KAPITOLA 7: Spektrální analýza operátorů a matic

Definice: Nechť H je komplexní Hilbertův prostor. Řekneme, že operátor $T \in \mathcal{B}(H)$ je **normální**, jestliže

$$T^*T = TT^*.$$

Tvrzení: Operátor $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální právě tehdy, když

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \qquad \forall x \in H.$$

Důkaz: Podle důsledku (ii) polarizační identity se operátory $R, S \in B(H)$ rovnají právě tehdy, když pro všechna $x \in H$ platí $\langle Rx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$. To znamená, že $TT^* = T^*T$, právě když pro všechna $x \in H$ je $\langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$. Tato rovnost je ale z definice adjungovaného operátoru ekvivalentní s rovností $\|Tx\| = \|T^*x\|$, protože $\langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$ a $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2$. $\square$

Tvrzení: Každý samoadjungovaný, pozitivní nebo unitární operátor je normální.

Důkaz: Nechť $T \in B(H)$. Je-li T samoadjungovaný, pak $T^*T = TT = TT^*$, tedy T je normální. Pokud je T pozitivní, je i samoadjungovaný, takže už víme, že je normální. Pro unitární operátor T máme $T^*T = T^{-1}T = I = TT^{-1} = TT^*$. Tedy i v tomto případě je T normální. $\square$

Definice: **Spektrum**, $\sigma(T)$, operátoru $T \in \mathcal{B}(H)$ je podmnožina $\mathbb{C}$ taková, že

$$\lambda \in \sigma(T) \quad \text{právě tehdy, když} \quad (T - \lambda I) \quad \text{nemá inverzi v } \mathcal{B}(H).$$

Neboli

$$\lambda \notin \sigma(T) \quad \text{právě tehdy, když} \quad \text{existuje } S \in \mathcal{B}(H) \text{ tak, že } S(T - \lambda I) = (T - \lambda I)S = I.$$

Hodnotu

$$r(T) = \sup\{\, |\lambda| \;\big|\; \lambda \in \sigma(T) \,\}$$

nazýváme **spektrální poloměr** operátoru T. **Bodové spektrum** operátoru T je množina

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ není prostý}\}.$$

Prvek $\lambda \in \sigma_p(T)$ se nazývá **vlastní číslo** operátoru T. Vektor $v \in H \setminus \{\mathbf{0}\}$, pro který platí

$$Tv = \lambda v,$$

se nazývá **vlastní vektor** příslučný vlastnímu číslu λ.

Příklad: Nechť $M \neq \{0\}$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a P_M je ortogonální projekce na tento podprostor. Pak $\sigma(P_M) = \{0, 1\}$, a tedy $r(P_M) = 1$. Obecné $x \in H$ totiž můžeme podle projekční věty zapsat ve tvaru $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_M \in M$ a $x_{M^\perp} \in M^\perp$. Tedy $P_M x = P_M(x_M + x_{M^\perp}) = x_M$. Odtud vidíme, že pro $x \neq 0$ je $P_M x = \lambda x$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$, jen když $x_M = x$ a $x_{M^\perp} = 0$ nebo $x_M = 0$ a $x_{M^\perp} = x$. První možnost nastává pro $x \in M$ a odpovídajícím vlastním číslem je $\lambda = 1$. Druhá možnost nastane pro $x \in M^\perp$ a vlastní číslo je v tomto případě $\lambda = 0$. (Kdyby bylo $M = \{0\}$, byl by P_M nulový operátor, a tedy bychom měli $\sigma(P_M) = \{0\}$, $r(P_M) = 0$.)

Věta: Každý operátor $T \in B(H)$ má neprázdné spektrum a spektrum je vždy omezená uzavřená množina v $\mathbb{C}$.

Důkaz nebudeme provádět. $\square$

Poznámka: Obecně může pro $\lambda \in \mathbb{C}$ platit $\lambda \in \sigma(T)$ ze tří důvodů:

1) Operátor $T - \lambda I$ není prostý. Pak je $\lambda \in \sigma_P(T)$.

2) Operátor $T - \lambda I$ je prostý, ale není <u>na</u>, tj. $R(T) \neq H$. V tomto případě sice existuje operátor $(T - \lambda I)^{-1}$, není ale definovaný na celém H (tedy nemůže být v $B(H)$).

3) Operátor $T - \lambda I$ je prostý i <u>na</u> (tedy inverzní operátor existuje a je definován na celém H), operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ ale není spojitý.

Jak ukážeme, pro operátory na prostoru konečné dimenze může nastat jen první případ. Na druhou stranu uvidíme, že v případě operátoru na prostoru nekonečné dimenze může být bodové spektrum prázdné.

Tvrzení: Nechť $T \in B(H)$, $\dim H < \infty$. Pak $\sigma(T) = \sigma_P(T)$.

Důkaz: Lineární zobrazení mezi prostory stejné konečné dimenze je <u>na</u> právě tehdy, když je prosté. To znamená, že inverzní operátor k operátoru $T - \lambda I$ neexistuje právě pro ta λ, pro která není operátor $T - \lambda I$ prostý. Přitom každý lineární operátor na prostoru konečné dimenze je omezený, a tedy i spojitý. Odtud dostáváme, že do spektra $\sigma(T)$ patří přesně ta λ, která leží v $\sigma_P(T)$.

