi^{-1}(10\%)) = (0,\ 120 + (-\Phi^{-1}(90\%))) \doteq (0,\ 120 + (-1,282)) = (0,\ 118,718)$
2. rozmezí hmotnosti 10% nejtěžších pilulek: $(120+\Phi^{-1}(90\%),\ 120+\Phi^{-1}(100\%)) \doteq (121,282,\ \infty)$
3. rozmezí hmotnosti 1% nejlehčích pilulek: $(max(0, \Phi^{-1}(0\%)),\ 120 + \Phi^{-1}(1\%)) = (0,\ 120 + (-\Phi^{-1}(99\%))) \doteq (0,\ 120 + (-2,326)) = (0,\ 117,674)$
4. rozmezí hmotnosti 1% nejtěžších pilulek: $(120+\Phi^{-1}(99\%),\ 120+\Phi^{-1}(100\%)) \doteq (122,326,\ \infty)$
5. rozmezí hmotnosti $0,1\%$ nejlehčích pilulek: $(max(0, 120 + \Phi^{-1}(0\%)),\ 120 + \Phi^{-1}(0,1\%)) = (0,\ 120 + (-\Phi^{-1}(99,9\%))) \doteq (0,\ 120 + (-3,009)) = (0,\ 116,991)$
6. rozmezí hmotnosti $0,1\%$ nejtěžších pilulek: $(120+\Phi^{-1}(99,9\%),\ 120+\Phi^{-1}(100\%)) \doteq (123,009,\ \infty)$
7. Pravděpodobnost nálezu pilulky o hmotnosti 120mg: Pokud provádíme vážení naprosto přesně, pak tato pravděpodobnost je 0, protože u spojité náhodné veličiny nabývající nenulové pravděpodobnosti na nedegenerovaném intervalu[1] platí, že pravděpodobnost jedné konkrétní realizace je nulová. *Srovnej s* hustotou pravděpodobnosti - *ta nulová není, ale aby se dala interpretovat jako* pravděpodobnost*, musí se zintegrovat na alespoň malém intervalu v okolí bodu, který nás zajímá.*

[1] jehož krajní body nesplývají

Pokud vážíme pouze s určitou upřesností, například s přesností na desetiny gramu, bude naměření hmotnosti $120mg$ vlastně znamenat, že skutečná hmotnost pilulky je taková, že bude zaokrouhlena na $120mg$, tedy že je v rozsahu $[120-0,1/2,\ 120+0,1/2) = [119,95,\ 120,4\bar{9})$. Definujeme-li náhodnou veličinu $Y = X - 120mg$ (takže $EY = 0mg$), bude pravděpodobnost p nálezu pilulky o skutečné hmotnosti X a naměřené hmotnosti $120mg$

$$\begin{aligned} p &= P(119,95 \leq X < 120,05) \\ &= P(120-0,05 \leq X < 120+0,05) \\ &= P(-0,05 \leq Y < 0,05) \\ &= P(Y < 0,05) - p(Y < -0,05) \end{aligned}$$

a protože $p(Y = y) = 0$, bude

$$\begin{aligned} p &= P(Y \leq 0,05) - P(Y \leq -0,05) \\ &= \Phi(0,05) - \Phi(-0,05) \end{aligned}$$

Nyní využijeme symetrie normovaného normálního rozdělení kolem 0, tedy toho, že

$$\phi(x) = \phi(-x)$$

a

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x),$$

a tak

$$\begin{aligned} p &= \Phi(0,05) - (1 - \Phi(0,05)) \\ &= 2\Phi(0,05) - 1. \end{aligned}$$

Hodnotu $\Phi(0,05)$ v tabulkách nemáme, a tak odhadneme kýženou pravděpodobnost konzervativně raději větší, než skutečnou,[2] pomocí $\Phi(0,06)$:

$$\begin{aligned} p &\approx 2\Phi(0,06) - 1 \\ &\approx 2 \cdot 0,5239 - 1 = 0,0476. \end{aligned}$$

Při nepřesném měření je tedy pravděpodobnost nálezu určité konkrétní realizace náhodné veličiny nenulová, v našem případě měření s přesností na $0,1mg$ je pravděpodobnost nálezu pilulky o hmotnosti $120mg$ necelých 5%.

Zamyslete se, jak by se tato pravděpodobnost změnila, kdybychom měřili s větší přesností? A jak by se změnila, kdyby hmotnost pilulek neměla jednotkový rozptyl, ale větší (např. $10mg^2$)?

Příklad: Jak lze vygenerovat (pseudo)náhodné číslo z normálního rozdělení $N(0,1)$, máme-li k dispozici generátor (pseudo)náhodných čísel z intervalu $(0,1)$? A jak lze vygenerovat číslo z lib. daného rozdělení?

Řešení: Ke generování čísel z $N(0,1)$ lze přímo použít kvantilovou funkci Φ^{-1}. Rozmyslete, že čísla $\Phi^{-1}(p)$, kde $p \sim R(0,1)$, jsou realizacemi náhodné veličiny z $N(0,1)$:

Pro zvolené $p \in (0,1)$ generujeme $x = \Phi^{-1}(p)$. Realizacemi jaké náhodné veličiny taková čísla jsou? Stačí určit distribuční funkci $F(x)$ tohoto rozdělení. Protože

$$p = P(X \leq x) = P(X \leq \Phi^{-1}(p)) = F(\Phi^{-1}(p))$$

aplikací $F^{-1}()$ dostáváme

$$F^{-1}(p) = F^{-1}(F(\Phi^{-1}(p)) = \Phi^{-1}(p).$$

Vidíme, že $F^{-1} = \Phi^{-1}$ a tedy $F = \Phi$ a tedy generovaná čísla pocházejí z normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$.

Při generování z jiného rozdělení můžeme postupovat analogicky, použitím příslušné kvantilové funkce.

[2] skutečná pravděpodobnost je přibližně rovna $0,0399$

1.14 Charakteristiky rozdělení (střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka)

Střední hodnota popisuje typickou[3] hodnotu náhodné veličiny. Počítá se jako vážený průměr všech možných relizací náhodné veličiny. Pro spojitou náhodnou veličinu X to je:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \tag{3}$$

pokud tento integrál existuje.

Pro diskrétní náhodnou veličinu X neprůměrujeme přes všechna reálná čísla, ale jen přes jednotlivé diskrétní realizace:

$$EX = \sum_i x_i p(X = x_i) \tag{4}$$

Pozn.: pomocí distribuční funkce můžeme definici sjednotit pro spojitou i diskrétní náhodnou veličinu na:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) dx \tag{5}$$

Vlastnosti střední hodnoty:

$$E(a + bX) = a + bEX \tag{6}$$
$$E(X + Y) = EX + EY \quad \text{(pokud } EX \text{ a } EY \text{ existují)} \tag{7}$$
$$E(XY) = EXEY \quad \text{(právě když jsou } X, Y \text{ nezávislé a pokud } EX \text{ a } EY \text{ existují)} \tag{8}$$

(a, b nenáhodné konstanty, X, Y náhodné veličiny)

Příklad: Uvedené vztahy odvoďte.

Příklad: Jaký očekáváte průměrný počet ok při hodu kostkou? *Tj. spočtěte střední hodnotu odpovídající náhodné veličiny.*

Řešení: $p(X = i) = \frac{1}{6}$ pro $i = 1, \ldots, 6$. Pak

$$EX = \sum_{i=1}^{6} p(X = i) i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Příklad: Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny dané jako výsledek hodu falšovanou mincí, u níž panna padá 2x častěji, než orel. (Předpokládejme, že pannu reprezentujeme jako 0 a orla jako 1.)

Řešení: Protože $p(X = 0) = \frac{2}{3}$ a $p(X = 1) = \frac{1}{3}$,

$$EX = \sum_{i=1}^{2} p(X = i)\ i = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Příklad: Spočtěte střední hodnotu náhodné veličiny z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

Řešení: Protože hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$ je $f(x) = 1$, je

$$EX = \int_0^1 f(x) x dx = \int_0^1 1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} = 0,5.$$

[3] anglicky *expected*, odtud značení EX

Pozn.: pro obecný interval (a, b) je $f(x) = \frac{1}{b-a}$, a tedy

$$EX = \int_a^b f(x)xdx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

Pro charakterizaci kolísání náhodné veličiny kolem střední hodnoty se používá rozptyl $varX$ definovaný jako:

$$varX = E(X - EX)^2 \tag{9}$$

Pozn.: Proč se používá čtverec a ne přímo $E(X - EX)$?
(Protože $E(X - EX) = E(X) - E(EX)) = EX - EX = 0$.)

Lze jednoduše ukázat, že $E(X-a)^2$ je minimalizován při volbě $a = EX$. V tomto smyslu je tedy střední hodnota opravdu „středem" hodnot náhodné veličiny.

Vlastnosti rozptylu:

$$var(a + bX) = b^2 varX \tag{10}$$
$$varX = (EX^2) - (EX)^2 \tag{11}$$
$$var(X + Y) = varX + varY + 2cov(X, Y) \tag{12}$$
$$var(X + Y) = varX + varY \qquad \text{(pokud } X \text{ a } Y \text{ jsou nezávislé)} \tag{13}$$

(a, b nenáhodné konstanty, X, Y náhodné veličiny).
Přitom

$$cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY). \tag{14}$$

Příklad: Dokažte tvrzení (10 a 11).

Příklad: Spočtěte rozptyl náhodné veličiny popisující výsledek hodu (nefalšovanou) mincí.

Řešení: Označíme pannu jako 0 a orla jako 1 a můžeme postupovat přímo dosazením do vzorce $varX = E(X - EX)^2$, kde víme, že $EX = 0, 5$:

$$var(X) = E(X - EX)^2 = \sum_{i=0}^{1} p(X = i)\ (X - EX)^2 = \frac{1}{2}(0 - 0,5)^2 + \frac{1}{2}(1 - 0,5)^2 = 0,5$$

Příklad: Spočtěte rozptyl náhodné veličiny z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

Řešení: Použijeme výpočetně přívětivější vzorec 11, tedy

$$\begin{aligned} var(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \int_0^1 f(x)x^2dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \int_0^1 1x^2dx - \frac{1}{4} \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Příklad: Spočtěte střední hodnotu a rozptyl součtu resp. rozdílu dvou náhodných veličin. Spočítejte obecně a speciálně pro $X, Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Řešení: Pro součet platí:

$$E(X+Y) = EX + EY,$$

speciálně

$$E(X+Y) = EX + EY = 2\sigma$$

a

$$\begin{aligned} var(X+Y) &= E(X+Y-E(X+Y))^2 \\ &= E(X+Y-(EX+EY))^2 \\ &= E(X-EX+Y-EY)^2 \\ &= E(X-EX)^2 + 2E(X-EX)(Y-EY) + E(Y-EY)^2 \\ &= var\ X + 2cov(X,Y) + var\ Y \\ &= var\ X + var\ Y \text{ (pokud X,Y jsou nezávislé)} \end{aligned}$$

speciálně

$$var(X+Y) = var\ X + var\ Y = 2\sigma^2 \text{ (pokud X,Y jsou nezávislé)}$$

Pro rozdíl platí:

$$E(X-Y) = EX - EY,$$

speciálně

$$E(X-Y) = EX - EY = 0$$

a

$$\begin{aligned} var(X-Y) &= E(X-Y-E(X-Y))^2 \\ &= E(X-Y-(EX-EY))^2 \\ &= E(X-EX-(Y-EY))^2 \\ &= E(X-EX)^2 - 2E(X-EX)(Y-EY) + E(Y-EY)^2 \\ &= var\ X - 2cov(X,Y) + var\ Y \\ &= var\ X + var\ Y \text{ (pokud X,Y jsou nezávislé),} \end{aligned}$$

speciálně

$$var(X-Y) = var\ X + var\ Y = 2\sigma^2 \text{ (pokud X,Y jsou nezávislé).}$$

Tedy rozptyl součtu i rozdílu nezávislých náhodných veličin je dán jako součet jejich rozptylů. *Jakým způsobem by se dal rozptyl součtu resp. rozdílu zmenšit?*

Příklad: Spočtěte střední hodnotu a rozptyl průměru n nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, pro které platí $EX = \mu$ a $var\ X = \sigma^2$.

Řešení:

$$E\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\Big) = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$var\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\Big) = \frac{var(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n var\ X_i}{n^2} = \frac{n\sum_{i=1}^n \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Kolik náhodných veličin musíme zprůměrovat, aby byl rozptyl průměru poloviční ve srovnání s původní náhodnou veličinou? Vidíte možnou aplikaci takového postupu?

1.15 Charakteristiky realizace náhodné veličiny

- (výběrový) průměr (jako náhodná veličina: $\bar{X}$, $\bar{X}_n$, jako realizace náhodné veličiny: $\bar{x}$, $\bar{x}_n$)
- (výběrový) medián ($\widetilde{X}$, $\widetilde{X}_n, \widetilde{x}$, $\widetilde{x}_n$)
- (výběrový) modus
- (výběrový) rozptyl (S^2, s^2)
- (výběrová) směrodatná odchylka (S, s)
- (výběrové) kvantily
- (výběrové) inter-kvartilové rozpětí (IQR)

Ukázat na příkladech.

Příklad: Hmotnost studentů – v modelovém světě graficky vyznačte náhodný výběr (několik realizací náhodné veličiny „hmotnost“) a sumarizujte jej.

Poznamejme, že výběrový rozptyl definovaný jako

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{15}$$

je nevychýleným odhadem rozptylu σ^2. Definujeme-li $\mu = EX$, ukážeme to pomocí tvrzení:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\bar{X})^2 + 2(X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu) + (\bar{X}-\mu)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + 2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(X_i-\bar{X})}_{=0} + n(\bar{X}-\mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2
\end{aligned}$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2$$

z čehož

$$
\begin{aligned}
ES^2 &= E\Big(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\Big)\\
&= \frac{1}{n-1}E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\Big)\\
&= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 - nE(\bar{X}-\mu)^2\Big)\\
&= \frac{1}{n-1}\big(n\sigma^2 - n\cdot var\bar{X}\big)\\
&= \frac{1}{n-1}\big(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\big)\\
&= \frac{1}{n-1}\big((n-1)\sigma^2\big)\\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Někdy se používá vychýlený odhad:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \tag{16}$$

Příklad: Uvažme realizace $x_i, i = 1,\dots,n$ náhodné veličiny z rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$ s neznámým parametrem μ a se známým parametrem σ^2. Dále mějme čtyři odhady střední hodnoty μ: $m_1 = x_1, m_2 = x_{(1)}, m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ a $m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}{n}$.

U každého odhadu určete, zda je nestranný, asymptoticky nestranný a konzistentní.

Řešení: $Em_1 = \mu$, takže m_1 je nestranný (a tedy i asymptoticky nestranný). $lim_{n\to\infty}var\ m_1 = \sigma^2$, tedy m_1 není konzistentní.

$Em_2 \neq \mu$, takže m_2 není nestranný (a protože s rostoucím n se odhad nezlepšuje, není ani asymptoticky nestranný). Konzistentní být m_2 nemůže, protože není asymptoticky nestranný (nemusíme tedy již chování rozptylu zkoumat).

$Em_3 = \mu$, takže m_3 je nestranný (a tedy i asymptoticky nestranný). $lim_{n\to\infty}var\ m_3 = lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0$, tedy m_3 je konzistentní.

