Mohutnosti množin [PAN 2012]

(krátký úvod)

$|A|$ – mohutnost množiny A

$|A| = |B|$ – existuje bijekce (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení) množiny A na množinu B

$|A| < |B|$ – existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B,
ale neexistuje zobrazení množiny A na množinu B

Platí:

- Pro každé dvě množiny A, B platí právě jeden ze vztahů
$$|A| = |B|, \quad |A| < |B|, \quad |A| > |B|.$$
- Je-li $B \subset A$, pak $|B| \leq |A|$ (zkratka za: $|B| < |A|$ nebo $|B| = |A|$).

A konečná – lze ji zapsat ve tvaru $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, kde $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$,
pro A konečnou definujeme: $|A| \overset{\text{def.}}{=} n \; (= |\{1, \dots, n\}|)$

Platí:

- A je konečná právě tehdy, když $|A| < |\mathbb{N}|$.

A spočetná – $|A| \leq |\mathbb{N}|$

(někdy: A spočetná – $|A| = |\mathbb{N}|$; A nejvýše spočetná – A je konečná nebo spočetná, tj. $|A| \leq |\mathbb{N}|$)

A nespočetná – $|A| > |\mathbb{N}|$

A nekonečná spočetná $\Leftrightarrow$ existuje bijekce $f : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} A$, tedy lze psát $A = \{a_n |\; a_n = f(n) \text{ pro } n \in \mathbb{N}\}$, tj.

Platí:

- A je spočetná právě tehdy, když lze její prvky uspořádat do prosté posloupnosti (konečné či nekonečné).

Příklad 1: Množina celých čísel je spočetná: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

Příklad 2: Množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná: Jedna z možností, jak srovnat uspořádané dvojice přirozených čísel do posloupnosti, je zřejmá z následujícího obrázku:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (2,1) & (1,3) & (1,4) & \dots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Máme tedy např. $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{(1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (3,1),\ (2,2),\ (1,3),\ (4,1),\ (3,2),\ (2,3),\ (1,4),\ (5,1),\ (4,2),\ (3,3),\ \dots\}$.
Odpovídající bijekce $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dána předpisem $f((i,j)) = \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + j$, kde zlomek odpovídá počtu dvojic s nižším součtem složek. (Tabulkou dvojic přirozených čísel lze projít i jinými způsoby. Zkuste nějaké najít.)

Příklad 3: Množina racionálních čísel je spočetná: Nejdříve uspořádáme do posloupnosti kladná racionální čísla. To lze provést podobným způsobem jako v předchozím příkladu. Stačí místo uspořádaných dvojic psát zlomky (tj. např místo dvojice $(5,1)$ napsat $\frac{5}{1}$) a uvědomit si, že např. dvojice $(2,3)$ a $(4,6)$ (tj. zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{6}$) reprezentují totéž racionální číslo. Zlomek proto do posloupnosti zapíšeme jen tehdy, když v ní ještě není jiný zlomek stejné hodnoty. Dostaneme tak $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \dots\}$ [1]. Celou množinu racionálních čísel nyní uspořádáme do posloupnosti stejným způsobem, jaký jsme použili v Příkladu 1 pro množinu celých čísel. Dostaneme tak $\mathbb{Q} = \{0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\}$.

[1] Do uvedené části posloupnosti nejsou z tabulky zařazeny zlomky $\frac{2}{2} (= \frac{1}{1})$, $\frac{4}{2} (= \frac{2}{1})$, $\frac{3}{3} (= \frac{1}{1})$, $\frac{2}{4} (= \frac{1}{2})$.

Věta: **[PAN 2012]**

Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná.

Důkaz: Ukážeme, že pro $M = \{\, x \in \langle\, 0,1\,) \mid$ v dekadickém rozvoji čísla x jsou pouze cifry 0 a 1 $\}$ je $|M| > |\mathbb{N}|$. Pak platí také $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, protože $M \subset \mathbb{R}$ (a tedy $|\mathbb{R}| \geq |M|$ – viz výše).
Nespočetnost množiny M dokážeme **sporem**. Předpokládejme, že množina M je spočetná. Pak lze **všechny** její prvky uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti, tj. $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$, kde

$$\begin{array}{c} \textbf{všechny} \\ \text{prvky } M \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_1 & = & 0, & \underline{\mathbf{a_{11}}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ a_2 & = & 0, & a_{21} & \underline{\mathbf{a_{22}}} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ a_3 & = & 0, & a_{31} & a_{32} & \underline{\mathbf{a_{33}}} & a_{34} & \ldots \\ a_4 & = & 0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \underline{\mathbf{a_{44}}} & \ldots \\ \vdots & = & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \underline{\ddots} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} a_{ij} \in \{\,0,1\} \\ \forall\ i,\ j \in \mathbb{N} \end{array}$$

