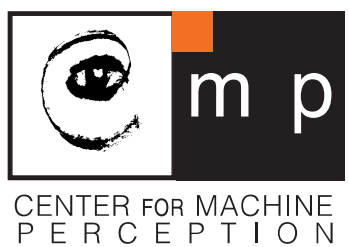
Prioritní fronta, halda

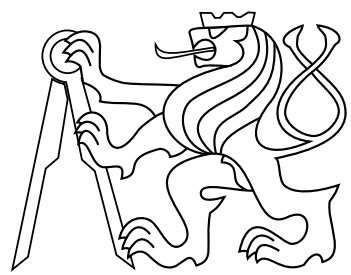
Priority queue, heap

Jan Kybic

http://cmp.felk.cvut.cz/~kybic
kybic@fel.cvut.cz

2016





Prioritní fronta
(priority queue)

Podporuje následující operace pro porovnatelné položky

- přidání položky *(insert)*
- odebrání **nejmenší** položky *(pop)*

Může podporovat i další operace

- nedestruktivní čtení ze začátku *(peek)*
- zjištění počtu položek ve frontě *(size)*
- změna položky

Prioritní fronta
(priority queue)

Podporuje následující operace pro porovnatelné položky

- přidání položky *(insert)*
- odebrání **nejmenší** položky *(pop)*

Může podporovat i další operace

- nedestruktivní čtení ze začátku *(peek)*
- zjištění počtu položek ve frontě *(size)*
- změna položky

Varianty (ekvivalentní)

- odebíráme největší místo nejmenší
- ukládáme *klíč* (prioritu) a *hodnotu*, třídíme podle klíče, vracíme hodnotu

Prioritní fronta
(priority queue)

Podporuje následující operace pro porovnatelné položky

- přidání položky *(insert)*
- odebrání **nejmenší** položky *(pop)*

Může podporovat i další operace

- nedestruktivní čtení ze začátku *(peek)*
- zjištění počtu položek ve frontě *(size)*
- změna položky

Varianty (ekvivalentní)

- odebíráme největší místo nejmenší
- ukládáme *klíč* (prioritu) a *hodnotu*, třídíme podle klíče, vracíme hodnotu

- Zásobník i fronta jsou speciálním případem prioritní fronty.

Aplikace prioritní fronty

- Hledání k nejmenších prvků
- Prioritní rozvrhování a plánování (fronta s předbíháním)
- Simulace diskrétních událostí (priorita=čas)
- Základní prvek mnoha algoritmů
  - Heapsort (třídící algoritmus)
  - Huffmanovo kódování
  - Informované prohledávání grafu
  - Dijkstrův algoritmus pro hledání nejkratší cesty v grafu
  - Primův algoritmus pro hledání minimální kostry v grafu.

Implementace prioritní fronty

implementace	vkládání	nalezení minima	odebrání
pole	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
binární strom	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
binární halda	$O(1)$ / $O(\log n)^*$	$O(1)$	$O(\log n)$

* $O(1)$ v průměru pro n prvků, nejhorší případ je $O(\log n)$

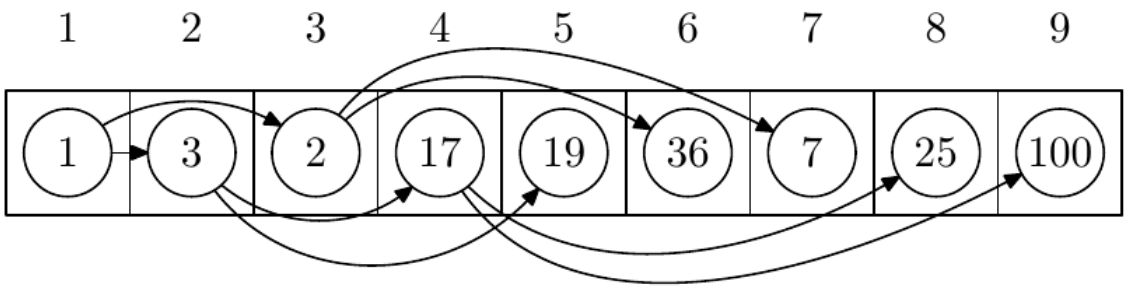
Prioritní fronta

Halda

Heap sort

Binární halda / hromada
(binary heap)

