

SSL cvičení - ML 2 + podmíněná rozdělení

3. listopadu 2012

1 Maximální věrohodnost (spojitého rozdělení)

Odvoďte vzorce pro maximálně věrohodný odhad parametrů μ a σ^2 normálního rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$p(x; \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2 Továrna na žárovky

V továrně na výrobu žárovek testovali, za jak dlouho žárovka praskne. Otestovali n žárovek a získali tak množinu měření $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, kde t_i vyjadřuje čas, po který žárovka vydržela svítit, než praskla. Víte, že měření t_i mají exponenciální rozdělení

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Odvoďte maximálně věrohodný odhad parametru λ .

3 Sdružená pravděpodobnost

Máme v osudí 3 černé a 2 bílé míče. Náhodně vybereme míč, vrátíme ho zpět, a pak znovu náhodně vybereme míč. Náhodné veličiny X a Y jsou definovány následovně

$$X = \begin{cases} 1, & \text{první tažený bílý} \\ 0, & \text{první tažený černý} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{druhý tažený bílý} \\ 0, & \text{druhý tažený černý} \end{cases}$$

Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé? Vyjádřete tabulkou sdruženou pravděpodobnost $p_{X,Y}$.

4 Podmíněná rozdělení

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Na X jsou definovány následující náhodné veličiny

$$Y = \begin{cases} 1, & x < b \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad Z = \begin{cases} 1, & x > a \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

kde $0 < a < b < 1$.

Jsou náhodné veličiny Y a Z nezávislé? Vypočítejte $E(Y|Z)$, $D(Y|Z)$, $E(E(Y|Z))$, $E(D(Y|Z))$, $D(E(Y|Z))$ a ověřte rovnost $DY = D(E(Y|Z)) + E(D(Y|Z))$.