Příklad (Operátor s nebodovým spektrem): Uvažujme operátor $T : L^2\langle 0,\, 1\rangle \to L^2\langle 0,\, 1\rangle$ definovaný předpisem $Tf = xf(x)$ (tj. $T = T_g$ je multiplikativní operátor odpovídající násobení funkcí $g(x) = x$). Spektrum operátoru T má tyto vlastnosti:

- <u>$\sigma(T) = \langle 0,\, 1\rangle$</u>: Ať $\lambda \in \langle 0,\, 1\rangle$. Ukážeme, že $T - \lambda I$ nemá inverzi. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje $S \in B(L^2\langle 0,\, 1\rangle)$ takové, že $(T - \lambda I)S = I$. Zřejmě $h(x) \equiv 1 \in L^2\langle 0,\, 1\rangle$, tedy Sh je definováno a máme $Sh \in L^2\langle 0,\, 1\rangle$. Přitom

$$(x - \lambda)Sh = (\,(T - \lambda I)S)h = Ih = 1,$$

odkud

$$Sh = \frac{1}{x - \lambda}, \qquad x \neq \lambda\,.$$

Avšak $\dfrac{1}{x - \lambda} \notin L^2\langle 0,\, 1\rangle$, neboť

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x - \lambda}\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^\lambda \frac{1}{(x - \lambda)^2}\,\mathrm{d}x + \int_\lambda^1 \frac{1}{(x - \lambda)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x - \lambda}\right]_0^\lambda + \left[-\frac{1}{x - \lambda}\right]_\lambda^1 = \infty.$$

Tím jsme došli ke sporu s předpokladem existence inverzního operátoru $S \in B(L^2\langle 0,\, 1\rangle)$ k $(T - \lambda I)$. Tedy pro každé $\lambda \in \langle 0,\, 1\rangle$ je $\lambda \in \sigma(T)$. To znamená, že platí $\langle 0,\, 1\rangle \subset \sigma(T)$. Na druhou stranu, protože je funkce $g(x) = x$ na $\langle 0,\, 1\rangle$ reálná, je $T = T_g$ samoadjungovaný operátor, a jak bude ukázáno později, platí pro něj tedy $\sigma(T) \subset \langle -\|T\|,\, \|T\|\rangle$. Přitom $\|T\| = \|T_g\| = \|g\|_{L^\infty\langle 0,\, 1\rangle} = \operatorname{esssup}\{|x| \,\big|\, x \in \langle 0,\, 1\rangle\} = 1$, takže $\sigma(T) \subset \langle -1,\, 1\rangle$. Celkem jsme tak dostali $\langle 0,\, 1\rangle \subset \sigma(T) \subset \langle -1,\, 1\rangle$, odkud už okamžitě dostáváme $\sigma(T) = \langle 0,\, 1\rangle$.

- <u>$\sigma_P(T) = \emptyset$</u>: Opět provedeme důkaz sporem. Ať $g \in L^2\langle 0,\, 1\rangle$, $g \neq 0$ a $\lambda \in \langle 0,\, 1\rangle$ je takové, že $x\,g(x) = \lambda\,g(x)$ pro skoro všechna $x \in \langle 0,\, 1\rangle$. Pak ovšem pro skoro všechna $x \in M = \{x \in \langle 0,\, 1\rangle \,\big|\, g(x) \neq 0\}$ musí platit $x = \lambda$, což je možné, jen když má M míru nula. Tím jsme ale došli ke sporu s předpokladem, že $g \neq 0$ v $L^2\langle 0,\, 1\rangle$. Bodové spektrum operátoru T je tak prázdné.

Tvrzení: Nechť operátor $T \in B(H)$ má v $B(H)$ inverzi. Pak

$$\lambda \in \sigma(T) \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})\,.$$

Důkaz: Operátory T a T^{-1} mají v $B(H)$ inverzi, tedy $0 \notin \sigma(T)$ a $0 \notin \sigma(T^{-1})$. (Pro $\lambda \in \sigma(T)$ je tak λ^{-1} definováno a všechny prvky $\sigma(T^{-1})$ se dají zapsat ve tvaru λ^{-1}, kde $\lambda \neq 0$ je vhodné komplexní číslo.) Můžeme tedy v dalším uvažovat jen $\lambda \neq 0$. Ukážeme, že $\lambda \notin \sigma(T)$, právě když $\lambda^{-1} \notin \sigma(T^{-1})$. Mějme tedy dáno $\lambda \neq 0$. Pak

$$T^{-1} - \lambda^{-1}I = T^{-1}(I - \lambda^{-1}T) = \lambda^{-1}T^{-1}(\lambda I - T).$$

Tedy pokud $\lambda \notin \sigma(T)$, tj. existuje $(T - \lambda I)^{-1} \in B(H)$, pak existuje také

$$(T^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} = (\lambda^{-1}T^{-1}(\lambda I - T))^{-1} = -\lambda(T - \lambda I)^{-1}T \in B(H).$$

To znamená, že pro $\lambda \notin \sigma(T)$ platí $\lambda^{-1} \notin \sigma(T^{-1})$. Zaměníme-li nyní v právě dokázané implikaci λ^{-1} za λ a T^{-1} za T, zjistíme, že pokud $\lambda^{-1} \notin \sigma(T^{-1})$, pak také $\lambda \notin \sigma(T)$. Tím jsme tvrzení dokázali. $\square$

Tvrzení: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak

(i) $Tx = \lambda x$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$ implikuje $T^*x = \overline{\lambda}x$.