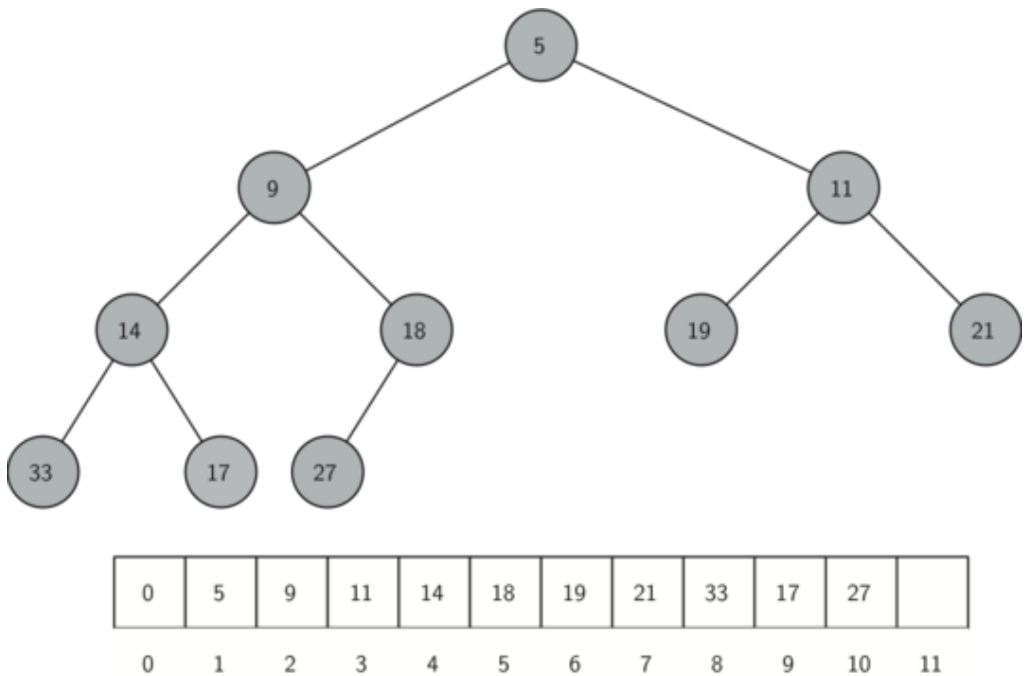
- Prvky jsou uložené **v poli** $a_1, a_2, \ldots, a_n$
- Potomky a_i jsou a_{2i}, a_{2i+1} (pokud $< n$)
- **Vlastnost haldy *(heap property)***: uzel není větší, než jeho potomci, $a_i \leq a_{2i}$, $a_i \leq a_{2i+1}$
- Halda je binární strom, vrstvy až na poslední jsou plně obsazené



Images courtesy of Jakub Černý, Brad Miller and David Ranum.

Binární halda / hromada
(binary heap)

- Prvky jsou uložené **v poli** $a_1, a_2, \ldots, a_n$
- Potomky a_i jsou a_{2i}, a_{2i+1} (pokud $< n$)
- **Vlastnost haldy *(heap property)***: uzel není větší, než jeho potomci, $a_i \leq a_{2i}$, $a_i \leq a_{2i+1}$
- Halda je binární strom, vrstvy až na poslední jsou plně obsazené



Images courtesy of Jakub Černý, Brad Miller and David Ranum.