$Em_4 = \frac{n\mu+1}{n} \neq \mu$, takže m_4 není nestranný. Protože však

$$lim_{n\to\infty}Em_4 = lim_{n\to\infty}\frac{n\mu+1}{n} = lim_{n\to\infty}\Big(\mu+\frac{1}{n}\Big) = \mu,$$

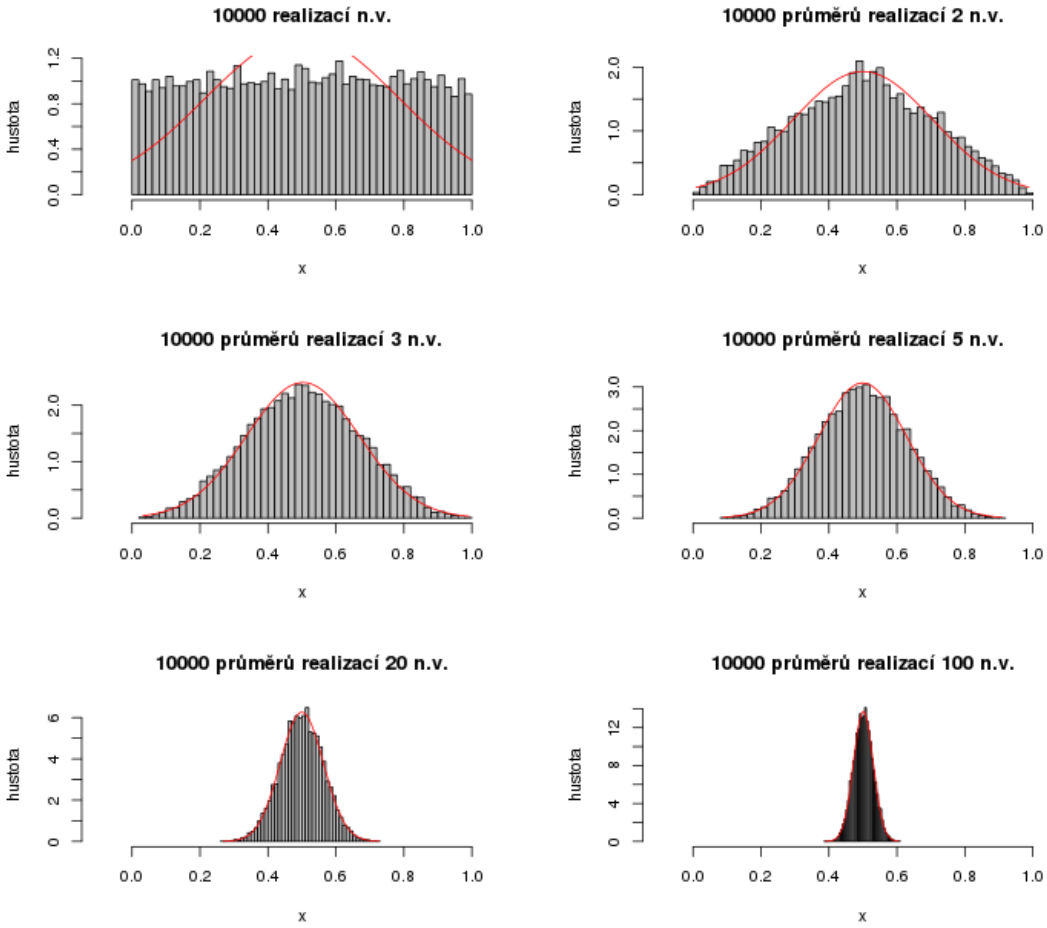
jedná se o asymptoticky nestranný odhad. $lim_{n\to\infty}var\ m_4 = lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0$, tedy m_4 je konzistentní.

1.16 Centrální limitní věta a význam normálního rozdělení.

Ukázat na simulacích.

Centrální limitní větu ilustruje obr. 2, vygenerovaný zdrojovým kódem v jazyce R (viz následující stránku).

```r
# Demonstrace centrální limitní věty (CLV).
# CLV budeme demonstrovat na 'n' průměrech 'm' relizací náhodné veličiny
# generované funkcí 'g'.

# Funkce generující 'n' realizací náhodné veličiny.
# Argumenty:
#   n: velikost výběru
# Vrací: vektor 'n' realizací náhodné veličiny.
g<-function(n) {

  # rovnoměrné rozdělení
  x<-runif(n,0,1)

  # další způsoby generování relizací náhodných veličin jsou
  # zakomentované (lze je jednoduše aktivovat smazáním znaku '#' před nimi)
  # normální  rozdělení
  #x<-rnorm(n,0,1)

  # házení mincí (alternativní rozdělení)
  #x<-rbinom(n,1,.5)

  # trojúhelníkové rozdělení
  #x<-runif(n,0,1)+runif(n,0,1)

  # bimodální rozdělení
  #x<-rnorm(n,.75-.5*(runif(n,0,1)<.5),.1)

  return(x)
}

# Funkce generující 'm' náhodných vektorů délky 'n' a vykreslující histogram
# jejich průměrů spolu s proloženým odhadem hustoty pravděpodobnosti
# normálního rozdělení s parametry odhadnutými z dat.
# Parametry:
#  m - počet vektorů
#  n - délka jednoho vektoru
clv<-function(m,n,titulek) {
  # alokujeme matici typu 'm x n', v 'm' řádcích vektory 'n' realizací náh. veličiny
  x<-matrix(NA,m,n)
  for (i in 1:m) {
    x[i,]<-g(n)
  }
  x<-colMeans(x)
  # histogram
  hist(x, probability=TRUE, breaks=50, col='gray', ylab='hustota',main=titulek,xlim=
      c(-.1,1.1))
  # proložíme hustotu pravděpodobnosti normálního rozdělení
  ax<-seq(from=min(x), to=max(x), length=100) # body na ose x
  ay<-dnorm(ax, mean(x), sd(x))
  lines(ax, ay, col='red')
}

# počet vektorů
m<-100
# délka jednoho vektoru
n<-10000

options(scipen=5) # čísla chceme vypisovat ve fixní notaci

# vykreslíme 3x2 obrázků
opar<-par(mfrow=c(3,2))
clv(1,n,paste(n,'realizací n.v.'))
clv(2,n,paste(n,'průměrů realizací 2 n.v.'))
clv(3,n,paste(n,'průměrů realizací 3 n.v.'))
clv(5,n,paste(n,'průměrů realizací 5 n.v.'))
clv(20,n,paste(n,'průměrů realizací 20 n.v.'))
clv(m,n,paste(n,'průměrů realizací',m,'n.v.'))
par(opar)
```



Obr. 2: Ilustrace centrální limitní věty. Histogramy ukazují rozdělení výběrů 10.000 náhodných veličin definovaných jako součet n nezávislých realizací náhodné veličiny z rovnoměrného rozdělení $R(0,1)$. Pro $n = 1$ dostáváme přibližně rovnoměrné rozdělení, pro $n = 2$ přibližně trojúhelníkové rozdělení, a pro $n \geq 5$ už v obrázku nerozeznáme, jak se empirické rozdělení liší od normálního, které je pro srovnání zobrazeno jako červená křivka, jejíž parametry byly z jednotlivých výběrů vypočteny momentovou metodou.

1.17 Čebyševova nerovnost

To, jak daleko od střední hodnoty se mohou nacházet hodnoty náhodné veličiny, omezuje následující pozoruhodná Čebyševova nerovnost:

$$p(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{varX}{\epsilon^2} \tag{17}$$

Tato nerovnost je zajímavá tím, že platí pro všechny náhodné veličiny (bez ohledu na rozdělení). Zaujmout však může i elegancí a krátkostí svého důkazu (my ji zde však dokážeme jen pro diskrétní rozdělení):

$$
\begin{aligned}
varX &= E(X-EX)^2 \\
&= \sum_i (X_i - EX)^2 p_i \\
&\geq \sum_{i:|X_i-EX|\geq\epsilon} (X_i - EX)^2 p_i \\
&\geq \sum_{i:|X_i-EX|\geq\epsilon} \epsilon^2 p_i \\
&= \epsilon^2 \sum_{i:|X_i-EX|\geq\epsilon} p_i \\
&= \epsilon^2 p(|X_i - EX| \geq \epsilon)
\end{aligned}
$$

a tedy

$$p(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{varX}{\epsilon^2}$$

Příklad: Demonstrovat sílu Čebyševovy nerovnosti ve srovnání s tím, co o sobě říká normální rozdělení.

$X \sim N(0,1)$.

1. Jaká je $p(|X| \geq 0)$?
2. Jaká je $p(|X| \geq 1)$?
3. Jaká je $p(|X| \geq 2)$?
4. Jaká je $p(|X| \geq 3)$?

Očekáváme, že dodatečná informace v podobě přesné znalosti rozdělení náhodné veličiny nám přinese přesnější výsledky.

Řešení:

Uvažme, že $EX = 0$.

1. $p(|X| \geq 0)$: Z Čebyševovy nerovnosti dostáváme

$$p(|X| \geq 0) = p(|X - EX| \geq 0) \leq \frac{varX}{0^2} = \frac{1}{0}$$

a z distribuční funkce

$$
\begin{aligned}
p(|X| \geq 0) &= p(|X - EX| \geq 0) \\
&= 2p(X - EX > 0) \\
&= 2p(X > 0) \\
&= 2(1 - p(X \leq 0)) \\
&= 2(1 - \Phi(0)) \\
&= 2(1 - 0,5) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Tedy Čebyševova nerovnost vlastně o hledané pravděpodobnosti nepřináší žádnou novou informaci: říká, že pravděpodobnost je nanejvýš nekonečná, což jsme věděli už dříve. Znalost rozdělení naproti tomu dává zcela přesnou odpověď: $p(|X| \geq 0) = 1$.

2. $p(|X| \geq 1)$:

$$p(|X| \geq 1) = p(|X - EX| \geq 1) \leq \frac{varX}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

a z distribuční funkce

$$\begin{aligned} p(|X| \geq 1) &= p(|X - EX| \geq 1) \\ &= 2p(X - EX \geq 1) \\ &= 2p(X \geq 1) \\ &= 2(1 - \Phi(1)) \\ &\doteq 2(1 - 0,84134) \\ &= 0,31732. \end{aligned}$$

3. $p(X \geq 2)$:

$$p(|X| \geq 2) = p(|X - EX| \geq 2) \leq \frac{varX}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

a z distribuční funkce

$$\begin{aligned} p(|X| \geq 2) &= p(|X - EX| \geq 2) \\ &= 2p(X - EX > 2) \\ &\dots \\ &= 0,04550. \end{aligned}$$

4. $p(|X| \geq 3)$:

$$p(|X| \geq 3) = p(|X - EX| \geq 3) \leq \frac{varX}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,111\dots$$

a z distribuční funkce

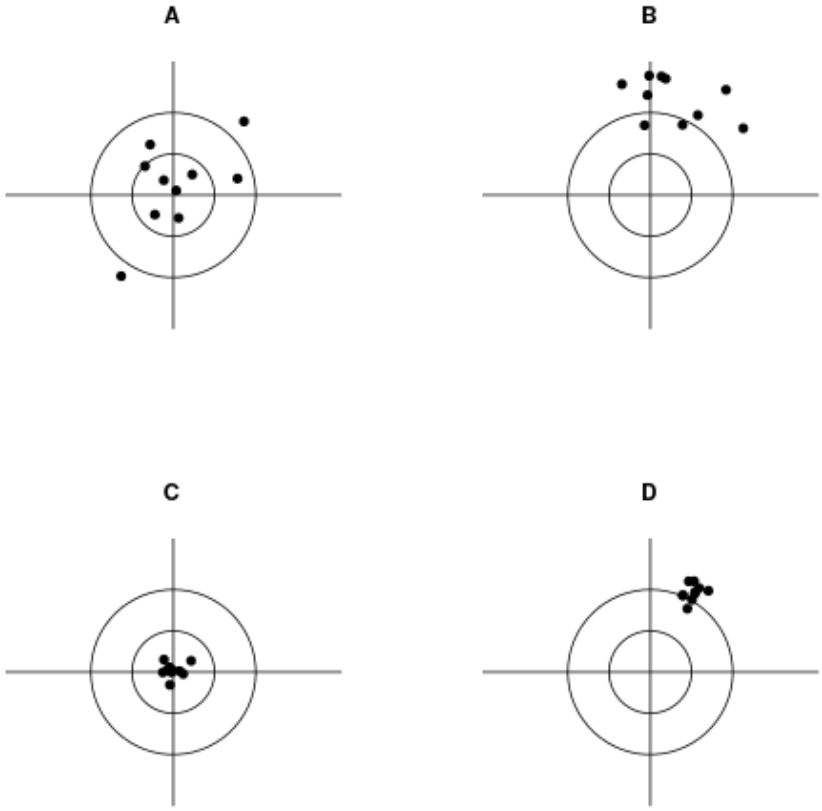
$$\begin{aligned} p(|X| \geq 3) &= p(|X - EX| \geq 3) \\ &= 2p(X - EX > 3) \\ &\dots \\ &= 0,00270. \end{aligned}$$

Na co tedy Čebyševova nerovnost je, když distribuční funkce nám dává mnohem více a přesnějších výsledků?

2 Odhady parametrů.

2.1 Odhad, druhy odhadů, vychýlení a rozptyl odhadu, konzistentní odhad

Příklad: Střelba na terč:



Obr. 3: Ilustrace vlastností odhadů (dvourozměrného) parametru. Odhady jsou znázorněny jako zásahy do terče. Skutečná hodnota parametru odpovídá středu terče, do něhož se jednotlivé odhady snaží více či méně úspěšně „strefit“. A: nevychýlené odhady s velkým rozptylem, B: vychýlené odhady s velkým rozptylem, C: nevychýlené odhady s malým rozptylem, D: vychýlené odhady s malým rozptylem.

2.2 Rozklad střední kvadratické chyby odhadu na systematickou chybu (vychýlení) a rozptyl

θ - skutečná (neznámá) hodnota parametru, T_i - odhady parametrů, ET - střední hodnota odhadů

$$
\begin{aligned}
E(T-\theta)^2 &= E(T-ET+ET-\theta)^2 \\
&= E[(T-ET)^2 + 2(T-ET)(ET-\theta) + (ET-\theta)^2] \\
&= E(T-ET)^2 + 2E(T-ET)\underbrace{(ET-\theta)}_{konstanta} + E\underbrace{(ET-\theta)^2}_{konstanta} \\
&= E(T-ET)^2 + 2(ET-\theta)\underbrace{E(T-ET)}_{=0} + (ET-\theta)^2 \\
&= varT + (ET-\theta)^2
\end{aligned}
$$

tedy střední kvadratická chyba je součtem rozptylu odhadu a čtverce vychýlení.

2.3 Metoda momentů

Příklad: Při vykopávkách bylo odhaleno několik kostí dinosaura. Archeologové mají představu o proporcích dinosaura a chtějí na základě nálezu restaurovat jeho celkovou velikost.

Řešení: Vzít jednu nebo více kostí, nějak chodně je charakterizovat (tj. spočítat nějakou funkci realizací náhodných veličin) a dát je do souvislosti s teoretickým modelem dinosaura (teoretickými protějšky odpovídajících funkcí, např. průměrná velikost atd.).

Je lepší vzít málo, nebo více kostí? (Více - proto se výběr charakterizuje momenty, které stavějí nad hodnotami všech pozorování, a ne třeba nad kvantily (které zohledňují uspořádání, ale ne přímo hodnoty všech jednotlivých realizací).)

Příklad: Odhad parametrů $N(\mu, \sigma^2)$.

2.4 Metoda maximální věrohodnosti

Věrohodnostní funkce (jako funkce parametrů a dat).

Příklad: Nekuřák a nedopalek. Potkáme známého, o němž víme, že je nekuřák. Pod ním však leží nedopalek. Co si pomyslíme - že jej zahodil on, nebo někdo jiný, kdo na daném místě byl před ním?

Věrohodnostní funkce $L(p; x)$ jako funkce dat x = „známý (ne)odhodil nedopalek“ za daných (pevných) parametrů p = „známý je nekuřák“:

- $L(p =$ *známý je nekuřák*; $x =$ *známý odhodil nedopalek*$)$ *je nízká,*
- $L(p =$ *známý je nekuřák*; $x =$ *známý neodhodil nedopalek*$)$ *je vysoká.*

Z hodnot věrohodnostní funkce vyhodnocené pro různá data („osoba odhodila nedopalek“, „osoba neodhodila nedopalek“) za pevných parametrů („osoba je nekuřák“) usoudíme, že věrohodnějším vysvětlením pozorované skutečnosti je, že nedopalek neodhodil náš známý-nekuřák, ale že nedopalek byl na zemi již dříve.

Příklad: Kuřák a nedopalek. Na rohu ulice vidíme stát člověka, o němž nevíme, zda kouří, nebo nekouří. Pod ním však leží nedopalek. Co si o tom člověku pomyslíme - že spíše kouří, nebo nekouří?

Věrohodnostní funkce $L(p; x)$ jako funkce neznámých parametrů p („osoba je kuřák“ nebo „osoba je nekuřák“) za daných dat (x = „pod osobou je nedopalek“):

- $L(p =$ *osoba je nekuřák*; $x =$ *pod osobou je nedopalek*$)$,
- $L(p =$ *osoba je kuřák*; $x =$ *pod osobou je nedopalek*$)$.

Hledáme takovou hodnotu parametru p, která maximalizuje věrohodnostní funkci $L(p; x)$. Takovou hodnotu parametru p pak prohlásíme za maximálně věrohodný odhad parametru p. (V našem případě

bude asi věrohodnějším vysvětlením to, že osoba je kuřák, který odhodil nedopalek. Pokud bychom však měli vážný důvod domnívat se, že nedopalek byl na chodníku již dříve, byla by věrohodnost obou výše uvedených případů stejná a maximálně věrohodný odhad by tak nebyl jednoznačně určen.)

2.5 Příklady na metodu maximální věrohodnosti a momentovou metodu

Příklad: Z jediné realizace x_1 náhodné veličiny X, o níž víte, že pochází z normálního rozdělení $N(\mu, 1)$, odhadněte parametr μ momentovou metodou a metodou maximální věrohodnosti.

1. Budou odhady nestranné?
2. Jaké budou mít rozptyly?
3. Budou konzistentní?

Kolik a jakých momentů použijete?

Řešení:

1. Momentovou metodou: Stačí jediný moment: $EX = \mu$ odhadneme pomocí x_1: $\hat{\mu} = m_X = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1$. Odhad $\hat{\mu} = x_1$ je nestranný, protože $EX_1 = \mu$. (Všimněte si, že v posledním výrazu vystupuje nikoli realizace x_1, ale náhodná veličina X_1 - pouze z ní má totiž smysl počítat střední hodnotu, protože nás zajímá, jak se odhad bude chovat pro *různé* realizace, nikoli pro jednu jedinou realizaci x_1.)