(ii) Jestliže $\lambda_1 \neq \lambda_2$, potom $\operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I) \perp \operatorname{Ker}(T - \lambda_2 I)$.

Důkaz: **(i)** Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$. Protože je operátor T normální, je také operátor $T - \lambda I$ normální (ověřte jako cvičení). Pro každé $x \in H$ tak platí

$$\|Tx - \lambda x\| = \|(T - \lambda I)\, x\| = \|(T - \lambda I)^* x\| = \|(T^* - \overline{\lambda} I)\, x\| = \|T^* x - \overline{\lambda} x\|.$$

(ii) Nechť $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I)$, $y \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_2 I)$, tj. $Tx = \lambda_1 x$, $Ty = \lambda_2 y$. Pak

$$\lambda_1 \langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\lambda}_2 y\rangle = \lambda_2 \langle x, y\rangle.$$

Protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí nutně být $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Tvrzení: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak

$$\lambda \notin \sigma(T) \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \text{existuje } c > 0 \text{ tak, že} \quad \|(T - \lambda I)x\| \;\geq\; c\|x\| \quad \forall x \in H.$$

Důkaz: Jelikož $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $0 \in \sigma(T - \lambda I)$, stačí uvažovat pouze případ $\lambda = 0$. Ukážeme tedy, že $0 \notin \sigma(T)$, právě když existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in H$ platí $\|Tx\| \geq c\|x\|$.

" $\Leftarrow$ " Protože pro všechna x platí $\|Tx\| \geq c\|x\|$, je operátor T prostý. Ukážeme nyní, že podprostor $R(T)$ je uzavřený. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$, $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Pak z našeho předpokladu dostáváme

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\, \|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c}\, \|Tx_n - Tx_m\|.$$

Posloupnost $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ je ale cauchyovská (je totiž konvergentní), takže je cauchyovská i posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, a má tak v úplném prostoru H limitu. Označme tuto limitu x. Protože je operátor T spojitý, konverguje posloupnost $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ k Tx. Současně má ale také konvergovat k y. Z jednoznačnosti limity tak dostáváme, že musí být $y = x$. To znamená, že $y \in R(T)$, a podprostor $R(T)$ je tak uzavřený. Dále potřebujeme ukázat, že $R(T) = H$. K tomu předpokládejme, že $x \in R(T)^{\perp}$. Protože $TT^*x \in R(T)$ a T je normální, máme

$$0 = \langle x, TT^* x\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Je tedy $\|Tx\| = 0$, a protože je T prosté, také $x = 0$. Tím je $R(T)^{\perp} = \{0\}$ a $R(T) = H$. Zbývá ještě ověřit, že je operátor T^{-1} spojitý, tj. $T^{-1} \in B(H)$. Nechť $y \in H$. Pak existuje $x \in H$ takové, že $y = Tx$ (je totiž $R(T) = H$). Podle předpokladu máme

$$\|y\| = \|Tx\| \geq c\, \|x\| = c\, \|T^{-1} y\|,$$

neboli

$$\|T^{-1} y\| \leq \frac{1}{c}\, \|y\|.$$

Protože bylo $y \in H$ libovolné, je operátor T^{-1} omezený ($\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$), a tím také spojitý.

" $\Rightarrow$ " Tuto část důkazu proveďte sami jako cvičení. $\square$

Několik zajímavých důsledků:

Důsledek: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když existuje posloupnost jednotkových vektorů $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| \;=\; 0.$$

Důkaz: Podle předchozího tvrzení $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když neexistuje $c > 0$, pro které by bylo $\|(T-\lambda I)x\| \geq c$ pro všechna $x \in H$ s normou $\|x\| = 1$, neboli když

$$\inf\{\, \|(T-\lambda I)x\| \;\big|\; \|x\| = 1 \,\} \;=\; 0.$$

To je ale z definice infima ekvivalentní právě s tím, že existuje posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1$, taková, že

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Tvrzení: Je-li $T \in \mathcal{B}(H)$ normální, pak

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\,\}}.$$

Důkaz: Nechť $\lambda \in \sigma(T)$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jednotkových vektorů, pro kterou platí $\|Tx_n - \lambda x_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (viz předchozí důsledek). Na základě Schwarzovy nerovnosti

$$|\langle Tx_n - \lambda x_n,\, x_n\rangle| \leq \|Tx_n - \lambda x_n\|\,\|x_n\| \;=\; \|Tx_n - \lambda x_n\| \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

Použijeme-li přepis

$$\langle Tx_n - \lambda x_n,\, x_n\rangle \;=\; \langle Tx_n,\, x_n\rangle - \lambda\|x_n\|^2 \;=\; \langle Tx_n,\, x_n\rangle - \lambda,$$

vidíme, že $\langle Tx_n,\, x_n\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Tedy $\lambda \in \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\,\}}$. □

Tvrzení: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$. Pak

(i) T je samoadjungovaný $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

(ii) T je pozitivní $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty)$,

(iii) T je unitární $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Důkaz: Využijeme toho, že všechny samoadjungované, pozitivní i unitární operátory jsou normální.