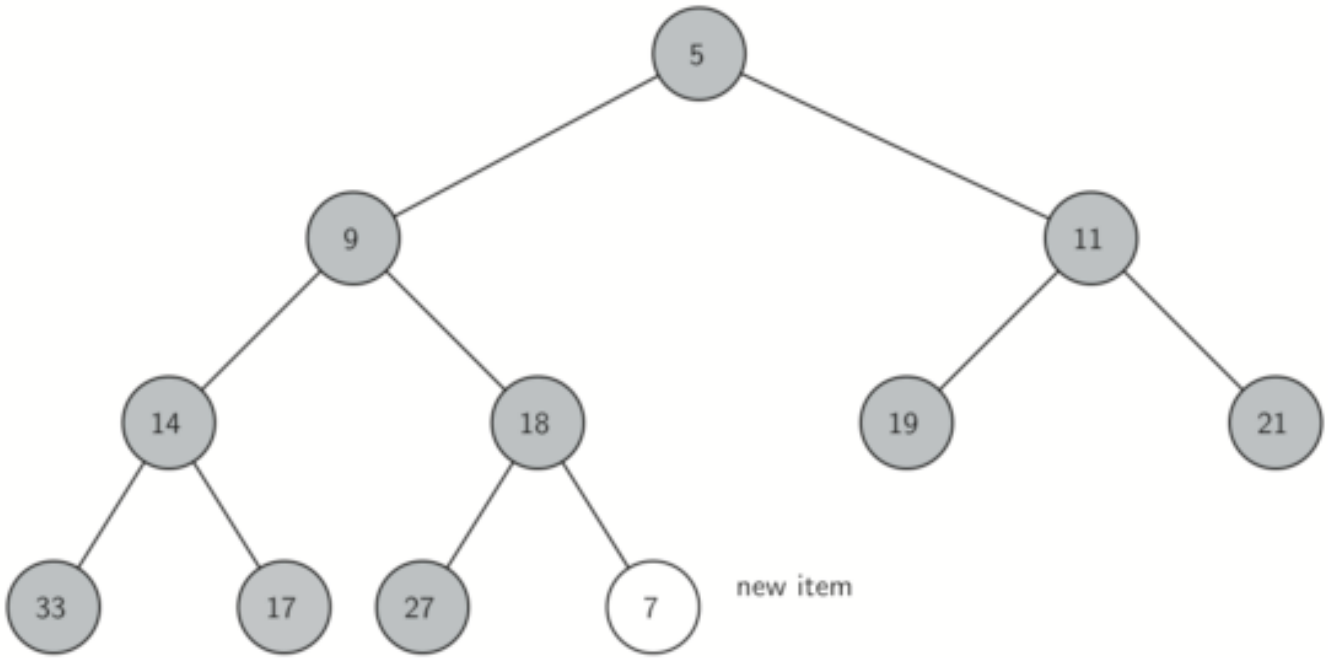
Srovnání haldy a stromu

binární vyhledávací strom (BST)

	BST	halda
uspořádání	úplné	jen minimum
režie	významná	minimální
vyvažování	nutné	automatické

