Věty o pevném bodě

konstruktivní (Banachova věta) | existenční (Brouwerova věta)

Def: $T: X \to Y$ je zobrazení, $X \subseteq Y$. $u \in X$ je pevný bod zobrazení T jestliže
$$T(u) = u.$$

Pozorování: Je-li $T: X \to Y$ spojité zobrazení, pak konvergence posloupnosti
$$(T^n u_0),\ u_0 \in X$$
implikuje, že $T^n u_0$ konverguje k pevnému bodu zobrazení T.

Důkaz: $T^n u = u_n$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & T u_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ u & = & Tu \end{array}$$

Konvergence zajištěna jistými podmínkami kladenými na T. např.

Df: X – normovaný prostor
$K \subseteq X$.

Zobrazení $T: K \to K$ se nazývá kontraktivní (na K) jestliže existuje $0 \leq \alpha < 1$ tak, že

$$\|Tu - Ty\| \leq \alpha \|u - y\| \quad \forall u, y \in K.$$

Věta (Banachova věta o pevném bodě)

Nechť K je uzavřená množina v Banachově prostoru X.
Nechť $T: K \to K$ je kontraktivní zobrazení s koeficientem α.

Pak existuje právě jeden pevný bod $u \in K$ zobrazení T.
Navíc, pro libovolné $u_0 \in K$ platí: $\lim T^n u_0 = u$ a pro $u_n = T^n u$ máme odhad:

$$\|u_n - u\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|u_0 - u_1\|$$

<u>Dk</u>: $x_0 \in K$

$x_{n+1} = T x_0$ – iterace

$m \geq n$

$\|x_n - x_m\| = \|T^n x_0 - T^m x_0\| \leq$

$\leq \alpha^n \|x_0 - x_{m-n}\| \leq$

$\leq \alpha^n \cdot [\|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \dots + \|x_{m-n-1} - x_{m-n}\|]$

$\leq \alpha^n \|x_0 - x_1\| [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}]$

$= \alpha^n \dfrac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \cdot \|x_0 - x_1\|. \quad (*)$

$\downarrow 0$ $m, n \to \infty$

$\Rightarrow$ (x_n) je cauchyovská a tedy konvergentní k punktu $x \in K$

$\Rightarrow$ $Tx = x$.

Jednoznačnost: $Tx = x$
$Ty = y$

$\Rightarrow \|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\|$

$\Rightarrow \|x - y\| = 0$

Pro pevné n a $m \to \infty$ dostaneme z $(*)$

$\|x_n - x\| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\| \to$ odhady chyb.

Příklad kontraktivního zobrazení: lineární zobrazení

$T: X \to X$

s $\|T\| < 1$. Pak $\alpha = \|T\|$.

není ale tak zajímavé - pevný bod je 0 a $T^n x_0 \to 0$ pro všechna $x_0 \in X$.

Zajímavé je $x \mapsto Tx + c$, T je lin. s $\|T\| < 1$

Def: funkce f definovaná na $\langle a, b\rangle$ se nazývá Lipschitzovská jestliže splňuje

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$$

Je-li konstanta $K < 1$ pak f je kontraktivní zobrazení a existuje tedy pevný bod $x \in \langle a, b\rangle$.

$$f(x) = x$$

za předpokladu $f: \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$

Speciálně, je-li f spojitě diferencovatelná a

$$K = \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f'(x)| < 1$$

pak f je Lipschitzovská a kontraktivní s konstantou K.

Důsledkem [illegible] je [illegible] ale [illegible]

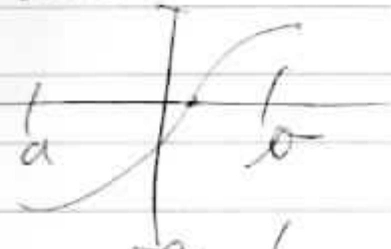
Aplikace 1:

$F: \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$

$F(a) < 0; \ F(b) > 0$

Hledáme řešení rovnice

$F(x) = 0$



F je spojitě diferencovatelná!