(i) Pokud je operátor T samoadjungovaný, pak pro každé $x \in H$ platí $\langle Tx,\, x\rangle \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\,\}} \subset \mathbb{R}.$$

(ii) Je-li T pozitivní operátor, pak $\langle Tx,\, x\rangle \geq 0$ pro všechna $x \in H$. To znamená, že

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\,\}} \subset \langle 0,\, \infty).$$

(iii) Nechť je T unitární operátor. Protože unitární operátory zachovávají normu, máme pro $x \in H$, $\|x\| = 1$, ze Schwarzovy nerovnosti

$$|\langle Tx,\, x\rangle| \;\leq\; \|Tx\|\,\|x\| \;=\; \|x\|^2 \;=\; 1.$$

Odtud

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\,\}} \subset \{\lambda \,\big|\, |\lambda| \leq 1\}.$$

Jak už jsme dříve dokázali, $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$. Tedy

$$\sigma(T^{-1}) \subset \{\lambda \,\big|\, |\lambda| \geq 1\}.$$

Protože je ale operátor T^{-1} také unitární, dostaneme pro jeho spektrum, stejně jako výše pro spektrum operátoru T,

$$\sigma(T^{-1}) \subset \{\lambda \,\big|\, |\lambda| \leq 1\}.$$

To ale znamená, že $\sigma(T^{-1}) \subset \{\lambda \,\big|\, |\lambda| = 1\}$, a tedy také $\sigma(T) \subset \{\lambda \,\big|\, |\lambda| = 1\}$. □

Věta: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak

$$||T|| \;=\; r(T).$$

Důkaz: Ověříme nyní jen nerovnost $r(T) \leq \|T\|$. Opačnou nerovnost dokážeme o něco později pro případ $\dim H < \infty$. Pro $x \in H$, $\|x\| = 1$, máme

$$|\langle Tx,\, x\rangle| \leq \|Tx\|\,\|x\| \leq \|T\|\,\|x\|^2 = \|T\|.$$

Protože je ale T normální, dostáváme odtud

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\}} \subset \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| \leq \|T\|\}.$$

Tedy skutečně platí

$$r(T) \;=\; \sup\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(T)\} \;\leq\; \|T\|.$$

□

Spektrální věty

V této části se zaměříme na Hilbertovy prostory konečné dimenze. Připomeňme, že v tomto případě je spektrum operátoru T tvořeno právě jeho vlastními čísly, tj. $\sigma(T) = \sigma_P(T)$.

Věta : Nechť H je Hilbertův prostor, $\dim H < \infty$, $T \in B(H)$ je normální operátor. Pak existuje ortonormální báze prostoru H složená z vlastních vektorů operátoru T.

Důkaz: Položme $n = \dim H$. Protože spektrum operátoru je neprázdná množina, má operátor T alespoň jeden vlastní vektor. Buď $v_1, \ldots, v_k$ nějaká ortonormální (konečná) posloupnost vlastních vektorů operátoru T, $Tv_i = \lambda_i v_i$. Protože je operátor T normální, máme $T^* v_i = \overline{\lambda} v_i$. Víme, že ortogonální množina neobsahující nulový prvek je vždy lineárně nezávislá. Je tedy nutně $k \leq n$. Jestliže je $k = n$, máme už hledanou ortonormální bázi. Pokud $k < n$, označme $X = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)$, $Y = X^{\perp}$. Protože $X \subsetneqq H$, je $Y \neq \{0\}$. Ať $y \in Y$. Pak pro $i = 1, \ldots, k$ máme

$$\langle v_i,\, Ty\rangle \;=\; \langle T^* v_i,\, y\rangle \;=\; \overline{\lambda}\langle v_i,\, y\rangle \;=\overline{\lambda} \cdot 0 \;=\; 0.$$

Odtud $Ty \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)^{\perp} = Y$, a tedy $T(Y) \subset Y$ (tj. podprostor Y je **invariantní** vůči T). Zúžíme-li tedy nyní operátor T na podprostor Y a zúžení označíme $\tilde{T}$ (tj. $\tilde{T}y = Ty$ pro $y \in Y$), bude $\tilde{T} \in B(Y)$. Jako výše operátor T, musí mít nyní i operátor $\tilde{T}$ alespoň jeden jednotkový vlastní vektor. Označme ho v_{k+1}. Protože je $\tilde{T}$ jen zúžení operátoru T, je v_{k+1} také vlastním vektorem operátoru T. A to vlastním vektorem, který je kolmý ke všem vektorům $v_1, \ldots, v_k$ (máme totiž $Y = X^{\perp}$). Tedy $v_1, \ldots, v_{k+1}$ je také ortonormální množina tvořená vlastními vektory operátoru T. Pokud je $k + 1 = n$, našli jsme hledanou ortonormální bázi. Pokud je $k + 1 < n$, opakujeme právě provedený postup do té doby, než bude mít získaná ortonormální množina vlastních vektorů n prvků. □