   Metodou maximální věrohodnosti: věrohodnostní funkce je

   $$L(\mu, \sigma^2;\ x_1) = f_X(x_1|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

   a my bychom ji chtěli maximalizovat vzhledem k hledaným parametrům (tj. maximalizovat věrohodnost za daných dat a získat hledané neznámé parametry). Protože hledat extrém věrohodnostní funkce není jednoduché, zjednodušíme situaci tím, že místo věrohodnostní funkce budeme maximalizovat její logaritmus (protože logaritmus je ryze monotónní, bod, v němž nabývá věrohodnostní funkce maximum, je přesně týž, jako bod, v němž nabývá maxima logaritmovaná věrohodnostní funkce).

   Logaritmická věrohodnostní funkce je

   $$l(\mu, \sigma^2; x_1) = -\frac{1}{2} ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln(\sigma^2) - \frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}. \tag{18}$$

   Její extrém budeme hledat tak, že položíme její derivaci rovnu 0. Protože se jedná o funkci dvou proměnných, mohli bychom postupně derivovat podle jejích jednotlivých parametrů. Nám bude pro tentokrát stačit nalézt hodnotu parametru μ. Tu nalezneme, položíme-li parciální derivaci podle μ rovnu 0:

   $$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x_1)}{\partial \mu} = -\frac{2(x_1-\mu)(-1)}{2\sigma^2} = \frac{(x_1-\mu)}{\sigma^2} = 0$$

   a tedy

   $$\hat{\mu} = x_1$$

2. Rozptyl odhadu: $var\hat{\mu} = varX = \sigma^2$.
3. Budou odhady konzistentní? Nelze přímo určit, protože ke konzistenci bychom potřebovali vysledovat chování odhadů pro zvětšující se velikosti výběrů, ale my máme k dispozici pouze jediné pozorování.

Příklad: Ze dvou realizací x_1, x_2 náhodné veličiny X, o níž víte, že pochází z normálního rozdělení $N(\mu, 1)$, odhadněte parametr μ momentovou metodou a metodou maximální věrohodnosti.

Řešení:

1. Momentovou metodou: Opět stačí jediný moment: $EX = \mu$ odhadneme pomocí prvního výběrového momentu: $\hat{\mu} = m_X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} x_i = \frac{x_1+x_2}{2}$. Odhad $\hat{\mu}$ je nestranný, protože $E\frac{X_1+X_2}{2} = \frac{EX_1+EX_2}{2} = \frac{\mu+\mu}{2} = \mu$.

   Metodou maximální věrohodnosti: věrohodnostní funkce je

   $$L(\mu, \sigma^2; x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{2} f_X(x_i|\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   potom logaritmická věrohodnostní funkce je

   $$\begin{aligned} l(\mu, \sigma^2; x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^{2} \Big(-\frac{1}{2} ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln(\sigma^2) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big) \\ &= -\frac{2}{2} ln(2\pi) - \frac{2}{2} ln(\sigma^2) - \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

   a hodnotu parametru μ nalezneme, položíme-li parciální derivaci podle μ rovnu 0:

   $$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x_1, x_2)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{2} \frac{2(x_i-\mu)(-1)}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0$$

   $$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i}{2} = \bar{x}$$

2. Rozptyl odhadu: $var\hat{\mu} = var\frac{X_1+X_2}{2} = \frac{varX_1+varX_2}{4} = \frac{\sigma^2+\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$. Tedy tento odhad bude mít rozptyl poloviční ve srovnání s odhadem pořízeným z jediné realizace.

3. Budou odhady konzistentní? Nelze přímo určit, protože ke konzistenci bychom potřebovali vysledovat chování odhadů pro zvětšující se velikosti výběrů, ale my máme k dispozici pouze dvě pozorování.

Příklad: (Pokračování přechozího příkladu.) Co kdybyste pro odhad parametr použili pouze poslední realizaci x_2?

- Jak se změní odhady?
- Budou lepší, než minulé odhady?
- Budou nestranné?
- Jaké budou mít rozptyly?
- Budou konzistentní?

Řešení: Dostali bychom stejný odhad jako v případě, že máme jedinou realizaci. Odhad střední hodnoty bude nestranný, ale ve srovnání s odhadem založeným na dvou realizacích bude mít dvojnásobný rozptyl.

Příklad: (Pokračování přechozího příkladu.) Co kdybyste pro odhad parametrů použili větší z realizací, tj. $max(x_1, x_2)$? Jak se změní odhady?

Řešení: Odhad tentokrát nebude nestranný - tím, že za odhad bereme větší ze dvou realizací, střední hodnota takového odhadu bude větší, než střední hodnota samotné realizace.

Příklad: Z jediné realizace x_1 náhodné veličiny X o níž víte, že pochází z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, odhadněte parametry μ a σ^2 momentovou metodou a metodou maximální věrohodnosti.

Řešení:
Momentovou metodou oba parametry z jediné relizace odhadnout nelze.

Metodou maximální věrohodnosti: parametr μ odhadneme hodnotou dané relizace x_1 (viz výše). Parametr σ^2 odhadneme maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce (18) vzhledem k σ^2, hledáme tedy extrém $l(\mu, \sigma^2; x_1)$ vzhledem k σ^2, tedy parciální derivaci $l(\mu, \sigma^2; x_1)$ podle σ^2 položíme rovnu nule:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x_1)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x_1 - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0$$

a po úpravě (vynásobení $2(\sigma^2)^2$)

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2$$

a vzhledem k tomu, že $\hat{\mu} = x_1$,

$$\sigma^2 = (x_1 - x_1)^2 = 0.$$

Vidíme, že věrohodnost se maximalizuje pro $\widehat{\sigma^2} = 0$, tedy pro degenerované (singulární) rozdělení s nulovým rozptylem, v němž je všechna hustota soustředěna v jediném bodu x_1.

Souvislost s uvíznutím E-M algoritmu v lokálním minimu odpovídajícím singulárním variančním maticím.

Příklad: Odhad parametrů $N(\mu, \sigma^2)$ z více realizací.

Řešení: viz přednáška

Příklad: Odhad parametrů alternativního rozdělení $Alt(p)$ z realizací $0, 0, 1$.

Řešení: Alternativního rozdělení je popsáno pravděpodobnostmi

$$f_{Alt}(X = 1) = p$$

a

$$f_{Alt}(X = 0) = 1 - p,$$

kde p je pravděpodobnost úspěchu (jevu 1).

Věrohodnostní funkce pak je součin pravděpodobností jednotlivých realizací za dané hodnoty parametru p:

$$\begin{aligned} L(p; \{0, 0, 1\}) &= \prod_{i=1}^{3} f_{Alt}(x_i|p) \\ &= (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot p \\ &= (1 - p)^2 p. \end{aligned}$$

Tuto funkci bychom mohli již přímo maximalizovat (to by vedlo ke kvadratické rovnici), nebo můžeme podobně jako dříve tuto funkci logaritmovat a úlohu si zjednodušit.

Logaritmická věrohodnostní funkce pak je

$$l(p; \{0, 0, 1\}) = 2ln(1 - p) + ln(p)$$

a její derivace podle p položíme rovnu 0:

$$\frac{l(\{0,0,1\},p)}{\partial p} = 2\frac{-1}{1-p} + \frac{1}{p} = 0$$

a po úpravě (vynásobení $p(1-p)$)

$$\begin{aligned} 2\hat{p} &= (1-\hat{p}) \\ 3\hat{p} &= 1 \\ \hat{p} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Odhadem parametru p metodou max. věrohodnosti je tedy $\hat{p} = 1/3$.

Poznámka: ke stejnému výsledku by vedlo i to, pokud bychom daný počet jedniček ve sledu tří nezávislých realizací náhodné alternativní veličiny považovali za jedinou realizaci náhodné veličiny mající binomické rozdělení. Věrohodnostní funkce by pak byla

$$L(p;\{0,0,1\}) = \binom{3}{1} p(1-p)^2,$$

což by vedlo ke stejnému výsledku.

Příklad: Házíme mincí, u níž se obáváme, že je falešná: panna údajně padá 2x častěji než orel. Spočtěte věrohodnost tohoto tvrzení na základě pozorování, že padl 2x orel. Spočtěte rovněž věrohodnost pozorovaných dat pro případ, že mince není falešná. Dále z dat odhadněte pravděpodobnost, že padá panna, metodou maximální věrohodnosti a momentovou metodou.

Řešení: Náhodný jev modelujeme alternativním rozdělením s parametrem p vyjadřujícím pravděpodobnost, že padne panna. Pak věrohodnost pozorovaného sledu dvou orlů je:

$$L(p;x) = L(p;\{0,0\}) = (1-p)^2.$$

Pro očekávanou falešnou minci, kde $p = \frac{2}{3}$ dostáváme $L(\frac{2}{3};\{0,0\}) = \frac{1}{9}$. Pro férovou minci, kde $p = \frac{1}{2}$ dostáváme $L(\frac{1}{2};\{0,0\}) = \frac{1}{4}$. Věrohodnější tedy je, že mince je férová.

Odhad p metodou maximální věrohodnosti: věrohodnost $L(p;x) = L(p;\{0,0\}) = (1-p)^2$ se maximalizuje pro $\hat{p} = 0$.

Odhad p momentovou metodou: První obecný (necentrální) moment alternativního rozdělení

$$M_1^{'} = EX = p$$

položíme roven odpovídajícímu výběrovému obecnému momentu $m_1^{'} = \bar{x}$, tedy:

$$p = M_1^{'} = m_1^{'} = \bar{x}$$

a odtud přímo dostáváme odhad $\hat{p}$:

$$\hat{p} = \bar{x} = 0.$$

Oba odhady si jsou tedy rovny.

Příklad: Metodou maximální věrohodnosti a momentovou metodou odhadněte na základě pozorovaných $x_1, \ldots, x_n$ neznámý parametr λ Poissonova rozdělení:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Řešení:

Metodou maximální věrohodnosti:

$$L(\lambda;\{x_1,\ldots,x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$\ell(\lambda;\{x_1,\ldots,x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \ln\lambda - \lambda - \ln x_i!)$$

$$\ell(\lambda;\{x_1,\ldots,x_n\}) = \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda;\{x_1,\ldots,x_n\})}{\partial\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Momentovou metodou: První obecný moment Poissonova rozdělení

$$M_1^{'} = EX = \lambda$$

položíme roven odpovídajícímu výběrovému obecnému momentu $m_1^{'} = \bar{x}$, tedy:

$$\lambda = M_1^{'} = m_1^{'} = \bar{x}$$

a odtud přímo dostáváme odhad

$$\hat{\lambda} = \bar{x}.$$

Oba odhady si jsou tedy rovny.

Příklad: Metodou maximální věrohodnosti a momentovou metodou odhadněte na základě pozorovaných $x_1,\ldots,x_m$ neznámý parametr p binomického rozdělení $Bi(n=10,p)$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Řešení: Metodou maximální věrohodnosti:

$$L(p;\{x_1,\ldots,x_m\}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}$$

$$\ell(p;\{x_1,\ldots,x_m\}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\ln\binom{n}{x_i} + x_i \ln p + (n-x_i)\ln(1-p) \right)$$

$$\frac{\partial \ell(p;\{x_1,\ldots,x_m\})}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(n-x_i)}{1-p}$$

$$\frac{\partial \ell(p;\{x_1,\ldots,x_m\})}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{p} + \frac{mn - \sum_{i=1}^{m} x_i}{1-p} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i - p\sum_{i=1}^{m} x_i = mnp - p\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = mnp$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{mn}$$

Momentovou metodou: První obecný moment binomického rozdělení

$$M_1^{'} = EX = np$$

položíme roven odpovídajícímu výběrovému obecnému momentu $m_1^{'} = \bar{x}$, tedy:

$$np = M_1^{'} = m_1^{'} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m}$$

a odtud přímo dostáváme odhad

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{mn}$$

Oba odhady si jsou tedy opět rovny.

Příklad: Metodou maximální věrohodnosti a momentovou metodou odhadněte na základě pozorovaných $x_1, \ldots, x_n$ neznámé parametry a, b rovnoměrného rozdělení $R(a, b)$ na intervalu $[a, b]$).

Řešení: Metodou maximální věrohodnosti:

$$L(a, b; \{x_1, \ldots, x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n$$

$$\ell(a, b; \{x_1, \ldots, x_n\}) = n \ln \frac{1}{b-a} = -n \ln(b-a).$$

Tato věrohodnost se maximalizuje pro co nejmenší $b - a$. Ovšem $b - a$ musí být natolik veliké, aby interval $[a, b]$ pokryl všechna pozorování x_i. Tedy vychází, že

$$\hat{a} = min_{i=1}^{n} x_i$$
$$\hat{b} = max_{i=1}^{n} x_i$$

Momentovou metodou: První obecný moment rovnoměrného rozdělení

$$M_1^{'} = EX = \frac{a+b}{2}$$

položíme roven odpovídajícímu výběrovému obecnému momentu $m_1^{'} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$, tedy:

$$\frac{a+b}{2} = M_1^{'} = m_1^{'} = \bar{x}.$$

a dostáváme

$$\widehat{\frac{a+b}{2}} = \bar{x}.$$

Víme (nebo vypočítáme), že druhý obecný moment rovnoměrného rozdělení je

$$M_2^{'} = EX^2 = E(X - EX)^2 + (EX)^2 = varX + (EX)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + (M_1^{'})^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

a po dosazení z předešlé rovnice tedy

$$M_2^{'} = \frac{(b-a)^2}{12} + (\bar{x})^2.$$

Přitom $varX$ se spočítá přímo z definice jako:

$$varX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - EX)^2 dx = \int_a^b f(x)(x - EX)^2 dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$\overset{h=\frac{b-a}{2},\ y=x-\frac{a+b}{2}}{=} \int_{-h}^{h} \frac{1}{2h} y^2 dy = \frac{1}{2h}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h}^{h} = \frac{1}{2h}\left[\frac{h^3}{3} - \frac{(-h)^3}{3}\right] = \frac{1}{2h}\left[\frac{2h^3}{3}\right] = \frac{h^2}{3} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Druhý obecný moment rovnoměrného rozdělení pak položíme roven odpovídajícímu výběrovému obecnému momentu $m_2^{'} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, tedy:

$$\frac{(b-a)^2}{12} + (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\widehat{b-a} = \sqrt{12\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2\right)}$$

V tomto případě se tedy odhady momentovou metodou a metodou maximální věrohodnosti liší.

2.6 Intervalové odhady

Příklad: Na pracovní schůzce se svým šéfem - lékařem internistou dostáváte za úkol odhadnout co nejpřesněji glykémii (koncentraci glukózy v krvi $[mmol/l]$) u pacientů s určitou formou těžké cukrovky. Víte, že u zdravých lidí jsou hodnoty glykemie typicky v rozmezí cca $3-6mmol/l$, ale u pacientů s danou nemocí se očekává, že glykemie bude nabývat mnohem vyšších hodnot, u všech pacientů podobných. Lékaři odhadují, že směrodatná odchylka naměřených hodnot koncentrace glukózy u sledovaných pacientů je $s = 4mmol/l$. Navíc prozatím máte k dispozici pouze jediné měření: $x_1 = 11,3mmol/l$.

1. Vhodným způsobem graficky znázorněte rozložení pravděpodobnosti náhodné veličiny „glykémie u daných pacientů“ - načtrtněte hustotu.

2. Naznačte oblast A, pro kterou $P(X \in A) = 95\%$. Je oblast symetrická? Lze najít jinou takovou oblast? Interpretujte danou oblast. Ověřte, že jste oblast našli správně pomocí numerické simulace.

3. Zkonstruujte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu glykemie. Interpretujte daný interval. Jste spokojeni s jeho přesností? Přesnost je malá – jak to zlepšit?

Řešení: Dobrým modelem pro rozdělení pravděpodobnosti hodnot glykémie u sledovaných pacientů může být normální rozdělení, protože na základě centrální limitní věty víme, že pokud sledovanou veličinu ovlivňuje podobným způsobem více nezávislých faktorů, které se navzájem kombinují, výsledkem je (při velkém počtu faktorů) normální rozdělení. (Pokud totiž např. každý z faktorů může nezávisle na ostatních buď zvyšovat nebo snižovat sledovanou hodnotu (a zvýšení i snížení je stejně pravděpodobné), nejpravděpodobnější situace je taková, že polovina faktorů působí negativně a polovina pozitivně. Situace, že by např. všechny faktory působily snížení, je velmi nepravděpodobná.)

Oblast A je definována jako interval (q_d, q_h), kde $F_X(q_h) - F_X(q_l) = 0,95$.

Oblasti mohou být různé, typicky však budeme mluvit o symetrické oblasti (pro oboustrannou alternativu, tj. když chyby na obou stranách jsou stejně důležité či očekávatelné).

Interpretace oblasti A: při opakovaných náhodných výběrech budou realizace náhodné veličiny glykémie ležet v oblasti A v 95% případů. V tomto pohledu je tedy pravděpodobnost, že daná náhodná veličina nabývá hodnoty z daného intervalu, rovna 95%. Viz obr. 4.

Podobně lze konstruovat oblast, v níž se budou často nacházet průměry náhodných výběrů o dané velikosti (viz obr. 4).