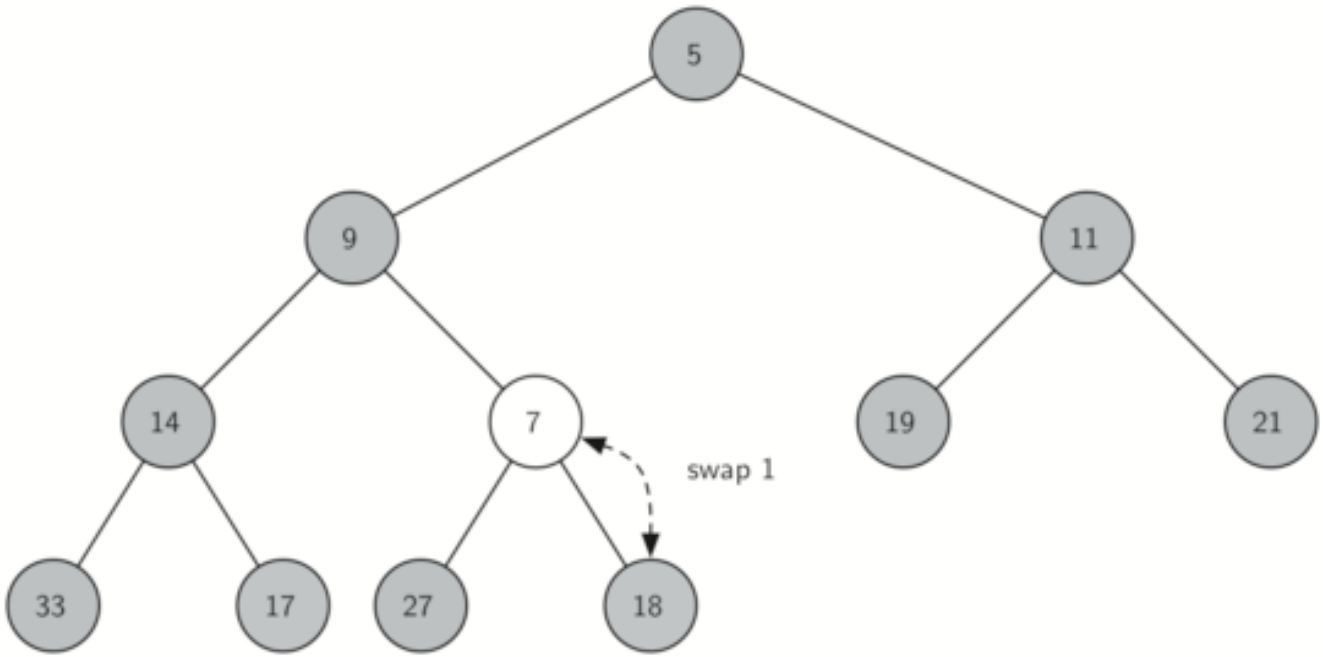
- halda je významně rychlejší, potřebuje méně paměti
- strom je univerzálnější, podporuje více operací

Vkládání do haldy



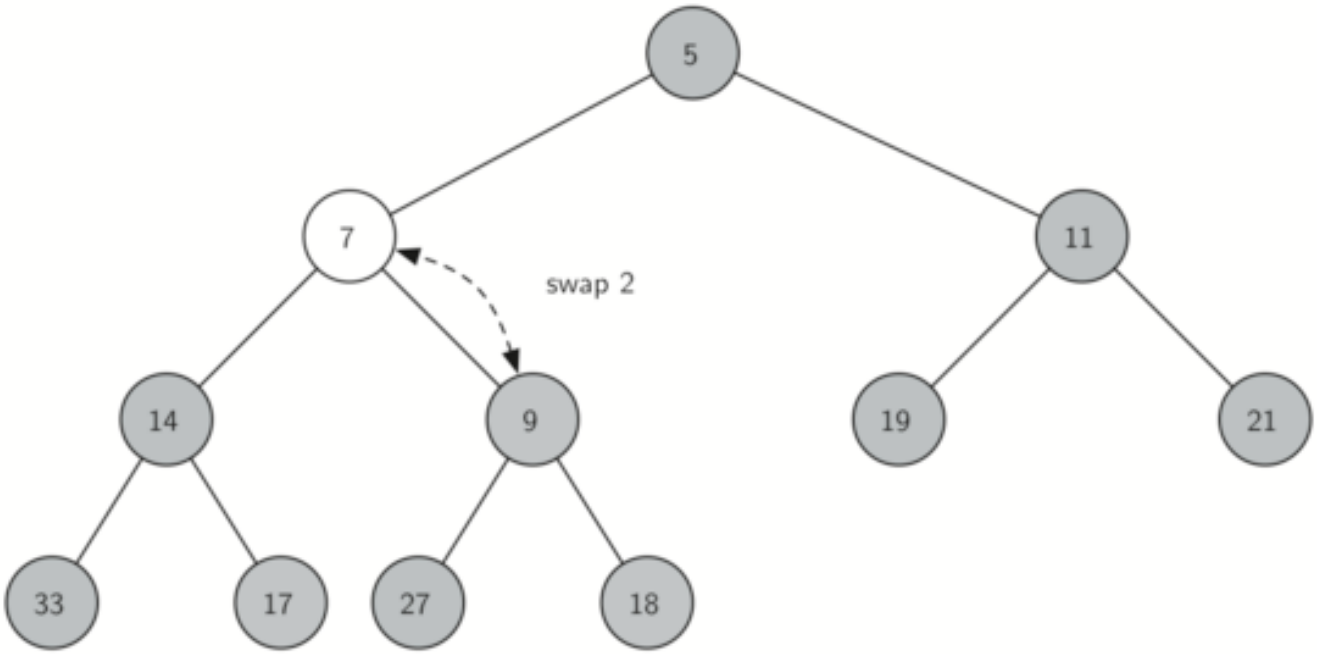
Nový prvek přidáme na konec a probubláme kam patří.