Důsledek : Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak

$$\|T\| \;=\; r(T).$$

Důkaz: Nerovnost $r(T) \leq \|T\|$ jsme dokázali už dříve pro obecný Hilbertův prostor. Dokážeme teď pro případ $\dim H < \infty$ opačnou nerovnost. Nechť $v_1, \ldots, v_n$ jsou vlastní vektory operátoru T tvořící ortonormální bázi prostoru H, $Tv_i = \lambda_i v_i$. Pro $x \in H$, $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, máme z Pythagorovy věty

$$\|Tx\|^2 \;=\; \|T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n)\|^2 \;=\; \|\alpha_1\lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n v_n\|^2 \;=\; \|\alpha_1\lambda_1 v_1\|^2 + \ldots + \|\alpha_n\lambda_n v_n\|^2$$

$$=\; |\lambda_1|^2\,\|\alpha_1 v_1\|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2\,\|\alpha_n v_n\|^2 \;\leq\; \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|^2 (\|\alpha_1 v_1\|^2 + \ldots + \|\alpha_n v_n\|^2)$$

$$=\; \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|^2 \|\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\|^2 \;=\; \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|^2 \|x\|^2.$$

Tedy

$$\|T\| \;\leq\; \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i| \;=\; r(T).$$

□

Poznámka : Dá se ukázat, že pro obecný operátor $T \in B(H)$ na Hilbertově prostoru konečné dimenze platí

$$\|T\| \;=\; \sqrt{r(T^*T)}.$$

Z tohoto důvodu se také normě operátoru indukované skalárním součinem říká **spektrální norma**. Protože není těžké dokázat, že $\|T^*T\| = \|T\|^2$, vidíme, že uvedená rovnost je zobecněním výsledku, který jsme dostali pro normální operátory.

Věta (Spektrální rozklad) : Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak

$$T \;=\; \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k,$$

kde $\lambda_i \in \sigma(T)$ a $P_1, \ldots, P_k$ jsou ortogonální projekce na navzájem kolmé podprostory.

Důkaz: Pokud je λ vlastní číslo operátoru T, je jádro $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ operátoru $T-\lambda I$ podprostor prostoru H tvořený vlastními vektory odpovídajícími vlastnímu číslu λ a nulovým vektorem. Tedy

$$T|_{\mathrm{Ker}(T-\lambda I)} \;=\; \lambda\, I_{\mathrm{Ker}(T-\lambda I)}.$$

Nechť je nyní $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$. Víme, že v H existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru T. Označme si tyto vlastní vektory $v_1^1, \ldots, v_1^{l_1}, \ldots, v_k^1, \ldots, v_1^{l_k}$ tak, že $Tv_i^j = \lambda_i v_i^j$. Pak $\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I) = \mathrm{lin}(v_i^1, \ldots, v_i^{l_i})$ $(i = 1, \ldots, k)$ jsou navzájem kolmé podprostory, jejichž součtem je celý prostor H, tj.

$$H \;=\; \mathrm{Ker}(T-\lambda_1 I) \oplus \;\ldots\; \oplus \mathrm{Ker}(T-\lambda_k I).$$

Označme P_i ortogonální projekci na podprostor $\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$. Potom

$$\begin{aligned} \lambda_i P_i|_{\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)} \quad &= \;\lambda_i\, I_{\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)} \;=\; T|_{\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)}, \\ \lambda_i P_i|_{(\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I))^\perp} \quad &= \;0. \end{aligned}$$

Je-li $x \in H$, pak z projekční věty máme $x = x_1 + \ldots + x_k$, kde $x_i = P_i x \in \mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$, tedy

$$Tx \;=\; \lambda_1 x_1 + \;\ldots\; + \lambda_k x_k \;=\; \lambda_1 P_1 x + \;\ldots\; + \lambda_k P_k x.$$

To ale znamená, že

$$T \;=\; \lambda_1 P_1 + \;\ldots\; + \lambda_k P_k.$$

Tím jsme větu dokázali. $\square$

Definice : Operátor $T \in B(H)$ nazýváme **jednoduchý**, jestliže je lineární kombinací ortogonálních projekcí s navzájem kolmými obory hodnot.

Poznámka : Na základě spektrální věty je každý normální operátor na prostoru konečné dimenze jednoduchý. Spektrální teorie pro obecný Hilbertův prostor říká, že jednoduché operátory jsou husté v množině normálních operátorů. Tedy každý normální operátor je limitou jednoduchých operátorů.

Poznámka : Uvažujme operátor $T \in B(H)$. Víme už, že pokud je T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, je-li pozitivní, pak $\sigma(T) \subset \langle 0, \infty)$, a konečně v případě unitárního operátoru máme $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$. Pokud je operátor T normální, můžeme uvedené implikace obrátit. Ukážeme to za předpokladu $\dim H < \infty$. Nechť $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, kde $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$. Položme $M_i = \mathrm{Ker}\,(T - \lambda_i\, I)$ a $P_i = P_{M_i}$. Pak podle věty o spektrálním rozkladu máme

$$T \;=\; \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k.$$

Vyjádříme-li $x \in H$ ve tvaru $x = x_1 + \ldots + x_k$, kde $x_i = P_i x \in M_i$, bude

$$Tx = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i.$$

Tedy

$$\langle Tx,\, x\rangle \;=\; \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\,,\, \sum_{j=1}^{n} x_j \Big\rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \langle x_i,\, x_j\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x_i\|^2.$$

Pokud jsou tedy všechna vlastní čísla reálná, je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in H$ a operátor T je samoadjungovaný. V případě nezáporných vlastních čísel je vždy $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ a operátor T je pozitivní. Zbývá ještě případ, kdy $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$. V tomto případě je $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k\}$ a $\mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}_i I) = \mathrm{Ker}(T - \lambda_i I) = M_i$, tedy

$$TT^*x \;=\; T(\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i x_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i T x_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 x_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; x.$$

Analogicky dostaneme také $T^*Tx = x$. Tedy platí $TT^* = T^*T = I$ a T je unitární operátor.