Zvolme $\lambda \neq 0$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x - \lambda F(x) = x$

$$f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$$

λ lze zvolit tak, že

$$-1 < f'(x) < 1$$

metoda prosté iterace, $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \ldots$ konverguje k řešení

Aplikace 2

Soustava lineárních rovnic

$$Ax = b \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$
$$b \in \mathbb{C}^n$$

převedeme na úlohu o pevném bodě

$$x = Hx + q$$

$H \in M_n(\mathbb{C})$ - iterační matice

Zobrazení $T(x) = Hx + q$.
Řešíme úlohu

$$T(x) = x.$$

Je-li libovolná operátorová norma matice $\|H\| < 1$ pak T je kontraktivní s $\alpha = \|H\|$:

$$\|Tx - Ty\| = \|Hx - Hy\| \leq \|H\| \, \|x - y\|.$$

Pak lze aplikovat metodu prosté iterace

$$x_{n+1} = Hx_n + q \qquad x_0 \in \mathbb{C}^n.$$

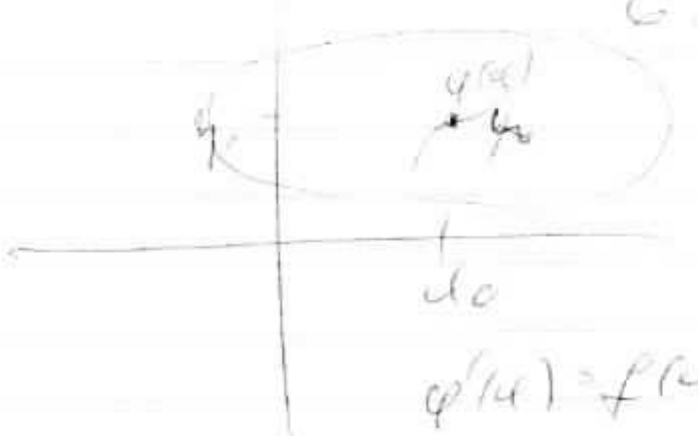
Ve skutečnosti platí věta

$$\boxed{\text{metoda iterace funguje} \iff r(H) < 1.}$$

- Vyhledávání v Google - metoda prosté iterace.

Aplikace 3 Řešení DR

Věta (Picardova věta)
Máme DR
$$y'(x) = f(x, y) \qquad (*)$$
s počáteční podmínkou
$$y(x_0) = y_0. \qquad (**)$$
Přitom f je definovaná a spojitá v nějaké rovinné oblasti $G \ni (x_0, y_0)$ a splňuje v této oblasti Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le M |y_1 - y_2|.$$
Pak v nějakém intervalu $|x - x_0| \le d$ $\exists!$ řešení $(*)$ $(**)$



$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Dk: Zvolme G' - uzavřený obdélník $(x_0, y_0) \in G'$; $G' \subset G$.

At $\max_{(x,y)\in G'} |f(x,y)| \le L$

Vol d tak, že

(α) $|x - x_0| < d$, $|y - y_0| < Ld \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y) \in G'$

(β) $Md < 1$.

$(*) + (**) \Leftrightarrow$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

Aplikujeme Banachovu větu pro

$X = C\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$ s max. normou

$K = \{\varphi \in X \mid |\varphi(x) - y_0| \le Ld \;\forall x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle\}$

$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$

Ověření podmínek pro větu o kontrakci:

- K je uzavřená
- $T(K) \subseteq K$

$\varphi \in K \quad \psi(x) = T\varphi(x)$

$$|\psi(x) - y_0| = \Big| \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt}_{|\,| \leq L} \Big| \leq L d$$

- T je kontraktivní

$$|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_2(t))\, dt \Big|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\, dt$$

$$\leq M d \max_{\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

$$\Rightarrow \quad \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq \underbrace{Md}_{< 1} \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

$\Rightarrow$ jednoznačnost + existence řešení (lokálně).

Věty "neislemenální"

Věta Brouwerova

Nechť f je spojité zobrazení zobrazující uzavřenou kouli $B_r = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|_2 \leq r\}$ do sebe. Pak existuje $u_0 \in B_r$ tak, že

$$f(u_0) = u_0.$$

Mnoho variant, zobecnění pro nekonečnou dimenzi, atd.

"nelze učesat kouli", atd. – matematická kniha