Vkládání do haldy



Nový prvek přidáme na konec a probubláme kam patří.

Vkládání do haldy



Nový prvek přidáme na konec a probubláme kam patří.

Vkládání — implementace

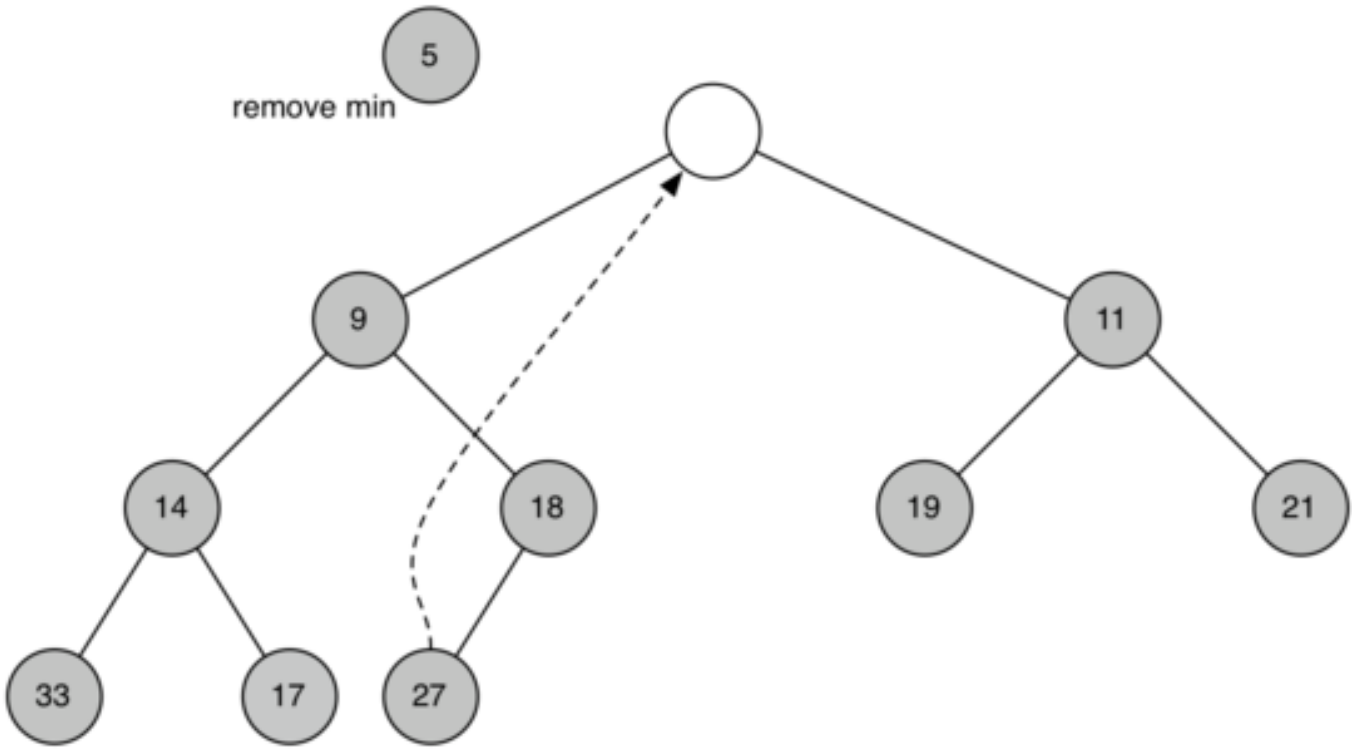
```
class MinHeap:
  def __init__(self):
     self.heap = [] # indexujeme od nuly

  def bubble_up(self,i): # probublá 'i' ke kořenu
    while i>0:
      j=(i-1)//2 # index rodiče
      if self.heap[i] >= self.heap[j]:
        break
      self.heap[j],self.heap[i]=self.heap[i],self.heap[j]
      i = j

  def insert(self,k):
    self.heap+=[k]
    self.bubble_up(len(self.heap)-1)
```