Poznámka: Explicitní tvar konečně dimenzionálního normálního operátoru. Nechť $\dim H < \infty$ a $T \in B(H)$ je normální operátor. Mějme ortonormální bázi $v_1, \ldots, v_n$ složenou z vlastních vektorů, $Tv_i = \lambda_i v_i$. (Vlastní čísla λ_i obecně nemusí být po dvou různá.) Pak pro $x \in H$ platí

$$Tx \;=\; \lambda_1 \langle x, v_1\rangle\, v_1 + \;\ldots\; + \lambda_n \langle x, v_n\rangle\, v_n\,.$$

Vyjádříme-li totiž x ve tvaru $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i$, dostaneme

$$Tx \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle\, Tv_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \lambda_i v_i.$$

Věta (Diagonalizace): Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $(e_i)_{i=1}^n$ jeho ortonormální báze. Nechť $T \in B(H)$ je normální operátor a $\mathbf{T} = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ jeho matice vzhledem k bázi $(e_i)_{i=1}^n$, tj. $t_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$. Pak existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a unitární matice $\mathbf{U}$ takové, že

$$\mathbf{T} \;=\; \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}\,.$$

Důkaz: Nechť $v_1, \ldots, v_n$ je ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru T, $Tv_i = \lambda_i v_i$. Definujme diagonální operátor D předpisem $De_i \;=\; \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Píšeme též $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.) Volme unitární operátor U tak, že $Uv_i = e_i$, tj. $v_i = U^{-1}e_i$. Chceme nyní ukázat, že $T = U^{-1}DU$. Protože je lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami ve vektorech báze, stačí tuto rovnost otestovat na vektorech $v_1, \ldots, v_n$. Pro tyto vektory platí

$$U^{-1}DUv_i \;=\; U^{-1}De_i \;=\; U^{-1}\lambda_i e_i \;=\; \lambda_i U^{-1}e_i \;=\; \lambda_i v_i \;=\; Tv_i.$$

Tedy skutečně $T = U^{-1}DU$. Označíme-li nyní $\mathbf{D}$ a $\mathbf{U}$ matice operátorů D a U vzhledem k bázi $(e_i)_{i=1}^n$, dostaneme $\mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}$. $\square$

Poznámka: Poznamenejme ještě, že se při označení z předchozího důkazu můžeme na matici $\mathbf{D} = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ dívat také jako na matici operátoru T vzhledem k bázi $(v_i)_{i=1}^n$, tj. $d_{ij} = \langle Tv_j, v_i\rangle$, a na matici $\mathbf{U} = (u_{ij})_{i,j=1}^n$ jako na matici identity vzhledem k bazím $(e_i)_{i=1}^n$ a $(v_i)_{i=1}^n$, tj. $u_{ij} = \langle Ie_j, v_i\rangle = \langle e_j, v_i\rangle$. Protože je matice $\mathbf{U}$ unitární, platí pro její inverzi $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H = (\overline{u_{ji}})_{i,j=1}^n$, kde $\overline{u_{ji}} = \overline{\langle e_i, v_j\rangle} = \langle v_j, e_i\rangle = \langle Iv_j, e_i\rangle$. Tedy matice $\mathbf{U^{-1}}$ je maticí identity vzhledem k bazím $(v_i)_{i=1}^n$ a $(e_i)_{i=1}^n$. Můžeme ještě překontrolovat, že mají matice $\mathbf{T}$ a $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}$ opravdu stejné prvky. Máme

$$(\mathbf{T})_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle = \langle T\sum_{k=1}^{n} \langle e_j, v_k\rangle\, v_k, \sum_{l=1}^{n} \langle e_i, v_l\rangle\, v_l\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \overline{\langle e_i, v_l\rangle}\, \langle e_j, v_k\rangle\, \langle Tv_k, v_l\rangle$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \overline{\langle e_i, v_l\rangle}\, \langle e_j, v_k\rangle\, \langle \lambda_k v_k, v_l\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \overline{\langle e_i, v_l\rangle} \lambda_k\, \langle e_j, v_k\rangle\, \langle v_k, v_l\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_i, v_k\rangle}\, \lambda_k\, \langle e_j, v_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{u_{ki}}\, d_{kk}\, u_{kj} = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U})_{ij}\,.$$

Schematicky můžeme součin $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}$ vyjádřit takto:

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \cdots & \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{pmatrix}.$$

Alternativní pohled na kvadratickou formu

Podobně jako výše pro případ $n = m$, můžeme i pro obecná $m, n \in \mathbb{N}$ ukázat, že lze komplexní matice typu $m \times n$ ztotožnit s omezenými operátory z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^m$. Abychom zjednodušili formulace a zápis, nebudeme v této části rozlišovat mezi maticí z $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ a jí odpovídajícím operátorem z $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$. Protože hermitovsky sdružená matice odpovídá adjungovanému operátoru, budeme pro hermitovsky sdruženou matici k matici $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ a adjungovaný oprátor k operátoru $\mathbf{A} \in B(\mathbb{C}^n)$ používat společné označení $\mathbf{A}^*$. Vektory z $\mathbb{C}^n$ si podle situace představíme zapsané buď jako řádky (při aplikaci operátoru) nebo jako sloupce (při násobení maticí). Je-li matice A typu $m \times n$ reálná, můžeme se na ni dívat jako na omezený operátor z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Analogické úvahy a zjednodušení, jaká jsme provedli výše pro komplexní případ, můžeme provést i pro případ reálný.