Inteval spolehlivosti pro střední hodnotu naproti tomu bude definován kolem výběrového průměru a bude roven $(\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}))$.

Příklad: (Pokračování.) Na další schůzce jste seznámeni s požadavkem odhadnout glykémii u dané nemoci s danou přesností – s přesností na 1 desetinné místo. Kolik pacientů budete muset vyšetřit?

Řešení: Tento požadavek nelze splnit. Co totiž znamená požadavek “naměřit glykémii s přesností na 1 desetinné místo”? Patrně znamená, že chceme, aby naměřená hodnota glykémie včetně nepřesnosti

v jejím odhadu (tedy její interval spolehlivosti) ležel(a) v intervalu, jehož oba konce, zaokrouhleny na jedno desetinné místo, budou totožné. Protože však interval spolehlivosti konstruovaný kolem výběrového průměru má pro konečné výběry nenulovou šířku, a protože výběrový průměr může ležet velmi blízko hranice, kde se láme zaokrouhlování, nelze obecně (dopředu) zaručit, že by se konce intervalu spolehlivosti nezaokrouhlovaly na různá čísla (např. při výběrovém průměru $11,349 mmol/l$ by interval spolehlivosti mohl být $[11,348,\ 11,350) mmol/l$, tedy po zaokrouhlení na $[11,3,\ 11,4) mmol/l$ a bychom glykémii s přesností na 1 desetinné místo nezískali.

Příklad: (Pokračování.) Na další schůzce je navrženo, abyste garantovali, že vzdálenost odhadu od skutečné hodnoty nebude větší než $0,1 mmol/l$. Spočtěte počet pacientů, které je třeba vyšetřit.

Řešení: Tento požadavek také nelze splnit. Při konstrukci interval spolehlivosti z konečného počtu pozorování nelze omezit pravděpodobnost chyby na 0% (tj. zajistit 100% spolehlivost).

Příklad: (Pokračování.) Na další schůzce je tedy požadováno, abyste alespoň garantovali, že vzdálenost odhadu od skutečné hodnoty nebude s pravděpodobností 95% větší než $0,1 mmol/l$. Spočtěte počet pacientů, které je třeba vyšetřit.

Řešení: Interval spolehlivosti kolem výběrového průměru $\bar{X}$ z výběru velikosti n je při známém rozptylu σ^2 roven

$$\left(\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\right).$$

Chceme, aby

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = 0,1$$

a tedy

$$n = \left(\frac{\sigma}{0,1}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\right)^2$$
$$n \approx (\frac{4}{0,1}1,96)^2 = 78,4^2 = 6146,56$$

K odhadu, jehož vzdálenost od skutečné hodnoty nebude vyšší než $0,1$, bychom tedy potřebovali alespoň 6147 pacientů. Je to reálné?

Příklad: (Pokračování.) Počet pacientů vypočítaný v minulém příkladě je v běžných podmínkách nereálný. Jaký odhad by se dal zkonstruovat v případě, že počet pacientů by byl 100-krát nižší?

Řešení: Vyjdeme ze vztahu velikosti výběru n, šířky intervalu spolehlivosti Δ a požadované spolehlivosti α:

$$n = \left(\frac{\sigma}{\Delta}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2. \tag{19}$$

Pro stonásobně snížení n bychom mohli:

- zvětšit šířku intervalu spolehlivosti Δ desetkrát, nebo
- v případě, že směrodatná odchylka je z velké míry určena chybou měření (nikoli biologickou variabilitou), požadovat vyšší přesnost měření, tedy snížit rozptyl σ^2 100-krát (tedy směrodatnou odchylku σ 10-krát), nebo
- snížit z nároků na spolehlivost daného intervalu spolehlivosti, a kýženou spolehlivost bychom

mohli spočítat z 19 jako

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} &= \frac{\sigma}{\Delta}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\\
\sqrt{n}\frac{\Delta}{\sigma} &= \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\\
1-\frac{\alpha}{2} &= \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\left(1-\Phi\left(\sqrt{n}\frac{\Delta}{\sigma}\right)\right)\\
\alpha &= 2\Phi\left(-\sqrt{n}\frac{\Delta}{\sigma}\right)\\
\alpha &= 2\Phi\left(-\sqrt{62}\frac{0,1}{4}\right) \doteq 2\Phi(-0,1969)\\
\alpha &\doteq 0,844
\end{aligned}$$

(Tímto způsobem bychom tedy zkonstruovali $15,6\%$ interval spolehlivosti. (Jak byste jej interpretovali? Jak je užitečný?))

Příklad: (Intervalový odhad při neznámém rozptylu.) Měření systolického krevního tlaku 15 osob dalo průměrnou hodnotu $116,3mmHg$ a výběrovou směrodatnou odchylku $5,4mmHg$. Vypočtěte 95% interval spolehlivosti střední hodnoty krevního tlaku.

Jaký interval byste dostali, kdybyste hodnotu výběrové směrodatné odchylky považovali za pevnou?

Řešení: Interval spolehlivosti kolem výběrového průměru $\bar{X}$ z výběru velikosti n je při neznámém rozptylu odhadnutém jako s_X^2 roven

$$\left(\bar{X}+\frac{s_X}{\sqrt{n}}qt_{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \bar{X}+\frac{s_X}{\sqrt{n}}qt_{(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

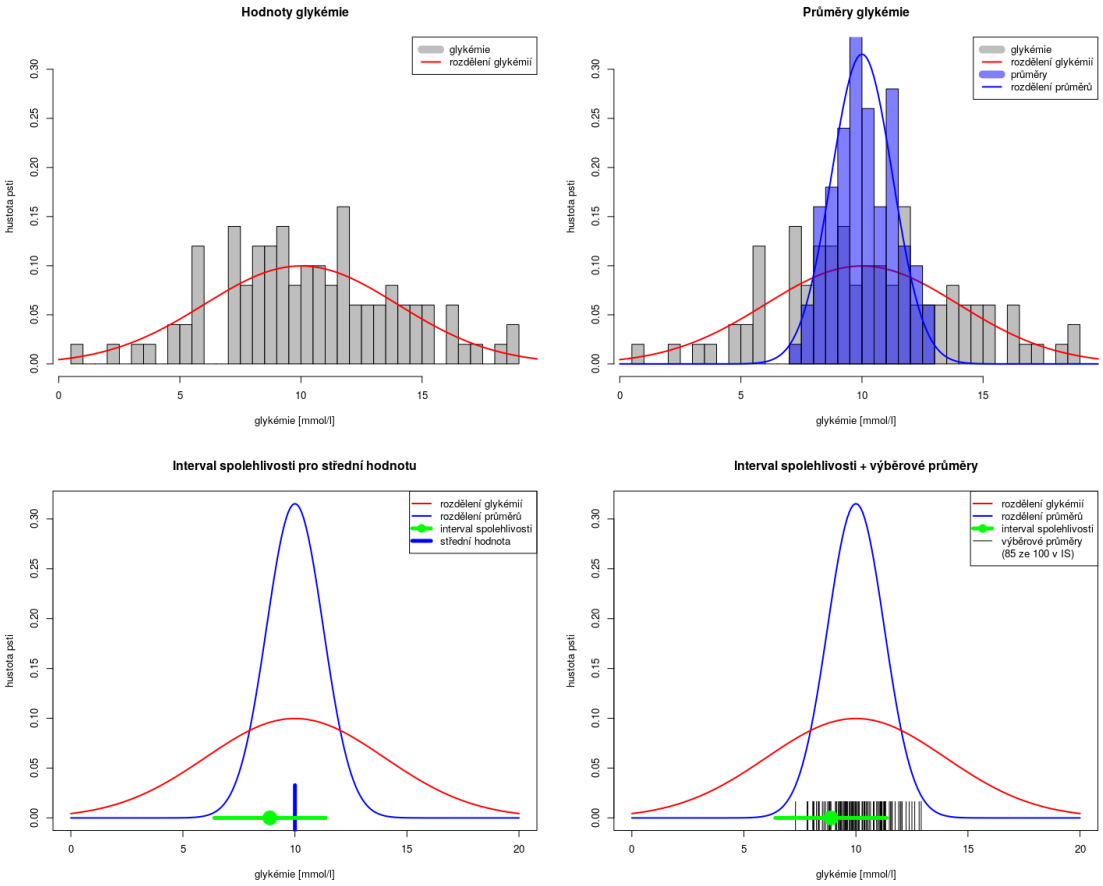
a vyčíslen je na

$$\begin{aligned}
&\left(116,3+\frac{5,4}{\sqrt{15}}qt_{14}(2,5\%), 116,3+\frac{5,4}{\sqrt{15}}qt_{14}(97,5\%)\right)\\
&\doteq 116,3+1,394\cdot(-2,145); 116,3+1,394\cdot 2,145)\\
&\doteq (116,3-2,99; 116,3+2,99)\\
&\doteq (113,31; 119,29)
\end{aligned}$$

Pro srovnání: pokud bychom předem znali rozptyl (a nemuseli jej odhadovat z dat) a náhodou by směrodatná odhylka byla rovna hodnotě výběrové směrodatné odchylky, dostali bychom interval:

$$\begin{aligned}
&\left(116,3+\frac{5,4}{\sqrt{15}}\Phi^{-1}(2,5\%), 116,3+\frac{5,4}{\sqrt{15}}\Phi^{-1}(97,5\%)\right)\\
&\doteq 116,3+1,394\cdot(-1,96); 116,3+1,394\cdot 1,96)\\
&\doteq (116,3-2,73; 116,3+2,73)\\
&\doteq (113,57; 119,03)
\end{aligned}$$

Všimněte si, že tento interval se liší pouze v použité kvantilové funkci a že při stejné hodnotě směrodatné odchylky (teroretické i výběrové) vychází interval spolehlivosti širší v případě neznámého (odhadovaného) rozptylu, než v případě, že rozptyl je předem znám. Proč?



Obr. 4: Ilustrace intervalu spolehlivost pro střední hodnotu.

3 Testování hypotéz

3.1 Nulová a alternativní hypotéza

3.2 Testová statistika a její rozdělení

3.3 Kritický obor, kritická hodnota za H_0

3.4 P-hodnota testu

3.5 Chyba 1. a 2. druhu, síla testu

3.6 ROC křivka

3.7 Jednovýběrový t-test

Příklad: Hmotnost vyráběné pilulky lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $120mg$ a rozptylem $36mg^2$. Výstupní kontrola testuje, zda tomu tak skutečně je. Náhodný vzorek 10 pilulek byl zvážen a byla spočtena jejich průměrná hmotnost $124mg$.

1. Odpovídá vzorek požadované kvalitě pilulek?
   (a) formulujte nulovou a alternativní hypotézu
   (b) navrhněte vhodnou testovou statistiku
   (c) načrtněte rozdělení testové statistiky
   (d) najděte kritický obor (kritickou hodnotu) testu
   (e) proveďte test a vyslovte závěr
2. Odpovídá vzorek požadované kvalitě i v případě, když nebudeme vědět, jaký rozptyl má hmotnost pilulek? (Tj. pouze víme, že hmotnost vyráběné pilulky lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $120mg$ a s neznámým rozptylem.) Předpokládejme, že si navíc spočteme (nevychýlený) výběrový rozptyl v hodnotě $36mg^2$. *Co kdybychom použili vychýlený výběrový rozptyl?*
3. Jaká je pravděpodobnost chyby 1. druhu výše uvedených testů?
4. Jaká je pravděpodobnost chyby 2. druhu výše uvedených testů? *Potřebujeme k tomu znát něco navíc? (Navíc budeme předpokládat, že očekáváme problém s příliš těžkými pilulkami se střední hodnotou* $125mg$*.)*
5. Kolik pilulek bychom museli odebrat, aby pravděpodobnost neodhalení nekvalitního vzorku byla max. 10%?
   - určete pro případ se známým rozptylem i bez něj

Řešení:

1. Odpovídá vzorek požadované kvalitě pilulek?
   (a) Uvažujeme-li model $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde X je (náhodná veličina) hmotnost pilulky, μ je střední hodnota veličiny X (za optimistického předpokladu správně vyrobených pilulek bude rovna $120mg$), a $\sigma^2 = 36mg^2$. Nulová hypotéza potom vyjadřuje naše optimistické očekávání, tedy:

$$H_0 : \mu = 120mg. \tag{20}$$

   Druhou možností je alternativní hypotéza:

$$H_A : \mu \neq 120mg \tag{21}$$

(b) Testová statistika je nějaká vhodná funkce náhodného výběru (vzorku 10ti pilulek), která vhodně sumarizuje vše důležité z tohoto vzorku do jediného čísla. V našem případě bude roli testové statistiky hrát průměrná hmotnost 10ti pilulek, $\bar{X}_{10}$. Testovou statistiku budeme chápat jednak jako náhodnou veličinu $\bar{X}_{10}$ (tedy něco, co neznáme, co nemáme naměřeno, co je náhodné, ale přesto o tom můžeme ledacos říct - můžeme to zkoumat probabilisticky), jednak jako její realizaci $\bar{x}_{10}$ (průměr konkrétního vzorku 10ti vybraných pilulek).

(c) Rozdělení testové statistiky za nulové hypotézy můžeme snadno odvodit ze znalosti rozdělení hmotnosti jednotlivých pilulek. Protože za nulové hypotézy víme, jaké rozdělení má náhodná veličina X (hmotnost jedné pilulky):

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \tag{22}$$

víme, že

$$\bar{X}_{10} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{10}), \tag{23}$$

protože

$$E\bar{X}_{10} = E\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i \tag{24}$$

$$= \frac{1}{10}E\sum_{i=1}^{10} X_i \tag{25}$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} EX_i \tag{26}$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} \mu \tag{27}$$

$$= \mu \tag{28}$$

a

$$var\bar{X}_{10} = \frac{varX}{10}, \tag{29}$$

což pro ilustraci ukážeme pro průměr dvou stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin X_1 a X_2:

$$\begin{aligned}
var\frac{X_1+X_2}{2} &= \frac{1}{4}var(X_1+X_2) \\
&= \frac{E(X_1+X_2-EX_1-EX_2)^2}{4} \\
&= \frac{E[(X_1-EX_1)+(X_2-EX_2)]^2}{4} \\
&= \frac{E[(X_1-EX_1)^2+2(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)+(X_2-EX_2)^2]}{4} \\
&= \frac{E(X_1-EX_1)^2+2E[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]+E(X_2-EX_2)^2}{4} \\
&= \frac{varX_1+2cov(X_1,X_2)+varX_2}{4} \\
&= \frac{\sigma^2+0+\sigma^2}{4} \text{ (protože pro } X_1, X_2 \text{ nezávislé } cov(X_1,X_2)=0) \\
&= \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

Rozdělením testové statistiky je tedy normální rozdělení se střední hodnotou $120mg$ a rozptylem $3,6mg^2$.

(d) Kritický obor je taková „oblast“ (množina reálných čísel) testových statistik, při kterých budeme zamítat nulovou hypotézu. Budeme chtít, aby za platnosti nulové hypotézy testová statistika do kritického oboru padala co nejméně (s maximální definovou chybou 1. druhu α, označovanou jako hladinu testu a odpovídající falešné pozitivitě), ale za platnosti alternativní hypotézy do něj padala naopak co nejvíce (aby aby byla pravděpodobnost, že test neplatnou nulovou hypotézu zamítne, co největší - mluvíme o síle testu a jejím doplňku do 1, tzv. chybě 2. druhu β, která odpovídá falešné negativitě, a kterou chceme minimalizovat).

Kritický obor stanovíme na základě požadavku na maximální dovolenou chybu 1.druhu, tj. hladinu testu, kterou standardně volíme $\alpha = 0.05$.