Označme pro $i \in \mathbb{N}$

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \ a_{ii} = 0 \\ 0, & \text{jestliže } \ a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Pak pro číslo

$$b \;=\; 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ \ldots$$

platí $b \in M$, ale přitom pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $b \neq a_i$, protože $b_i \neq a_{ii}$ (tj. b se od i-tého prvku posloupnosti liší minimálně na i-tém místě za desetinou čárkou). Tím jsme dostali **spor** s předpokladem, že posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ obsahuje **všechny** prvky množiny M. Prvky množiny M tedy nelze uspořádat do posloupnosti. Tato množina proto není spočetná, čímž nemůže být spočetná ani množina $\mathbb{R}$.

Příklad 4: Je-li $a < b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, pak (a,b) je nespočetná množina: Je-li $a, b \in \mathbb{R}$, pak funkce $g(t) = \frac{\pi}{b-a}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)$ zobrazí vzájemně jednoznačně interval (a,b) na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a funkce $h(t) = \operatorname{tg} t$ zobrazí vzájemně jednoznačně interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na $\mathbb{R}$. Tedy $f = h \circ g$ je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu (a,b) na $\mathbb{R}$. Odtud dostáváme, že $|(a,b)| = |\mathbb{R}|$. Pokud $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$, pak pro libovolná $\alpha, \beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ je $(\alpha,\beta) \subset (a,b) \subset \mathbb{R}$. Tedy $|(\alpha,\beta)| \leq |(a,b)| \leq |\mathbb{R}|$. Protože $|(\alpha,\beta)| = |\mathbb{R}|$, platí také $|(a,b)| = |\mathbb{R}|$.

Příklad 5: Množina iracionálních čísel je nespočetná: Už víme, že množina racionálních čísel je spočetná, tedy všechny její prvky lze uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti. Pišme např. $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Kdyby byla spočetná i množina iracionálních čísel, tj. kdybychom mohli psát např. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, dostali bychom, že platí $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}$. Jenže to by znamenalo, že je spočetná i množina reálných čísel. To ale podle Věty 12.1 není pravda. Proto množina iracionálních čísel být spočetná nemůže.

Tvrzení:

Spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina.

Důkaz: Mějme dány spočetné množiny A_1, A_2, A_3, ... Protože jsou množiny spočetné, můžeme jejich členy uspořádat do posloupnosti. Pišme tedy $A_i = \{a_{i,1},\ a_{i,2},\ a_{i,3}, \ldots\}$, $i \in \mathbb{N}$. Prvky $a_{i,j}$ nyní můžeme uspořádat do posloupnosti podle jejich indexů podobným způsobem, jakým jsme v Příkladu 2 uspořádali do posloupnosti prvky množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Abychom dostali prostou posloupnost, zapíšeme prvek do posloupnosti jen tehdy, když v ní ještě není.

Věta:

Pro každou množinu A platí $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, kde $\mathcal{P}(A)$ je potenční množina množiny A, tj. množina všech podmnožin množiny A.

Důkaz: Zobrazení $a \mapsto \{a\}$ je prosté zobrazení množiny A do její potenční množiny $\mathcal{P}(A)$. Dokážeme nyní **sporem**, že nemůže existovat zobrazení množiny A **na** $\mathcal{P}(A)$. Nechť tedy nějaké takové zobrazení existuje. Označme ho f. Zobrazení f přiřazuje každému prvku množiny A nějakou podmnožinu množiny A. Je-li tedy $a \in A$, můžeme se ptát, zda platí $a \in f(a)$, či nikoli. Označme $B = \{a \in A :\ a \notin f(a)\}$. Protože $B \in \mathcal{P}(A)$ a f je zobrazení **na**, musí existovat $b \in A$ takové, že $B = f(b)$. Snadno zjistíme, že pro b nemůže platit ani $b \in B$ (protože pak by bylo $b \in B = f(b)$ a v B jsou jen ty prvky množiny A, které ve svém obrazu neleží) ani $b \notin B$ (protože pak by b neleželo ve svém obrazu $f(b) = B$, a tedy by do množiny B patřit mělo). Došli jsme tak ke **sporu** s předpokladem existence zobrazení množiny A **na** její potenční množinu. Nerovnost $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ tedy platí.