Uvažujme reálnou symetrickou matici $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^*$ typu $n \times n$. Protože je operátor odpovídající matici $\mathbf{A}$ samoadjungovaný, jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ reálná. Mějme vlastní čísla očíslována tak, že

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$$

Matice $\mathbf{A}$ má ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory $v_1, \ldots, v_n$, $\mathbf{A}v_i = \lambda_i v_i$. Protože je matice $\mathbf{A}$ reálná a její vlastní čísla jsou také reálná, lze zřejmě vektory $v_1, \ldots, v_n$ zvolit tak, že budou reálné. V dalším nás bude zajímat kvadratická forma

$$g(x) \;=\; \langle \mathbf{A}x,\, x\rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\, \overline{x_i}\,, \qquad \text{kde} \quad \mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n\,,$$

speciálně její extrémy na jednotkové sféře. Proveďme diagonalizaci matice $\mathbf{A}$, tj. vyjádřeme matici $\mathbf{A}$ ve tvaru

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{D}\,\mathbf{U}, \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{D} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} \;\; \text{je unitární matice.}$$

Matice $\mathbf{D}$ je reálná, a protože řádky matice $\mathbf{U}$ jsou vektory $v_1, \ldots, v_n$, je reálná i matice $\mathbf{U}$. Pro matici $\mathbf{U}$ platí $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^T$, tedy

$$g(x) \;=\; \langle \mathbf{A}x,\, x\rangle \;=\; \langle \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}\,x,\, x\rangle \;=\; \langle \mathbf{D}\mathbf{U}x,\, \mathbf{U}x\rangle.$$

Unitární matice $\mathbf{U}$ přitom zobrazuje jednotkovou sféru v $\mathbb{C}^n$ na sebe, a protože je navíc reálná, zobrazuje i jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^n$ na sebe. Takže forma g zobrazí jednotkovou sféru v $\mathbb{C}^n$ resp. v $\mathbb{R}^n$ na stejnou množinu jako forma

$$x \;\mapsto\; \langle \mathbf{D}x,\, x\rangle \;=\; \lambda_1|x_1|^2 + \;\ldots\; + \;\lambda_n|x_n|^2.$$

Odtud dostáváme:

Platí: Je-li $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice typu $n \times n$, $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ jsou její vlastní čísla a $g(x) = \langle \mathbf{A}x,\, x\rangle$, pak

$$\max\{g(x) \,\big|\, \|x\| = 1\} \;=\; \lambda_1$$

a kvadratická forma g této hodnoty nabývá pro všechny jednotkové vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_1. Podobně

$$\min\{g(x) \,\big|\, \|x\| = 1\} \;=\; \lambda_n$$

a této hodnoty se nabývá ve všech jednotkových vlastních vektorech příslušných k vlastnímu číslu λ_n.

V dalším se pro jednoduchost omezíme na reálný případ.

Otázka: Co je spektrum pro obdélníkovou matici? – „Jak moc se smršťují vektory $\mathbf{A}x$?“

Pro matici $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ je $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ čtvercová matice typu $n \times n$, tj. $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$. Tato matice je přitom pozitivně semidefinitní (jí odpovídající operátor je pozitivní), neboť pro $x \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\langle \mathbf{A}^*\mathbf{A}x,\, x\rangle \;=\; \langle \mathbf{A}x,\, \mathbf{A}x\rangle \;=\; \|\mathbf{A}x\|^2 \geq 0.$$

To znamená, že matice $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ má nezáporná vlastní čísla. Označíme je $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$. Pro nás budou důležité jejich odmocniny.

Definice : **Singulární hodnoty** matice $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ jsou čísla $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$, kde $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Všimněmě si, že pro $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{A}x\|^2 = \langle \mathbf{A}x,\, \mathbf{A}x\rangle = \langle \mathbf{A}^*\mathbf{A}\, x,\, x\rangle.$$

Aplikujeme-li tedy předcházející úvahy o reálné symetrické matici na matici $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, dostaneme následující:

Platí : Největší hodnota funkce $h(x) = \|\mathbf{A}x\|$ na jednotkové sféře $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je σ_1 a nabývá se jí právě ve všech vlastních vektorech příslušných k vlastnímu číslu λ_1 operátoru $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Jinými slovy $\|\mathbf{A}\| = \sigma_1$.