Kritický obor bude část reálné osy mimo oblast, v níž lze za H_0 očekávat $100(1-\alpha)\%$ testových statistik $\bar{X}_{10}$, tedy sjednocení

$$\begin{aligned}
&(-\infty, F^{-1}_{N(\mu,\frac{\sigma^2}{10})}(\alpha/2)] &\cup\quad & [F^{-1}_{N(\mu,\frac{\sigma^2}{10})}(1-\alpha/2), \infty)\\
&= (-\infty, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\Phi^{-1}\big(\alpha/2\big)] &\cup\quad & [\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\Phi^{-1}\big(1-\alpha/2\big)], \infty)\\
&= (-\infty, 120 + \frac{6}{\sqrt{10}}(-1,96)] &\cup\quad & [120 + \frac{6}{\sqrt{10}}1,96, \infty)\\
&= (-\infty,\ 116,281] &\cup\quad & [123,719,\ \infty)
\end{aligned}$$

Můžeme však postupovat i tak, že nekonstruujeme kritický obor v měřítku testové statistiky (tedy tak, že škálujeme a posouváme kvantily normálního rozdělení, viz obr. 5 nahoře), ale naopak tak, že realizaci testové statistiky normujeme tak, aby „seděla“ s kvantily normovaného normálního rozdělení (obr. 5 dole):

$$t_{\text{normovaná}} = \frac{\bar{x}_{10} - 120}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}} = \frac{124 - 120}{\frac{6}{\sqrt{10}}} \doteq \frac{4}{1,897} \doteq 2,108,$$

takže ji v našem případě oboustranného testu můžeme jednoduše porovnat s kritickou hodnotou a H_0 zamítnout, když

$$|t_{\text{normovaná}}| > \Phi^{-1}\big(1-\alpha/2\big).$$

(e) Provedení testu:

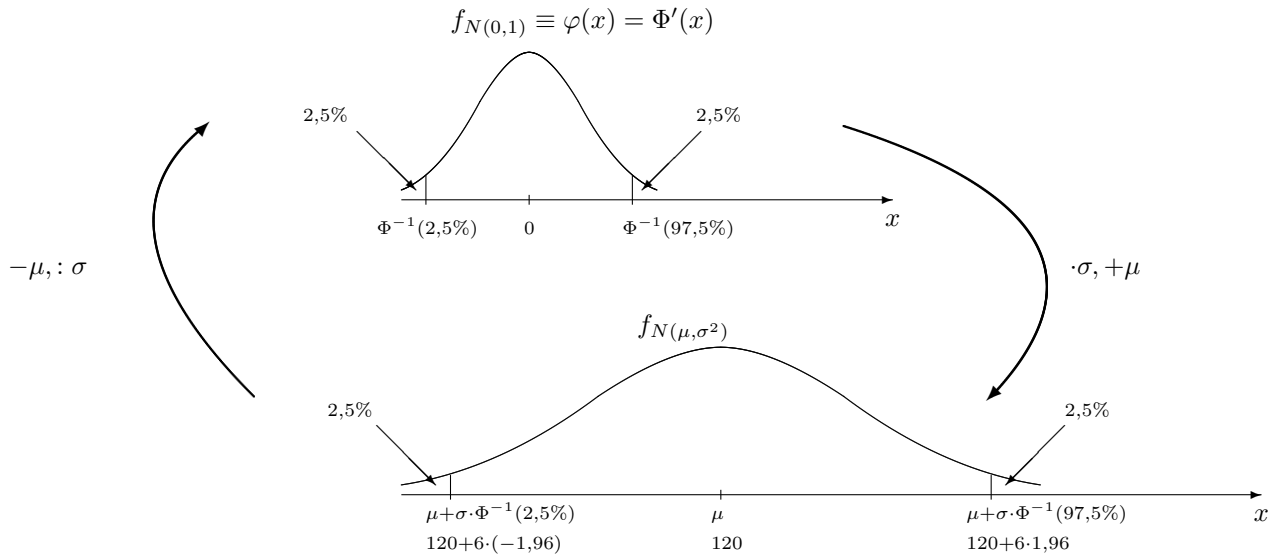
- Na základě kritického oboru:
  Protože testová statistika $t = \bar{X}_{10} = 124mg$ padne do kritického oboru $(-\infty, 116,281] \cup [123,719, \infty)$, zamítáme na hladině 5% nulovou hypotézu, že hmotnost pilulek je rovna jejich nominální hodnotě.
- Na základě kritické hodnoty:
  Ekvivalentně můžeme v případě oboustranné alternativy test provést tak, že testovou statistiku porovnáme s kritickou hodnotou. Kritickou hodnotu bychom mohli v našem případě oboustranného testu stanovit např. jako vzdálenost spodní hranice horní části kritického oboru od $120mg$ (střední hodnoty za H_0), tedy jako hodnotu $3,719$, s níž porovnáme vzdálenost testové statistiky od střední hodnoty za H_0, a H_0 zamítneme, pokud

  $$|t - \mu| > \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\Phi^{-1}(97,5\%) \doteq \frac{6}{\sqrt{10}} \cdot 1,96 \doteq 3,719,$$

  tedy pokud

  $$4 > 3,719.$$

  Poznamenejme, že běžné bývá takový test založený na kritické hodnotě konstruovat nikoli na škále pozorování (s hodnotou testové statistiky $124mg$), ale testovou



Obr. 5: Vztah mezi normovaným normálním rozdělením (nahoře) a obecným normálním rozdělením (dole). Chceme-li kvantil normovaného rozdělení převést do rozdělení obecného, naškálujeme jej (vynásobením σ) a posuneme (přičtením μ, tučná šipka vpravo). Pro opačný přechod kvantil obecného rozdělení centrujeme (odečteme μ) a škálujeme (dělíme σ, tučná šipka vlevo). Tímto způsobem můžeme jednoduše z kvantilů $N(0,1)$ konstruovat obecný kritický obor testu, nebo naopak normovat obecnou testovou statistiku tak, aby ji bylo možno konfrontovat s kvantily $N(0,1)$.

statistiku obvykle nejprve normujeme a pracujeme na škále normovaného normálního rozdělení. H_0 v tom případě zamítáme, pokud

$$|t_{\text{normovaná}}| > \Phi^{-1}(97,5\%),$$

kde

$$t_{\text{normovaná}} = \frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}} = \frac{124-120}{\frac{6}{\sqrt{10}}} \doteq \frac{4}{1,897} \doteq 2,108.$$

Protože hodnota normované testové statistiky $t_{\text{normovaná}} \doteq 2,108$ překračuje kritickou hodnotu $\Phi^{-1}(97,5\%) \doteq 1,96$, i tímto způsobem samozřejmě nulovou hypotézu H_0 na hladině významnosti 5% zamítáme. Poznamejme, že výhodou normování testové statistiky je to, že takovou normovanou testovou statistiku můžeme vyhledávat v tabulkách kvantilové funkce normovaného normálního rozdělení a získat tak přibližnou P-hodnotu testu, tedy nejnižší hladinu významnosti, na které ještě H_0 zamítáme. (Pokud je tedy P-hodnota nižší než 5%, zamítáme nulovou hypotézu v klasickém smyslu; P-hodnota nám však nad rámec zamítnutí nebo nezamítnutí nulové hypotézy dává informaci o tom, jak hodně jsou naše data v rozporu s nulovou hypotézou - čím nižší P-hodnota, tím vyšší rozpor s H_0 a tím spíše H_0 zamítáme.) V našem případě máme tabelovány hodnoty $\Phi^{-1}(0,980) = 2,054$ a $\Phi^{-1}(0,985) = 2,170$. Protože $t_{norm} \doteq 2,108$ leží mezi těmito dvěma hodnotami, vidíme, že pravděpodobnost toho, že za předpokladu nulové hypotézy (pozor, toto je důležitý a nutný předpoklad!) pozorujeme normovanou testovou statistiku v absolutní hodnotě alespoň $2,108$,[4] je nižší, než $2 \cdot (1 - 0,980) = 0,04$. Poznamenejme, že přesný výpočet dává P-hodnotu $0,035$.

Všemi použitými technikami tedy na hladině 5% zamítáme nulovou hypotézu, že hmotnost pilulek je rovna jejich nominální hodnotě.

2. V případě, že nebudeme předem znát rozptyl hmostnosti jednotlivých pilulek, musíme rozptyl odhadnout z dat a zohlednit to, že jedná o (nepřesný) odhad, nikoli o přesné číslo. Rozdělení testové statistiky $\bar{X}_{10}$ nyní nebude normální, ale bude to t-rozdělení (s $10-1$ stupni volnosti).

[4] toto je ekvivalentní definice P-hodnoty

Normovaná testová statistika bude

$$t = \frac{\bar{x}_{10} - 120}{\frac{s_x}{\sqrt{10}}} = \frac{124 - 120}{\frac{6}{\sqrt{10}}} \doteq 2,108$$

a kritická hodnota bude

$$F_{t_9}^{-1}\big(1 - \alpha/2\big) = 2,26,$$

takže

$$|t| = 2,108 < F_{t_9}^{-1}\big(1 - \alpha/2\big) = 2,26$$

a nulovou hypotézu na hladině 5% nezamítáme.

To proto, že nejistota v rozptylu testové statistiky její rozdělení „rozšířila“ (t-rozdělení má ve srovnání s normovaným normálním rozdělením relativně nižší hustotu kolem střední hodnoty a vyšší hustoty na krajích - má tzv. těžší chvosty), čímž se kritický obor vzdálil od střední hodnoty $120mg$ *a testová statistika do něj již nepadla.*

Kdybychom místo nevychýlého výběrového rozptylu

$$s_X^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})^2 = 36$$

použili vychýlený výběrový rozptyl

$$s_X^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10} = 36\frac{9}{10} = 32,4,$$

který je z principu menší, než nevychýlený (a bylo by nesprávné jej použít, protože by uměle snižoval naši nejistotu o rozptylu), dostali bychom normovanou testovou statistiku

$$t = \frac{\bar{x}_{10} - 120}{\frac{s_x}{\sqrt{10}}} = \frac{124 - 120}{\frac{\sqrt{32,4}}{\sqrt{10}}} = \frac{4}{1,8} \doteq 2,222$$

a nulovou hypotézu na hladině 5% bychom zamítli.

3. Hladina chyby 1. druhu je z principu rovna hladině významnosti α, a je tedy 5%.

4. Hladina chyby 2. druhu nelze zjistit pouze na základě znalosti rozdělení testové statistiky při nulové hypotéze. Potřebujeme totiž zjistit pravděpodobnost, že za platnosti alternativní hypotézy uděláme chybu - nezamítneme nulovou hypotézu, přestože bychom ji zamítnout měli. K tomu ovšem potřebujeme znát rozdělení testové statistiky při alternativní hypotéze.

   Když budeme předpokládat alternativu příliš těžkých pilulek (se střední hodnotou $125mg$), můžeme pravděpodobnost chyby 2. druhu β spočítat jako pravděpodobnost, že za alternativní hypotézy námi dříve zkonstruovaný test alternativní hypotézu nepřijme. To nastane v případě, že testová statistika nepadne do kritického oboru, bude tedy menší, než $123,719$, avšak větší, než $116,281$. Pravděpodobnost tohoto jevu můžeme spočítat jako plochu pod křivkou $f_N(125,\ 36/10)$ mezi body $116,281$ a $123,719$, jak náhledneme vzápětí.

   Pravděpodobnost toho, že za alternativy bude testová statistika (tedy průměr deseti pilulek) nižší, než $116,281$, je zanedbatelná (viz dále a viz následující bod). Chybu 2. druhu tedy stačí

(shora) odhadnout jako pravděpodobnost, že testová statistika bude za alternativy menší, než $123,719$. Tato pravděpodobnost je

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_{10} < 123,719|H_A) &= F_{N(125,\ 36/10)}(123,719) \\ &= \Phi\big(\frac{123,719-125}{6/\sqrt{10}}\big) \\ &\doteq \Phi(-0,675) \end{aligned}$$

V tabulkách kvantilové funkce normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ máme uvedeny pouze kladné kvantily, ale díky tomu, že rozdělení $N(0,1)$ je symetrické kolem 0, víme, že záporný kvantil $-u$ v bodě p odpovídá kladnému kvantilu u v bodě $1-p$ (tedy že $\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p)$). Proto bude stačit vyhledat pouze hodnotu odpovídající kvantilu $0,675$. Nejbližší tabelovaná hodnota je $\Phi^{-1}(0,75) = 0,674$, což (z definice distribuční funkce) znamená, že $P(\bar{X}_{10} \leq 0,674) = 0,75$, tedy že že $P(\bar{X}_{10} \leq -0,674) = 0,25$. Z toho odhadneme chybu 2. druhu na 25%. (Přesná hodnota $\Phi(-0,674)$ na 5 desetinných míst je přitom $0,25016$.) Poznamejme, že přihlédneme-li k možnosti, že chybu 2. druhu neděláme v případě, že testová statistika je za alternativy nižší, než $116,281$, sníží se tento odhad o zanedbatelných $0,00000216$.

5. Nyní zjistíme, jak velký výběr pilulek by výstupní kontrola musela provést, aby se pravděpodobnost chyby 2. druhu β snížila a byla nanejvýš 10%. Chybu 2. druhu uděláme, pokud za platnosti alternativní hypotézy H_A nezamítneme H_0. Tedy když průměr hmotností n pilulek $\bar{X}_n$ nepadne do kritického oboru našeho testu:

$$H_d \leq \bar{X}_n \leq H_h,$$

kde

$$H_d(n) = F^{-1}_{N(120,36/n)}(\alpha/2) = 120 + \Phi^{-1}(\alpha/2)\frac{6}{\sqrt{n}}$$

a

$$H_h(n) = F^{-1}_{N(120,36/n)}(1-\alpha/2) = 120 + \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\frac{6}{\sqrt{n}}.$$

Vidíme, že zde je situace složitější, než v předchozím případě výpočtu síly testu pro pevný výběr 10ti pilulek, neboť hranice kritického oboru $H_d(n)$ a $H_h(n)$ nyní nejsou pevné, ale mění se s tím, jak se mění rozsah výběru (počet pilulek odebraných při výstupní kontrole) - čím více pilulek odebereme, tím těsněji se přimknou hranice kritického oboru ke střední hodnotě očekávané za H_0 (analogie toho, že se intervalový odhad střední hodnoty při rostoucí velikosti výběru a pevné spolehlivosti zužuje).

Podle zadání chceme, aby pravděpodobnost chyby 2. druhu byla

$$\beta = P(H_d(n) \leq \bar{X}_n \leq H_h(n)|H_A) \leq 0,1$$

přitom

$$P(H_d(n) \leq \bar{X}_n \leq H_h(n)|H_A) < P(\bar{X}_n \leq H_h(n)|H_A)$$

ale rozdíl není velký, např. pro $n = 10$ činí rozdíl pouze

$$
\begin{aligned}
P(H_d(n) > \bar{X}_n)|H_A) &= P(\bar{X}_n < H_d(n)|H_A) \\
&\approx P(\bar{X}_n < 120 - 1,96 \cdot 6/\sqrt{10}|H_A) \\
&= F_{N(125,36/10)}(120 - 1,96 \cdot 6/\sqrt{10}) \\
&= \Phi\big(\frac{120 - 1,96 \cdot 6/\sqrt{10} - 125}{6/\sqrt{10}}\big) \\
&= \Phi\big(-1,96 - \frac{5\sqrt{10}}{6}\big) \\
&\doteq \Phi\big(-4,595\big) \\
&\doteq 0,00000216.
\end{aligned}
$$

Pokud tedy zanedbáme možnost, že průměr n pilulek bude za alternativy „těžkých“ pilulek menší, než H_d, neuděláme velkou chybu.

Tím se úloha zjednodušší a máme tedy

$$
\begin{aligned}
0,1 \geq P(H_d(n) \leq \bar{X}_n \leq H_h(n)|H_A) &\approx P(\bar{X}_n \leq H_h(n)|H_A) \\
&= F_{N(125,36/n)}(H_h(n)) \\
&= \Phi\Big(\frac{H_h(n) - 125}{6/\sqrt{n}}\Big) \\
&= \Phi\Big(\frac{120 + \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\frac{6}{\sqrt{n}} - 125}{6/\sqrt{n}}\Big) \\
&= \Phi\big(\Phi^{-1}(1-\alpha/2) - \frac{5\sqrt{n}}{6}\big)
\end{aligned}
$$

Nyní budeme obě strany rovnice chápat jako argument funkce Φ^{-1}:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{-1}(0,1) &\geq \Phi^{-1}\Big(\Phi\Big(\Phi^{-1}(1-\alpha/2) - \frac{5\sqrt{n}}{6}\Big)\Big) \\
\Phi^{-1}(0,1) &\geq \Phi^{-1}(1-\alpha/2) - \frac{5\sqrt{n}}{6} \\
-1,282 &\geq 1,960 - \frac{5\sqrt{n}}{6} \\
\frac{5\sqrt{n}}{6} &\geq 1,960 + 1,282 \\
n &\geq \Big(\frac{6}{5}(1,960 + 1,282)\Big)^2 \\
n &\geq 15,1.
\end{aligned}
$$

Musíme tedy odebrat alespoň 16 pilulek, aby pravděpodobnost chyby 2. druhu, tedy toho, že neodhalíme příliš těžké pilulky, byla nanejvýš 10%.

Můžeme ještě provést zkoušku: dolní hranice horní části kritického oboru je

$$
H_h(16) = F^{-1}_{N(120,36/16)}(1-\alpha/2) = 120 + \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\frac{6}{\sqrt{16}} \doteq 122,94
$$

a pravděpodobnost, že testová statistika bude nižší, než toto číslo, je

$$
\begin{aligned}
P(\bar{X}_{16} < 122,94|H_A) &= F_{N(125,\ 36/16)}(122,94) \\
&= \Phi\big(\frac{122,94-125}{6/\sqrt{16}}\big) \\
&\doteq \Phi(-1,373) \\
&\doteq 0,0918 \\
&< 0,10.
\end{aligned}
$$

(Rozdíl mezi $0,0918$ *a* $0,10$ *pramení z toho, že jsme počet pilulek ve výběru zaokrouhlili.)*

3.8 Párový a dvouvýběrový t-test

Příklad: Vedení továrny zjišťuje, zda pracovní výkonnost po obědě klesá. U pracovníků sleduje výkonnost dopoledne a odpoledne. U vybraných pracovníků byly naměřeny následující hodnoty výkonnosti: dopoledne: 8,79; 10,28; 11,08; 7,65; 10,43; 10,51; 9,43; 9,45; 9,44; 9,11; 9,52; 9,00 (výběrový průměr $\bar{x}_1 \doteq 9,557$, výběrová směrodatná odchylka $0,919$); odpoledne: 8,62; 10,18; 11,08; 7,54; 100,28; 10,31; 9,24; 9,59; 9,35; 8,96; 9,38; 8,95 (výběrový průměr $\bar{x}_2 \doteq 9,457$, výběrový rozptyl $0,866$). Směrodatná odchylka rozdílů ve výkonnosti mezi odpolednem a dopolednem je $0,095$. Na hladině 5% otestujte hypotézu, že výkonnost odpoledne klesá.

