Ukázka zadání zkoušky z Pokročilé analýzy LS 16/17

1. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $p \in \langle 1, \infty)$.
    - Co jsou to množiny $\mathcal{L}^p(X)$ a $L^p(X)$? Jak je definováno $\|f\|_p$ pro $f \in \mathcal{L}^p(X)$?
    - Nechť $\mu(X) < \infty$, $f \in \mathcal{L}^4(X)$. Ukažte, že pak $f \in \mathcal{L}^2(X)$.
    (Návod: Aplikujte Hölderovu nerovnost na funkce $u \equiv 1$ na X a $v = |f|^2$.)

2.
    - Definice adjungovaného operátoru. Důkaz existence adjunkce.
    - H je Hilbertův prostor, x, $y \in H$. Operátor $T_{x,y} \in B(H)$ je dán předpisem
    $$T_{x,y}(z) = \langle z, y \rangle x, \quad z \in H.$$
    Stanovte $T^*_{x,y}$.
    - Ukažte, že T je samoadjungovaný $\iff$ pro každý unitární operátor U je UTU^* také samoadjungovaný.

3.
    - Definice spektra a spektrálního poloměru. Věta o spektrálním rozkladu normální matice.
    - $T \in B(H)$ a pro $S \in B(H)$ existuje $S^{-1} \in B(H)$. Ukažte, že STS^{-1} má stejné spektrum jako T.