Nechť je nyní $v_1, \ldots, v_n$ ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ příslušných k vlastním číslům $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ a $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ jsou singulární hodnoty matice $\mathbf{A}$. Potom pro $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\|\mathbf{A}v_i\|^2 = \langle \mathbf{A}v_i,\, \mathbf{A}v_i\rangle \;=\; \langle \mathbf{A}^*\mathbf{A}v_i,\, v_i\rangle \;=\; \langle \lambda_i v_i,\, v_i\rangle \;=\; \lambda_i\|v_i\|^2 \;=\; \sigma_i^2,$$

tedy

$$\|\mathbf{A}v_i\| = \sigma_i.$$

Dále pro $i \neq j$ máme

$$\langle \mathbf{A}v_i,\, \mathbf{A}v_j\rangle = \langle \mathbf{A}^*\mathbf{A}v_i,\, v_j\rangle = \lambda_i\langle v_i,\, v_j\rangle = 0,$$

takže $\{\mathbf{A}v_1, \ldots, \mathbf{A}v_n\}$ je ortogonální množina. Nechť má matice $\mathbf{A}$ právě r nenulových singulárních hodnot, tj. $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Pak

$$R(\mathbf{A}) \;=\; \mathrm{lin}\{\mathbf{A}v_1, \ldots, \mathbf{A}v_n\} \;=\; \mathrm{lin}\{\mathbf{A}v_1, \ldots, \mathbf{A}v_r\} \quad \text{a} \quad \mathrm{hodnost}(\mathbf{A}) \;=\; \dim R(\mathbf{A}) \;=\; r.$$

Položme pro $i = 1, \ldots, r$

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i}\,\mathbf{A}v_i.$$

Pak $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je ortonormální báze $R(\mathbf{A})$. Rozšiřme ji na ortonormální bázi $\{u_1, \ldots, u_m\}$ prostoru $\mathbb{R}^m$.

Tvrzení (SVD rozklad) : Nechť $\mathbf{A}$ je reálná matice typu $m \times n$ a $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$ jsou její singulární hodnoty. Nechť je dále $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^n$ tvořená vlastními vektory operátoru $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}v_i = \sigma_i^2 v_i$, a $\{u_1, \ldots, u_n\}$ je taková ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^m$, že $u_i = \frac{1}{\sigma_i}\,\mathbf{A}v_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Potom

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^*,$$

kde $\mathbf{U} \in M_m(\mathbb{R})$, $\mathbf{V} \in M_n(\mathbb{R})$ jsou unitární matice

$$\mathbf{U} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \ldots & u_m \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

a $\boldsymbol{\Sigma} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ je matice

$$\boldsymbol{\Sigma} \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{O}_{r\times(n-r)} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{O}_{(m-r)\times r} & & \mathbf{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

($\mathbf{O}_{k\times l}$ je tu nulová matice typu $k \times l$). Tedy

$$\mathbf{A} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_m \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{O}_{r\times(n-r)} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{O}_{(m-r)\times r} & & \mathbf{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{pmatrix}.$$

Poznámka : Tvrzení říká, že pro danou matici $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{R}^m \\ \mathbf{V}^* \Big\downarrow & & \Big\uparrow \mathbf{U} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{\Sigma}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

kde $\mathbf{\Sigma} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{U} \in M_m(\mathbb{R})$ a $\mathbf{V} \in M_n(\mathbb{R})$ jsou matice specifikovaných vlastností.

Důkaz tvrzení : Budeme-li aplikovat lineární operátor odpovídající matici $\mathbf{A}$ postupně na bázové vektory $v_1, \dots, v_n$, dostaneme

$$\mathbf{A}\,\mathbf{V} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A}v_1 & \dots & \mathbf{A}v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A}v_1 & \dots & \mathbf{A}v_r & 0 & \dots & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix},$$

protože $\|\mathbf{A}v_i\| = \sigma_i$ a pro $i > r$ je $\sigma_i = 0$. Dále z definice vektorů $u_1, \dots, u_r$ pro součin matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{\Sigma}$ platí

$$\mathbf{U}\,\mathbf{\Sigma} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_m \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{O}_{r\times(n-r)} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{O}_{(m-r)\times r} & & \mathbf{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \sigma_1 u_1 & \dots & \sigma_r u_r & 0 & \dots & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A}v_1 & \dots & \mathbf{A}v_r & 0 & \dots & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{AV} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Sigma}$. Vynásobíme-li nyní zprava tuto rovnost maticí $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$, dostaneme požadovanou rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{V}^*$. $\square$

Poznámky : (1) Pokud je matice $\mathbf{A}$ čtvercová, je $\mathbf{\Sigma}$ čtvercová diagonální matice. Každou čtvercovou matici $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R}^n)$ tedy lze diagonalizovat v tom smyslu, že ji lze zapsat ve tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^*$, kde $\mathbf{D} \in M_n(\mathbb{R})$ je diagonální matice mající na diagonále singulární hodnoty matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{U}$, $\mathbf{V} \in M_n(\mathbb{R})$ jsou unitární. Pokud je matice $\mathbf{A}$ pozitivně semidefinitní, má matice $\mathbf{D}$ na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a matici $\mathbf{U}$ můžeme volit tak, že $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ (matice $\mathbf{U}$ je určena vektory $v_1, \dots, v_n$ jednoznačně, jen když jsou všechna vlastní čísla kladná). Pokud je matice $\mathbf{A}$ samoadjungovaná, má matice $\mathbf{D}$ na diagonále absolutní hodnoty vlastních čísel. Podle diagonalizační věty lze ale i ji zapsat ve tvaru $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{U}}^*$, kde $\tilde{\mathbf{D}} \in M_n(\mathbb{R})$ je diagonální matice mající na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{U} \in M_n(\mathbb{R})$ je unitární.

(2) SVD rozklad se používá k odhadu hodnosti matice. Ta je podle předešlého rovna počtu nenulových singulárních hodnot matice.