1. Zamyslete se nad tím, co vlastně chcete zkoumat a jaká data máte k dispozici. Případně nejasnosti konzultujte se zadavatelem (cvičícím). *Představují data párová nebo nepárová pozorování, tj. byly výkonnosti odpoledne naměřeny na* stejných *pracovnících jako dopoledne, nebo ne? Co by bylo správnější? Co bychom mohli v jednotlivých případech testovat a jak? Jaký výsledek byste v jednotlivých případech očekávali a proč?*

2. Zkontrolujte data.

3. Formulujte nulovou a alternativní hypotézu.

4. Proveďte test a vyslovte závěr.

Řešení:

1. Pokud by data představovala nepárová pozorování (výkonnost bychom dopoledne naměřili u jiných pracovníků, než odpoledne), měli bychom úlohu znesnadněnou variabilitou výkonnosti mezi jednotlivými pracovníky, takže test by na daných datech nejspíš žádný rozdíl nezaznamenal, protože rozdíl v průměrech je ve srovnání se směrodatnou odchylkou relativně malý (obr. 6 A,C,E). Pokud by data představovala párová pozorování, variabilita ve výkonnosti mezi jednotlivými pracovníky by naproti tomu nehrála žádnou roli, protože by se eliminovala při výpočtu rozdílu ve výkonnosti mezi dopolednem a odpolednem.

2. Kontrola dat: jedna z odpoledních výkonností $(100,28)$ je odlehlá, patrně překlep - po konzultaci se zadavatelem opravíme na $10,28$.

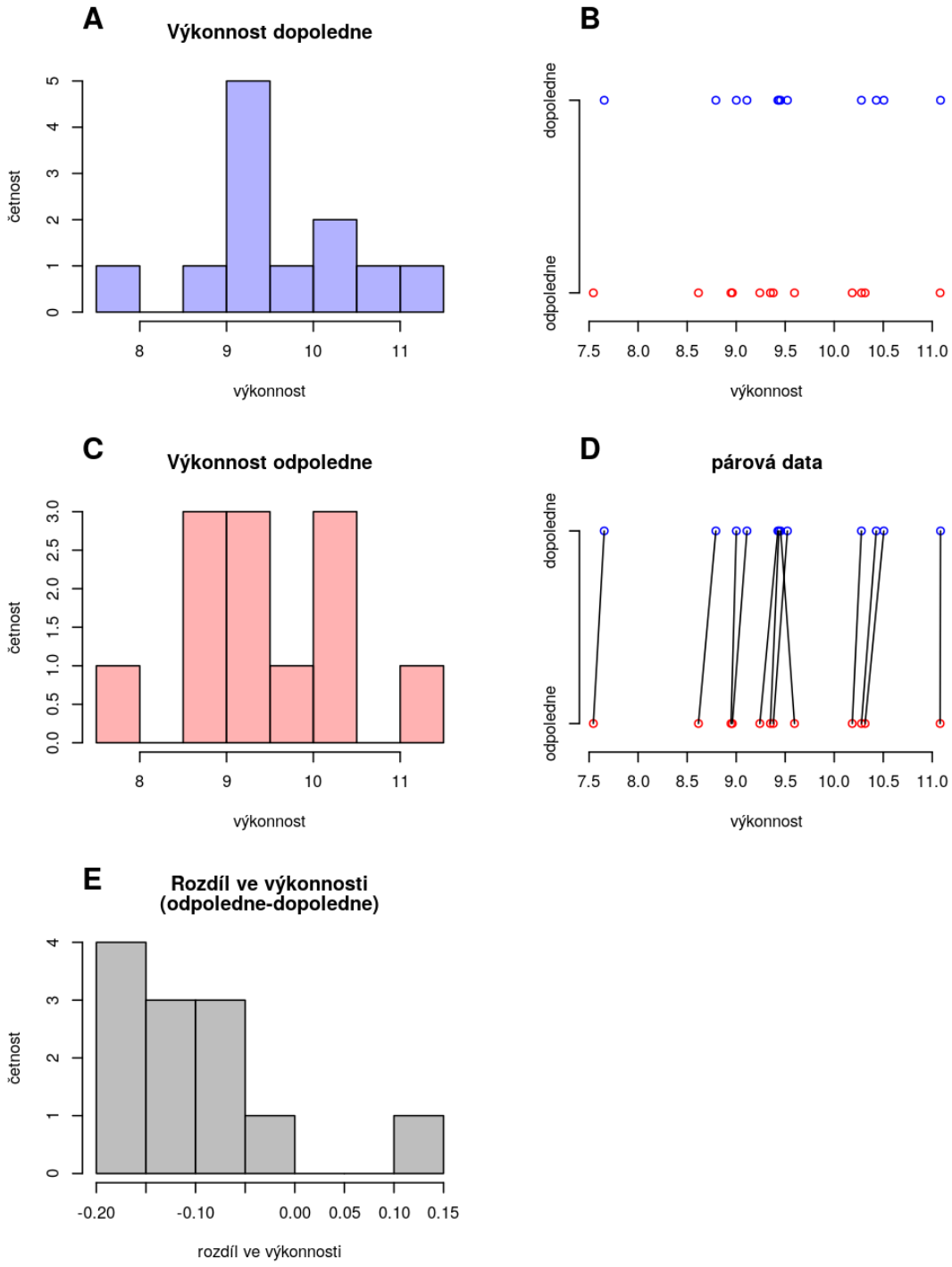
   Pohled na opravená data ukazuje obr. 6.

3. Nulová a alternativní hypotéza:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \text{výkonnost dopoledne} = \text{výkonnost odpoledne} \\
H_A &: \text{výkonnost dopoledne} > \text{výkonnost odpoledne}
\end{aligned}
$$

   Alternativní hypotéza je jednostranná, protože ze zadání plyne, že chceme testovat, zda výkonnost odpoledne klesá.

   Při testování statistických hypotéz je možný dvojí výsledek: buď nulovou hypotézu nezamítneme, nebo zamítneme. V případě, že H_0 *nezamítáme, nedozvídáme se vlastně nic, protože nezamítnutí*



Obr. 6: Přehled výkonností dopoledne (modře) a odpoledne (červeně). A: výkonnost dopoledne, B: srovnání výkonnosti dopoledne a odpoledne, C: výkonnost odpoledne, D: srovnání výkonnosti dopoledne a odpoledne s naznačenými párovými měřeními, E: rozdíl ve výkonnosti dopoledne a odpoledne.

H_0 naprosto neznamená, že bychom nulovou hypotézu přijali*(!), ale ani to, že by alternativa neplatila (ona totiž platit může, jen jsme ji nebyli schopni přijmout z důvodu malé síly testu). Něco nového se tedy dozvídáme pouze tehdy, když H_0 zamítáme. S tímto vědomím tedy nulovou a alternativní hypotézu konstruujeme - alternativu konstruujeme tak, abychom jejím případným přijetím odpověděli na kýženou otázku (zde zjištění, zda výkonnost odpoledne klesá, jinde třeba nižší úmrtnost ve skupině pacientů léčených novým lékem ve srovnáním s placebem či standardním lékem, apod.).*

Poznamenejme však, že při volbě nulové hypotézy jsme limitováni tím, abychom za platnosti nulové hypotézy znali rozdělení testové statistiky - jen tak totiž můžeme test provést. Pokud bychom např. za nulovou hypotézu zvolili tvrzení „výkonnost dopoledne > výkonnost odpoledne“, rozdělení testové statistiky bychom neznali a test provést nemohli. Např. tvrzení „výkonnost dopoledne = výkonnost odpoledne +5“ by však už za nulovou hypotézu zvolit šlo.

4. Provedení testu, závěr.

   Ještě před provedením t-testu si můžeme všimnout, že u většiny pracovníků je výkonnost odpoledne nižší, než dopoledne (obr. 6 D). Již toto zjištění nám mnohé o datech napoví, protože pravděpodobnost, že u 11 pracovníků ze 12 výkonnost poklesne pouhou náhodou, je jednoduše ověřitelná za pomoci binomického rozdělení. Zvolíme-li za H_0 tvrzení, že se stejnou pravděpodobností může výkonnost odpoledne vzrůst i klesnout (tedy $p = 0,5$), dostaneme:

$$\begin{aligned} p(\text{11 poklesů z 12}|H_0) &= \binom{12}{11} p^{11}(1-p)^1 \\ &= \binom{12}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11+1} \\ &= 12 \cdot \frac{1}{2^{12}} \\ &= 12 \cdot \frac{1}{4096} \\ &\doteq 0,00293. \end{aligned}$$

   Pravděpodobnost, že pozorujeme 11 nebo více (tedy 12) poklesů z 12 je pak

$$\begin{aligned} P(\text{alespoň 11 poklesů z 12}|H_0) &= \sum_{i=11}^{12} \binom{12}{i} p^{12-i}(1-p)^i \\ &= \left(\binom{12}{11} + \binom{12}{12}\right)\frac{1}{2}^{12} \\ &= 13 \cdot \frac{1}{4096} \\ &\doteq 0,00317, \end{aligned}$$

   což odpovídá P-hodnotě jednostranného znaménkovému testu, což je vlastně jednostranný test v binomickém rozdělení, který zjišťuje, nakolik data odporují nulové hypotéze, že pokles i nárůst výkonnosti jsou stejně pravděpodobné.

   Tedy již pouze na základě samotných poklesů a nárůstů výkonnosti můžeme s velkou jistotou konstatovat, že výkonnost odpoledne klesá. Dále budeme zkoumat, jaký výsledek dostaneme, když si u jednotlivých pracovníků budeme všímat nejen toho, zda jejich výkonnost poklesla či narostla, ale také o kolik.

   Pozor, u dopoledních výkonností je uvedena výběrová směrodatná odchylka, u odpoledních výkonností naopak výběrový rozptyl! Je třeba toto sjednotit!

   V případě, že data budeme správně chápat jako párová pozorování a provedeme tedy párový test, dostaneme testovou statistiku:

$$t = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\frac{s_d}{\sqrt{12}}} = \frac{9,457 - 9,557}{\frac{0,095}{\sqrt{12}}} \doteq \frac{-0,1}{0,0274} \doteq -3,646.$$

Kvantil t-rozdělení je přitom $q_{t_{11}}(0,05) = -1,8$ a protože $t < q_{t_{11}}(0,05)$, H_0 na hladině 5% zamítáme.

Pokud bychom provedli (nesprávný) nepárový test, dostali bychom testovou statistiku:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{11s_1^2+11s_2^2}{11+11}(\frac{1}{12}+\frac{1}{12})}} \\ &= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{2}\frac{2}{12}}} \\ &= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{12}}} \\ &= \frac{9,457 - 9,557}{\sqrt{\frac{0,919^2+0,866}{12}}} \\ &\doteq \frac{-0,1}{0,3796} \\ &\doteq -0,2634. \end{aligned}$$

Kvantil t-rozdělení je $q_{t_{22}}(0,05) = -1,72$ a protože testová statistika $t > q_{t_{22}}(\alpha)$, H_0 bychom na hladině 5% nezamítli.

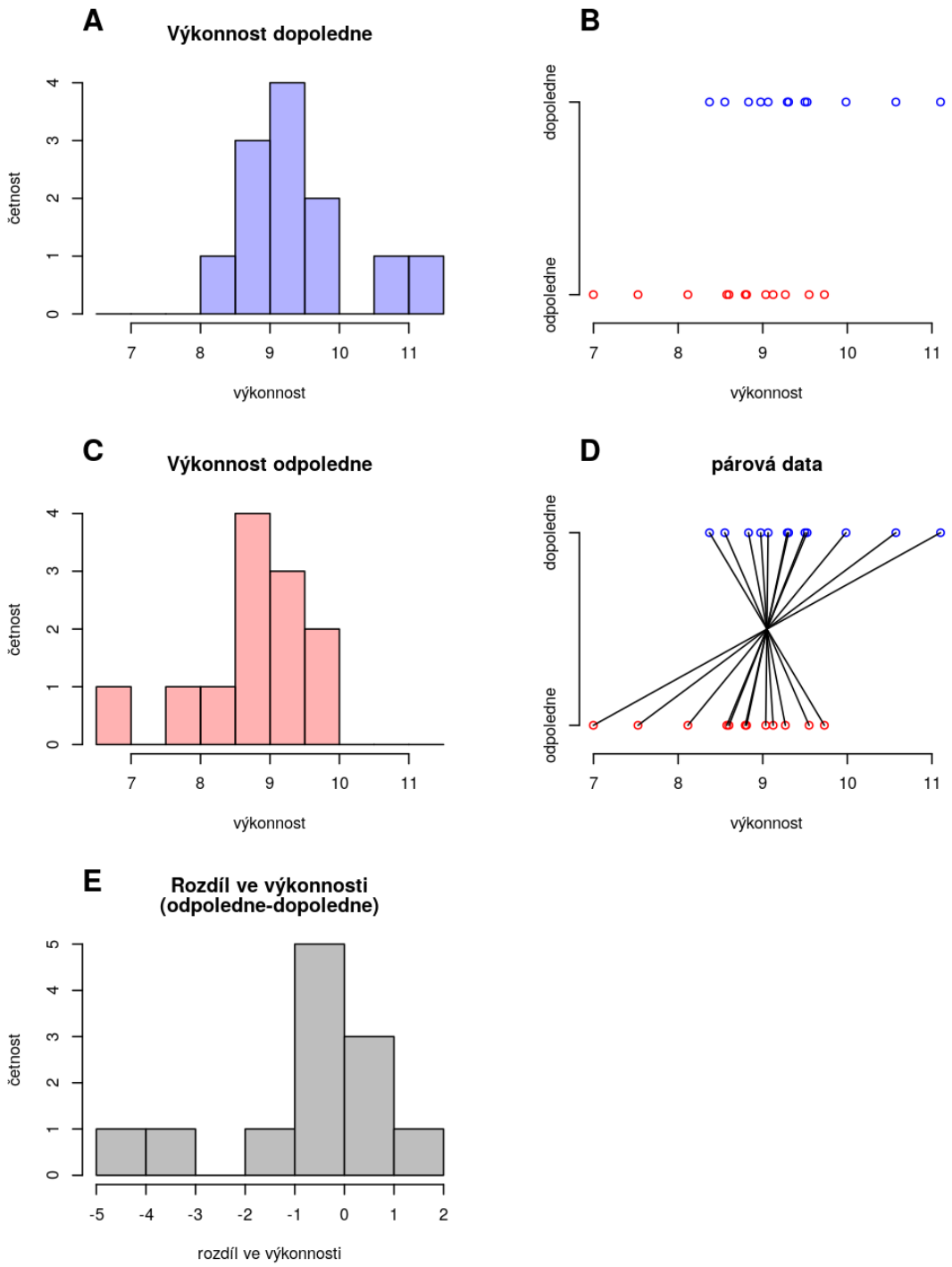
Poznámka: pokud by data byla párová (naměřená dopoledne a odpoledne u stejných 12ti pracovníků), mohli bychom nesprávnost použití 2-výběrového testu nahlédnout již z toho, že by takový test pracoval s 22 stupni volnosti, tedy by operoval nad daty, v nichž bychom měli mít 22 + 2 nezávislých pozorování. My ale máme pouze 12 nezávislých měření - párová měření dopoledne a odpoledne jsou závislá, protože pocházejí od stejných pracovníků.

Vidíme, že volba správného testu je zásadní. Upozorněme, že tato volba je dána z principu toho, jaká data testujeme! Tato volba nemůže být učiněna až podle toho, jak (různé) testy dopadnou! Dále vidíme, že párový test dává obecně jiný výsledek, než test nepárový (v tomto konkrétním případě párový test H_0 zamítá, nepárový test nikoli). Nemusí tomu tak být však vždy - někdy mohou dát oba testy stejný výsledek, někdy dokonce může nepárový test rozdíl ve středních hodnotách odhalit, ale párový test nikoli, jak uvidíme na následujícícm příkladě.

Příklad: (Pokračování předchozího příkladu:) Po čase byly naměřeny následující hodnoty výkonnosti: dopoledne: 8,79; 10,28; 11,08; 7,65; 10,43; 10,51; 9,43; 9,45; 9,44; 9,11; 9,52; 9,00 (výběrový průměr $\bar{x}_1 = 9,557$, výběrová směrodatná odchylka 0,919); odpoledne: 9,31; 7,82; 7,02; 10,45; 7,67; 7,59; 8,67; 8,65; 8,66; 8,99; 8,58; 9,10 (výběrový průměr $\bar{x}_2 = 8,543$, výběrový rozptyl 0,845). Směrodatná odchylka rozdílů ve výkonnosti mezi odpolednem a dopolednem je $1,836$. Na hladině 5% otestujte hypotézu, že výkonnost odpoledne klesá.

1. Opět se zamyslete, jaká data máte k dispozici a co chcete zkoumat.
2. Formulujte nulovou a alternativní hypotézu.
3. Proveďte test a vyslovte závěr.

Řešení:
Pohled na data nabízí obr. 7.
Data jsou opět párová, tj. u vybraných pracovníků jsme naměřili výkonnost dopoledne a odpoledne.



Obr. 7: Přehled výkonností dopoledne (modře) a odpoledne (červeně) u jiných pracovníků. A: výkonnost dopoledne, B: srovnání výkonnosti dopoledne a odpoledne, C: výkonnost odpoledne, D: srovnání výkonnosti dopoledne a odpoledne s naznačenými párovými měřeními, E: rozdíl ve výkonnosti dopoledne a odpoledne.

V případě, že data budeme správně chápat jako párová pozorování, dostaneme testovou statistiku:

$$t = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\frac{s_d}{\sqrt{12}}} = \frac{8,543 - 9,557}{\frac{1,836}{\sqrt{12}}} \doteq \frac{-1,014}{0,53} \doteq -1,91.$$

Kvantil t-rozdělení je přitom $q_{t_{11}}(0,05) = -1,8$ a protože testová statistika $t < q_{t_{11}}(0,05)$, H_0 na hladině 5% zamítáme, i když poměrně těsně. (Pokud bychom např. prováděli oboustranný test a použili kvantil $q_{t_{11}}(0,025) = -2,20$, nulovou hypotézu bychom již nezamítali.)

Pokud bychom provedli (nesprávný) nepárový test, dostali bychom testovou statistiku:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{11s_1^2+11s_2^2}{11+11}(\frac{1}{12}+\frac{1}{12})}} \\ &= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{2}\frac{2}{12}}} \\ &= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{12}}} \\ &= \frac{8,543 - 9,557}{\sqrt{\frac{0,919^2+0,845}{12}}} \\ &\doteq \frac{-1,014}{0,3752} \\ &\doteq -2,702. \end{aligned}$$

Kvantil t-rozdělení je $q_{t_{22}}(0,05) = -1,72$ a protože testová statistika $t < q_{t_{22}}(0,05)$, H_0 na hladině 5% jistě zamítáme.

V tomto případě tedy (nesprávně aplikovaný) nepárový test nulovou hypotézu jednoznačně zamítá, a (správný) párový test ji zamítá jen těsně. To je dáno tím, že data byla uměle konstruována za tímto demonstračním účelem (obr. 7 D) - výkonnosti dopoledne a odpoledne byly silně antikorelovaná (čím více někdo pracoval dopoledne, tím méně pracoval odpoledne a naopak), což velkou měrou zvýšilo variabilitu párových rozdílů, v nichž se pak rozdíl ve výkonnostech téměř ztratil.

3.9 χ^2 test dobré shody

Příklad: *Falešná mince? (Test shody s daným rozdělením se známými parametry)*
Ze sta hodů mincí padla panna 44-krát. Lze z tohoto výsledku usuzovat na to, že je mince falešná? (Znáte-li více možností, jak na tuto otázku odpovědět, použijte všechny takové přístupy.)

Řešení:

1. Pomocí binomického rozdělení.

   $X \sim Bi(n, p)$, kde $n = 100$ a p, vyjadřující pravděpodobnost toho, že padne panna, neznáme. Formulujeme-li
   $$H_0 : p = 0,5$$
   a
   $$H_A : p < 0,5,$$
   můžeme spočítat (numericky na počítači) pravděpodobnost, že padne 44 nebo méně panen:
   $$\begin{aligned} p(X \leq 44) &= \sum_{i=0}^{44} \binom{100}{i} p^i (1-p)^{100-i} \\ &= \sum_{i=0}^{44} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{100-i} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \sum_{i=0}^{44} \binom{100}{i} \\ &\doteq 0,136, \end{aligned}$$
   tedy p-hodnota jednostranného testu v binomickém rozdělení je vyšší než 5% a nulovou hypotézu nemůžeme zamítnout.

2. Aproximací binomického rozdělení normálním:

   Pro velká n (řekněme alespoň 100) a „rozumná“ (nepříliš extrémní) p můžeme počet panen X aproximovat normálním rozdělením
   $$X \sim N(np, np(1-p)),$$
   kde $n = 100$ a p (pravděpodobnost, že padne panna) neznáme.

   Náhodnou veličinu $Y = \frac{X}{n}$ vyjadřující průměrnou četnost toho, že padne panna, pak můžeme popsat jako
   $$Y \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right),$$
   Pomocí takové aproximace (tedy z dodatečné informace, jaký je tvar rozdělení náhodné veličiny Y) můžeme zkonstruovat interval spolehlivosti pro střední hodnotu náhodné veličiny Y, tedy interval spolehlivost četnosti jevu „padne panna“. To, zda je mince falešná, pak můžeme odhadnout z toho, zda takový interval spolehlivosti bude zahrnovat hodnotu $0,5$, tedy pravděpodobnost rovného počtu panen a orlů.

   Parametr p odhadneme z dat jako
   $$\hat{p} = \frac{44}{100} = 0,44$$
   a se spolehlivostí $(1-\alpha)$ dostaneme interval spolehlivosti pro střední hodnotu veličiny Y jako:

$$
\begin{aligned}
I &= (\hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha/2),\ \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha/2) \\
&= (0,44 + \sqrt{\frac{0,44 \cdot (1-0,44)}{100}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha/2),\ 0,44 + \sqrt{\frac{0,44 \cdot (1-0,44)}{100}} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha/2)) \\
&= (0,44 + \frac{\sqrt{0,2464}}{10} \cdot \Phi^{-1}(\alpha/2),\ 0,44 + \frac{\sqrt{0,2464}}{10} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha/2)) \\
&\doteq (0,44 + 0,04964 \cdot (-1,96),\ 0,44 + 0,04964 \cdot 1,96) \\
&\doteq (0,44 - 0,0973,\ 0,44 + 0,0973) \\
&\doteq (0,3427,\ 0,5373)
\end{aligned}
$$

Protože $p = 0,5$ leží v intervalu spolehlivosti I, zdá se, že pozorovaný počet panen nenasvědčuje tomu, že by mince byla falešná.

Můžeme také provést (jednostranný) test střední hodnoty náhodné veličiny $Y \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ a spočítat P-hodnotu takového testu (tj. nejmenší hladinu významnosti, na které by test ještě nulovou hypotézu o férové minci zamítal, nebo ekvivalentně pravděpodobnost, že za předpokladu férové mince napozorujeme stejný nebo extrémnější (tj. menší) počet panen než 44).

Nulová a alternativní hypotézy jsou

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \ p = 0,5 \\
H_A &: \ p < 0,5
\end{aligned}
$$

Testová statistika je

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{0,44 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{100}}} \\
&= \frac{0,44 - 0,5}{\frac{0,5}{10}} \\
&= \frac{-0,06}{0,05} \\
&= -1,2
\end{aligned}
$$

a kritická hodnota v podobě kvantilu normovaného normálního rozdělení je $\Phi^{-1}(0,05) = -1,645$, takže H_0 nezamítáme.

P-hodnota takového testu je

$$
\begin{aligned}
P &= p(X \leq 44 | H_0) \\
&= p(Y \leq 0,44 | H_0) \\
&= F_{N\left(p, \frac{p(1-p)}{100}\right)}(0,44) \\
&= F_{N\left(0,5,\ \frac{0,5 \cdot 0,5}{100}\right)}(0,44) \\
&= \Phi\Big(\frac{0,44 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{100}}}\Big) \\
&= \Phi\Big(\frac{-0,06}{\frac{0,5}{10}}\Big) \\
&= \Phi\Big(\frac{-0,06}{0,05}\Big) \\
&= \Phi(-1,2) \\
&\doteq 0,115
\end{aligned}
$$

Nulovou hypotézu o férovosti mince tedy nemůžeme zamítnout.

Na jaké hladině významnosti bychom mohli H_0 zamítnout?

(P-hodnota naznačuje, že bychom H_0 mohli zamítnout, pokud bychom dovolili testu udělat mnohem větší chybu 1. druhu, tedy pokud bychom pracovali na vyšší hladině významnosti (v našem případě necelých 12%).)

Srovnáme-li p-hodnotu $0,115$ přibližného testu (založeného na aproximaci binomického rozdělení rozdělením normálním) s přesnou p-hodnotou $0,136$ z binomického testu, vidíme, že aproximace je poměrně přesná.

3. Pomocí χ^2 testu:

   Označíme-li pravděpodobnost, že padne panna, jako p_1, a pravděpodobnost, že padne orel, jako p_2, můžeme nulovou a alternativní hypotézu formulovat jako

$$H_0 : \ p_1 = p_2$$
$$H_A : \ p_1 \neq p_2$$

   Označíme-li dále počet panen jako n_1 a počet orlů jako n_2, můžeme testovou statistiku zapsat jako

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(n_i - 100 \cdot 0,5)^2}{100 \cdot 0,5} = \frac{(44-50)^2 + (56-50)^2}{50} = 1,44.$$

   Porovnáním s kvantilem $q_{\chi^2_1}(0,95) = 3,84$ vychází, že nemůžeme zamítnout hypotézu, že na minci padají stejně často panny i orli.

   P-hodnota je v tomto případě

$$\begin{aligned} P &= p(\text{počet panen nanejvýš 44 nebo počet orlů nanejvýš 44} | H_0) \\ &= q_{\chi^2_1}(1,44) \\ &\doteq 0,23. \end{aligned}$$

   Vidíme, že narozdíl od testu v binomickém rozdělení nebo testu v normálním rozdělení dostáváme přibližně dvakrát větší P-hodnotu. Proč? Znamená to, že test je nepřesný? Nebo jej nelze na naše data aplikovat?

   (χ^2 test je oproti dřívějším testům z principu stavěn proti oboustranné alternativě. Kdybychom i tyto testy bývali byli postavili proti oboustranné alternativě, tedy kdyby byly citlivé i na případ, že počet panen nebude nižší, ale vyšší než počet orlů, jejich P-hodnoty by se zdvojnásobily na úroveň P-hodnoty χ^2 testu.)

Příklad: Ostřelování Londýna *(test shody s daným rozdělením s neznánými parametry)*

Londýn byl v jistý den za druhé světové války zasažen 537 německými raketami typu V1 resp. V2. Odborníci se domnívali, že rakety nejsou zaměřovány do konkrétních městských částí. Pokuste se tuto domněnku "potvrdit".

Pro účely testu bylo území Londýna rozděleno na $n = 24^2 = 576$ stejně velkých čtverců a byly zjištěny počty čtverců $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_5$ se žádným, jedním, ..., pěti zásahy. Pro neformální srovnání s Poissonovým rozdělením jsou v tabulce uvedeny i hodnoty $nP(X_j = k)$:

k	0	1	2	3	4	≥ 5
n_k	229	211	93	35	7	1
$n\lambda^k e^{-\lambda}/k!$	226,7	211,4	98,5	30,6	7,1	1,6

Řešení: Za předpokladu, že rakety nejsou speciálně zaměřovány, ale dopadají na náhodná místa ve městě, lze chápat jednotlivé čtverce za nezávislé, a počty zásahů v j-tém čtverci jako

náhodnou veličinu $X_j \sim Bi(537, \frac{1}{576})$, kterou můžeme aproximovat[5] pomocí Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$, kde parametr λ odpovídající průměrnému počtu zásahů do jednoho čtverce odhadneme jednoduše jako $\hat{\lambda} = \frac{537}{576} \doteq 0,9383$. Počty čtverců se žádným, jedním, dvěma atd. zásahy pak odhadneme (za předpokladu nenaváděných střel) díky nezávislosti čtverců prostým vynásobením těchto pravděpodobností počtem všech čtverců (tím získáme druhý řádek ve výše uvedené tabulce). Protože teoretický počet alespoň pěti zásahů je příliš malý (menší než 5), sloučíme poslední dvě třídy do nové třídy s alespoň čtyřmi zásahy.

Budeme testovat hypotézu, že X_j pochází z Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$ s daným odhadnutým parametrem λ. Za platnosti této (nulové) hypotézy vypočítáme hodnotu testové statistiky

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{4} \frac{(n_i - n \cdot P(X_i = i))^2}{n \cdot P(X_i = i)} =$$
$$= \frac{(229 - 226,7)^2}{226,7} + \frac{(211 - 211,4)^2}{211,4} + \frac{(93 - 98,5)^2}{98,5} + \frac{(35 - 30,6)^2}{30,6} + \frac{(8 - 8,7)^2}{8,7} \doteq$$
$$\doteq 1,0202$$

Zvolíme-li hladinu 5%, kritickou hodnotou bude kvantil χ^2 rozdělení o $5-1-1$ stupních volnosti (protože jsme na základě dat odhadli jeden parametr, musíme odečíst jeden stupen volnosti navíc). Tento kvantil bude roven $q_{\chi^2_{(5-1-1)}}(1 - 0,05) \doteq 7,81$. Protože hodnota testové statistiky je menší, než kritická hodnota, na hladině významnosti 5% hypotézu o tom, že počty zásahů odpovídají Poissonovu rozdělení, nezamítáme - data tudíž *podporují* (nikoli *potvrzují*!) hypotézu, že zásahy jsou náhodné.

Příklad: Krevní skupiny *(test homogenity dvou rozdělení s neznánými parametry))*

Ve vybraných nemocnicích byly u 252 ambulantně ošetřených pacientů v určitém dny sledovány podíly jednotlivých krevních skupin. Dostali jsme následující tabulku:

místo	A	B	0	AB
Karlovy Vary	33	6	56	5
Ostrov nad Ohří	9	1	16	1
Olomouc	54	14	52	5

Otestujte, zda jsou podíly jednotlivých krevních skupin v jednotlivých nemocnicích stejné.

Řešení:

Danou úlohu lze řešit pomocí χ^2 testu dobré shody. Víme však, že χ^2 test dobré shody je testem asymptotickým a lze jej tedy doporučit použít jen při dostatečně velkém rozsahu výběru n a „rozumných“ očekávaných pravděpodobnostech jednotlivých tříd p_{ij}, $i = 1, \dots I$ (i označuje řádky), $j = 1, \dots J$ (j označuje sloupce). Splnění těchto požadavků se v praxi ověřuje tak, že se sleduje, zda pro každé i je (za H_0) očekávaná četnost $np_{ij} > 5$. Pokud by tomu tak nebylo, musíme data vhodně upravit, typicky přistoupit ke slučování některých řádků a/nebo sloupců.

Protože z našich dat vyplývá, že v Ostrově nad Ohří bylo vyšetřeno relativně málo pacientů a že podíly jednotlivých krevních skupin nejsou stejné (skupiny B a AB jsou relativně vzácnější), lze v Ostrově nad Ohří čekat u těchto vzácnějších krevních skupin problém v podobě nesplnění výše uvedeného kritéria.

Nejpřirozenějším se proto jeví z důvodu geografické blízkosti sloučit data z nemocnice v Ostrově nad Ohří s daty z Karlových Varů. Dostáváme tedy novou tabulku:

místo	A	B	0	AB
Karlovy Vary a Ostrov nad Ohří	42	7	72	6
Olomouc	54	14	52	5

[5] Aproximovat normálním rozdělením v tomto případě nejde, protože taková aproximace je dobrá, pokud počet (nezávislých) pokusů je velký a pravděpodobnost elementárního jevu není extrémní. Zde sice máme velký počet pokusů, ale pravděpodobnost elementárního zásahu je velmi malá, pouze 1/576.

Nyní jsou již předpoklady testu splněny, jak se lze snadno přesvědčit výpočtem.

Nulovou hypotézou bude, že zastoupení krevních skupin se mezi nemocnicemi neliší, tedy že rozdělení pacientů s jednotlivými krevními skupinami je v obou řádcích tabulky stejné (homogenní), tedy nezávisí na tom, v jakém řádku tabulky se nacházíme. Z nezávislosti jevů „byla naměřena j-tá krevní skupina“ (sloupce tabulky) a „bylo měřeno v i-té oblasti“ (řádky tabulky) přímo plyne, že pravděpodobnost $p_{i,j}$ naměření j-té krevní skupiny v i-tém řádku je dáno jako součin marginální pravděpodobnosti r_j, že měříme j-tou krevní skupinu, a marginální pravděpodobnosti q_i, že měříme v i-tém řádku.

Nulová a alternativní hypotéza tak jsou:

$$H_0 : p_{ij} = q_i r_j$$
$$H_A : p_{ij} \neq q_i r_j$$

Rozšíříme-li tabulku o marginální součty a o marginální relativní četnosti q_i a r_j spočtené jako

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^{4} n_{ij}}{n}$$
$$r_j = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_{ij}}{n}$$

dostáváme:

místo	A	B	0	AB	celkem	relativní četnosti q_i (zaokr.)
Karlovy Vary a Ostrov nad Ohří	42	7	72	6	127	0,504
Olomouc	54	14	52	5	125	0,496
celkem	96	21	124	11	252	
relativní četnosti r_j (zaokr.)	0,381	0,083	0,492	0,044		

Za předpokladu nulové hypotézy dostáváme teoretické (očekávané) počty pacientů s danou krevní skupinou v daném místě jako $np_{ij} = nq_i r_j$, což lze tabelovat jako

místo	A	B	0	AB
Karlovy Vary a Ostrov nad Ohří	48,38	10,58	62,49	5,54
Olomouc	47,62	10,42	61,51	5,46

a spočíst testovou statistiku

$$T = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} \frac{(n_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}} = 7,135.$$

Kritickou hodnotu určíme jako kvantil χ^2 rozdělení na $q_{\chi^2_{(4-1)(2-1)}}(1-\alpha) \doteq 7,81$.

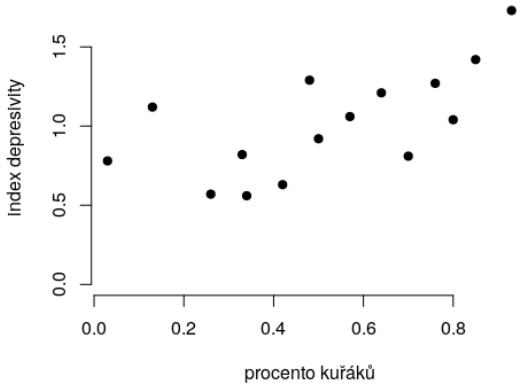
Protože hodnota testové statiky T nepřesahuje kritickou hodnotu, H_0 nezamítáme. To ovšem neznamená, že bychom H_0 prokázali! Pouze jsme v datech nenalezli rozpor s nulovou hypotézou. (Jedna z možností je, že opravdu nulová hypotéza platí. Druhou možností může být, že test nemá dostatečnou sílu nulovou hypotézu vyvrátit (např. máme málo dat, nebo test není na danou alternativu citlivý). Protože mezi těmito možnostmi nedokážeme rozlišit, nelze nezamítnutí nulové hypotézy interpretovat jako její platnost!)

3.10 Test korelačního koeficientu

Příklad: Deprese a kouření - korelace.

V 15ti vybraných okresech ČR bylo sledováno procento obyvatel, kteří kouří, a zároveň index depresivity v daném okresu. Dostali jsme následující data:

procento kouření	index výskytu deprese
0,76	1,27
0,57	1,06
0,93	1,73
0,64	1,21
0,70	0,81
0,48	1,29
0,85	1,42
0,42	0,63
0,03	0,78
0,26	0,57
0,33	0,82
0,13	1,12
0,50	0,92
0,80	1,04
0,34	0,56



Průměrné procento kouření $\bar{k} = 0,516$, průměrný index depresivity $1,015$. Korelační koeficient $r = 0,656$. Na hladině 5% otestujte, zda jsou míra kouření a výskyt depresí navzájem korelované. Co se dá z výsledku usuzovat?

Řešení: Nejprve se musíme přesvědčit, že vztah mezi danými veličinami má smysl hodnotit pomocí korelace:

1. Korelace je schopna zachytit pouze lineární vztah, na jiné než lineární není citlivá, takže bychom marně čekali, že korelace zachytí např. vztah mezi X a $|X|$ pro $X \sim U(-1, 1)$.

2. Test korelačního koeficientu předpokládá, že pracuje s realizacemi náhodných veličin z dvourozměrného normálního rozdělení. Pokud by se naše data tomuto předpokladu vzpírala, nelze čekat, že test přinese smysluplné výsledky.

V našem případě se zdá, že použití korelačního koeficientu a odhadu jeho významnosti pomocí asymptotického testu nic nebrání.

Testová statistika je

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,656\sqrt{15-2}}{\sqrt{1-0,656^2}} \doteq 3,13$$

a kritická hodnota je $q_{t_13}(0,975) = 2,16$. Protože $|t| > q_{t_13}(0,975)$, zamítáme nulovou hypotézu o nulovosti korelačního koeficientu.

Poznamejme, že tento výsledek nelze přímočaře interpretovat tak, že mezi průměrným procentem kuřáků a depresivitou existuje lineární vztah - vztah může být složitější (např. nelineární). My jsme lineární vztah předpokládali*, testovali právě jej, a vyšlo nám, že v datech (na dané hladině významnosti) lineární vztah existuje. V datech však může být jiný, např. kvadratický vztah, který se projevuje i na lineární škále.*

Rovněž je třeba upozornit, že nalezená souvislost v žádném případě neznamená, že mezi kouřením a depresivitou existuje přímočarý, nebo dokonce příčinný (kauzální) vztah. Souvislost může být značně složitá, ale může být také pouze zdánlivá, způsobená veličinami (tzv. matoucími faktory), které ovlivňují obě sledované veličiny, a ty se se pak stávají (pouze zdánlivě) souvislými.

Příklad: Srovnání výsledků testu 1 a 2 zadaných na cvičení SSL v LS 2014/15.
Výsledky testů 1 a 2 shrnuje níže uvedená tabulka a obr. 8.

výsledek testu 1	výsledek testu 2	rozdíl test 2 - test 1
3.7	2.8	-0.9
3.5	3.8	0.3
3.0	3.5	0.5
2.7	2.5	-0.2
3.3	-	-
4.0	2.5	-1.5
-	1.8	-
3.2	2.5	-0.7
2.4	3.5	1.1
0.7	2.1	1.4
2.1	2.3	0.2
3.4	2.8	-0.6
2.9	2.5	-0.4
0.6	2.1	1.5
-	2.5	-
3.6	3.3	-0.3
3.7	2.0	-1.7
1.8	2.7	0.9
3.9	3.5	-0.4
2.3	1.5	-0.8
3.9	3.0	-0.9
3.3	-	-
-	2.7	-
2.3	3.4	1.1
1.6	2.5	0.9
3.6	2.7	-0.9
3.7	3.5	-0.2
2.4	2.8	0.4
2.8	3.5	0.7
2.9	3.5	0.6
2.7	-	-
2.3	2.9	0.6
-	2.0	-
2.1	2.8	0.7
3.5	3.3	-0.2

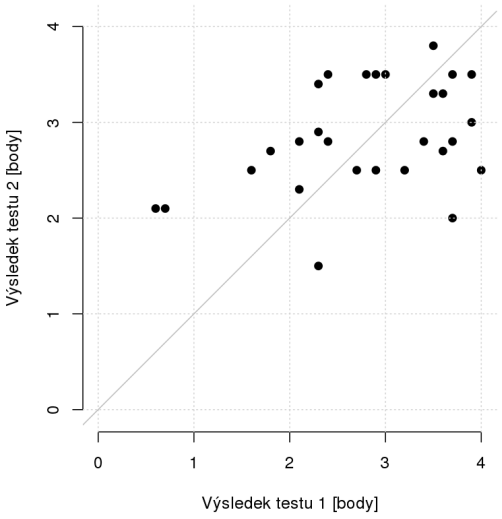
Na hladině 5% otestujte, zda jsou výsledky testu 1 srovnatelné s výsledky testu 2, a zda je mezi výsledky nějaká závislost. Co se dá z výsledku usuzovat?

K zodpovězení otázky můžete potřebovat:

- průměr z testu 1 $\bar{t_1} \doteq 2,835$,
- výběrová směrodatná odchylka výsledků testu 1 $s_1 \doteq 0,882$,
- průměr z testu 2 $\bar{t_1} = 2,775$,
- výběrová směrodatná odchylka výsledků testu 2 $s_2 \doteq 0,585$,
- průměrný rozdíl (test 2 - test 1) $\bar{d} \doteq 0,0429$, výběrová směrodatná odchylka rozdílů $s_d \doteq 0,861$,
- korelační koeficient $r = 0,411$.

Řešení:

Jedná se o párová pozorování (hodnoty v jednotlivých řádcích odpovídají výsledkům dvou testů u jednotlivých studentů), tedy musíme použít párový test.



Obr. 8: Srovnání výsledků testu 1 a 2 zadaných na cvičení SSL v LS 2014/15. Šedá šikmá čára odpovídá oblasti, v níž je výsledek testu 1 shodný s výsledkem testu 2.

Můžeme váhat mezi parametrickým t-testem a nějakým neparametrickým testem, např. Wilcoxonovým testem. Proti normalitě mluví to, že data se nacházejí se v omezeném intervalu $[0, 4]$ *bodů, a nelze asi jednoduše určit typickou hodnotu, které budou nabývat. Naproti tomu víme, že výsledek je dán jako součet bodů dosažených v jednotlivých testových otázkách, takže pokud by byly jednotlivé otázky nezávislé, lze na základě centrální limitní věty očekávat, že součet se bude blížit k normalitě (i když pro malý počet otázek jen pomalu).*

Zvolíme nejprve párový t-test.

Budeme předpokládat, že $d \sim N(\mu, \sigma^2)$. Máme k dispozici 28 úplných pozorování.

Za nulové hypotézy budeme očekávat, že výsledky v obou testech budou srovnatelné, tedy že rozdíly budou nulové:

$$H_0 : d = 0$$
$$H_A : d \neq 0$$

Testová statistika

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{s_d/\sqrt{28}}$$
$$t = \frac{0,0429}{0,861}\sqrt{28}$$
$$\doteq 0,264$$

a kritická hodnota představovaná $97,5\%$ kvantilem t-rozdělení je $q_{t_{28-1}}(0,975) \doteq 2,05$.

Protože $|t| \leq q_{t_{27}}(0,975)$, H_0 na hladině 5% nezamítáme. P-hodnota je $2(1 - F_{t_{27}}(0,264)) \doteq 0,794$.

Pokud bychom použili párový Wilcoxonův test a předpokládali, že rozdíly pocházejí z nějakého symetrického rozdělení s mediánem m, tedy $d \sim F(m)$, testovali bychom stejnou nulovou hypotézu:

$$H_0 : d = 0$$

proti

$$H_A : d \neq 0.$$

Ani tento test by nulovou hypotézu nezamítl. P-hodnota by v tomto případě vyšla velmi podobná: $P \doteq 0,776$.

Z výsledků usuzujeme, že mezi výsledky testů nebyl významný rozdíl, což může např. znamenat, že náročnost obou testů byla srovnatelná.

Dále budeme testovat, zda výsledek v prvním testu souvisel s výsledkem ve druhém testu. Protože výsledky jsou kvantitativní (číselné) a ne kvalitativní (např. prospěl/neprospěl), můžeme k testu závislosti použít test výběrového korelačního koeficientu.

Testová statistika t je

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,411\sqrt{28-2}}{\sqrt{1-0,411^2}} \doteq 2,3$$

a kritická hodnota je $q_{t_{26}}(0,975) = 2,06$. Protože $|t| > q_{t_{26}}(0,975)$, zamítáme nulovou hypotézu o nulovosti výběrového korelačního koeficientu.

Na hladině 5% jsme tedy prokázali, že výsledky v jednotlivých testech nejsou nezávislé - průměrně platí, že úspěch v jednom testu předurčuje úspěch ve druhém.

Výše uvedený test pracoval s oboustrannou alternativou. Vzhledem k tomu, že lze patrně očekávat, že pokud budou výsledky jednotlivých testů souviset, bude tato souvislost nejspíš přímou úměrou (čím lepší výsledek jednoho testu, tím lepší výsledek druhého), mohli bychom pracovat i s jednostrannou alternativou:

$$H_0 : r = 0$$
$$H_A : r > 0$$

a souvislost by vyšla významnější, než při obouostranné alternativě.

4 Lineární regrese

4.1 Lineární regrese

Příklad: Srovnání výsledků testu 1 a 2 zadaných na cvičení SSL v LS 2014/15 - lineární regrese (Pokračování předchozího příkladu.)

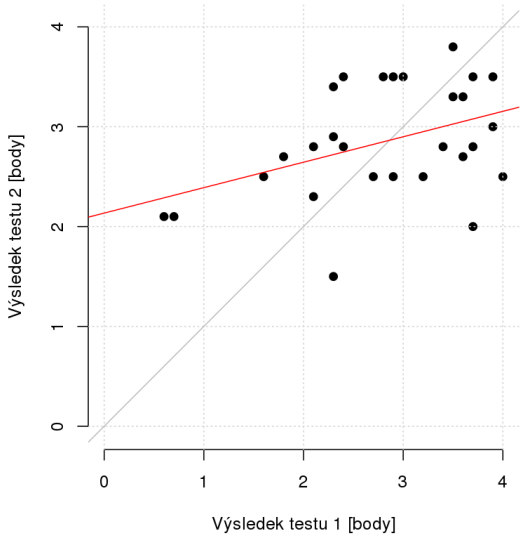
Modelujte výsledek testu 2 pomocí výsledku testu 1.

- formulujte model a vysvětlete jej
- odhadněte parametry modelu (jsou významné?)
- interpretujte parametry modelu
- kolik procent variability v datech je schopen model vysvětlit?
- kdybychom uvažovali obrácený model (výsledek testu 1 vysvětlovaný pomocí výsledku testu 2), jaká by byla hodnota koeficientu příslušného k výsledku testu 2?

Co se dá z výsledků usuzovat?
Nápověda:

- $\widehat{\theta_0} \doteq 2,135$, $\widehat{\sigma^2_{\widehat{\theta_0}}} \doteq 0,327^2$, $t_{df} \doteq 6,523$
- $\widehat{\theta_1} \doteq 0,255$, $\widehat{\sigma^2_{\widehat{\theta_1}}} \doteq 0,111^2$, $t_{df} \doteq 2,296$
- koeficient determinace $r^2_{1,2} = \frac{\widehat{\sigma^2_B}}{\widehat{\sigma^2_B}} \doteq 0,169$.
- korelační koeficient $r = 0,411$.

Řešení:



Obr. 9: Model lineární regrese vysvětlující výsledek testu 2 pomocí výsledku testu 1. Šedá šikmá čára odpovídá oblasti, v níž je výsledek testu 1 shodný s výsledkem testu 2. Červená čára představuje model lineární regrese - přímku proloženou daty, která pro výsledek testu 1 (na vodorovné ose) udává průměrný výsledek testu 2 (na svislé ose).

Počet bodů získaných i-tým studentem v testu 1 označíme jako A_i a počet bodů získaných i-tým studentem v testu 2 jako B_i.

- model
$$B_i = \theta_0 + \theta_1 A_i + \epsilon_i \tag{30}$$
je znázorněn na obr. 9.

Interpretace koeficientů:

  - θ_0: průměrně kolik bodů z testu 2 získá student, který z testu 1 nezískal žádný bod?
  - θ_1: průměrně kolikabodový nárůst v test 2 lze očekávat v souvislosti s jednobodovým nárůstem v testu 1, neboli srovnáme-li dva studenty, z nichž jeden získal v testu 1 o jeden bod více než druhý, průměrně o kolik bodů více získá tento první student v testu 2 se srovnání s druhým studentem?

- významnosti parametrů (jsou významně nenulové?)
  - θ_0:
$$|t_{\widehat{\theta_0}}| \doteq |6,523| > t_{28-2}(1-0,05/2) \doteq 2,06,$$
tedy $\widehat{\theta_0}$ je vysoce významně nenulový (P-hodnota je $6,5 \cdot 10^{-7}$)
  - θ_1:
$$|t_{\widehat{\theta_1}}| \doteq |2,296| > t_{28-2}(1-0,05/2) \doteq 2,06,$$
tedy i $\widehat{\theta_1}$ je významně nenulový (P-hodnota je $0,030$)

- interpretace významně kladného $\widehat{\theta_0}$: v druhém testu průměrně bodovali i studenti, kteří v prvním testu nezískali žádný bod. Interpretace významně kladného $\widehat{\theta_1}$: výsledek prvního testu významně předpovídá výsledek druhého testu, i když významnost není veliká; s jednotkovým nárůstem počtu bodů v testu 1 přitom souvisí nárůst v testu 2 pouze o $0,26$ bodu.

- koeficient determinace $R^2_{1,2} = \frac{\widehat{\sigma^2_B}}{\widehat{\sigma^2_B}} \doteq 0,169$, tedy výsledek prvního testu vysvětuje pouze cca 17% variability ve výsledcích druhého testu. Druhý test se patrně týkal jiné látky, než test první.

- kdybychom uvažovali obrácený model:
$$A_i = \vartheta_0 + \vartheta_1 B_i + \epsilon_i \tag{31}$$
(tj. výsledek testu 1 bychom vysvětlovali pomocí výsledku testu 2), mohli bychom odhad koeficientu ϑ_1 spočítat jako $\vartheta_1 = \frac{r^2}{\widehat{\theta_1}} = \frac{0,411^2}{0,255} \doteq 0,664$ *bez toho, že bychom jej museli počítat z modelu (31)!* To plyne z faktu, že
$$r_{A,B} = \sqrt{\widehat{\theta_1}\widehat{\vartheta_1}}\, sign(\widehat{\theta_1}), \tag{32}$$
kde $r_{A,B}$ je výběrový korelační koeficient vektorů A a B, $\widehat{\theta_1}$ je odhad regresního koeficientu θ_1 v modelu (30) a $\widehat{\vartheta_1}$ je odhad regresního koeficientu ϑ_1 (31).