Indexování od nuly — rodič a_i je $\lfloor (i-1)/2 \rfloor$, potomci jsou a_{2i+1}, a_{2i+2}.

Soubor `heap.py`

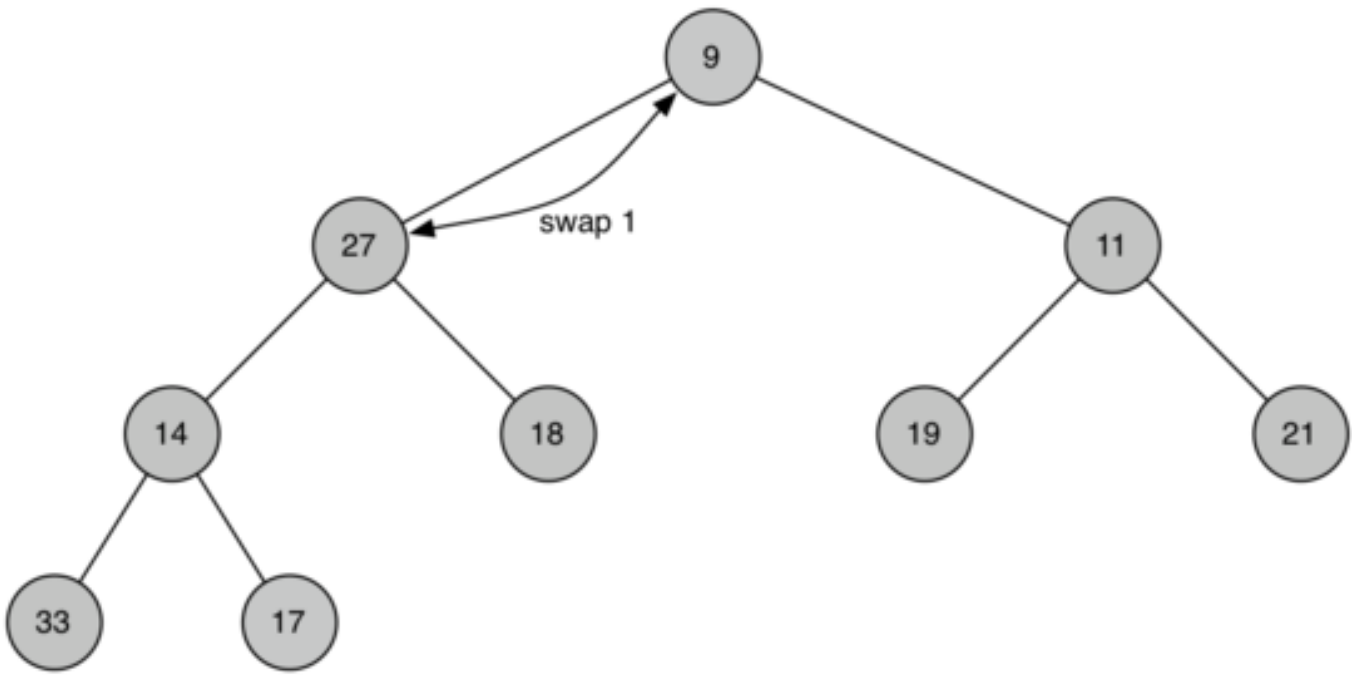
Odebrání nejmenšího prvku

- Minimum je v kořeni stromu.
- Halda (pole) se zkrátí o jeden prvek.
- Tento prvek přesuneme do kořene a ‘probubláme’ dolů:
  - Rekurzivně měníme uzel s menším synem, dokud je porušená vlastnost haldy.



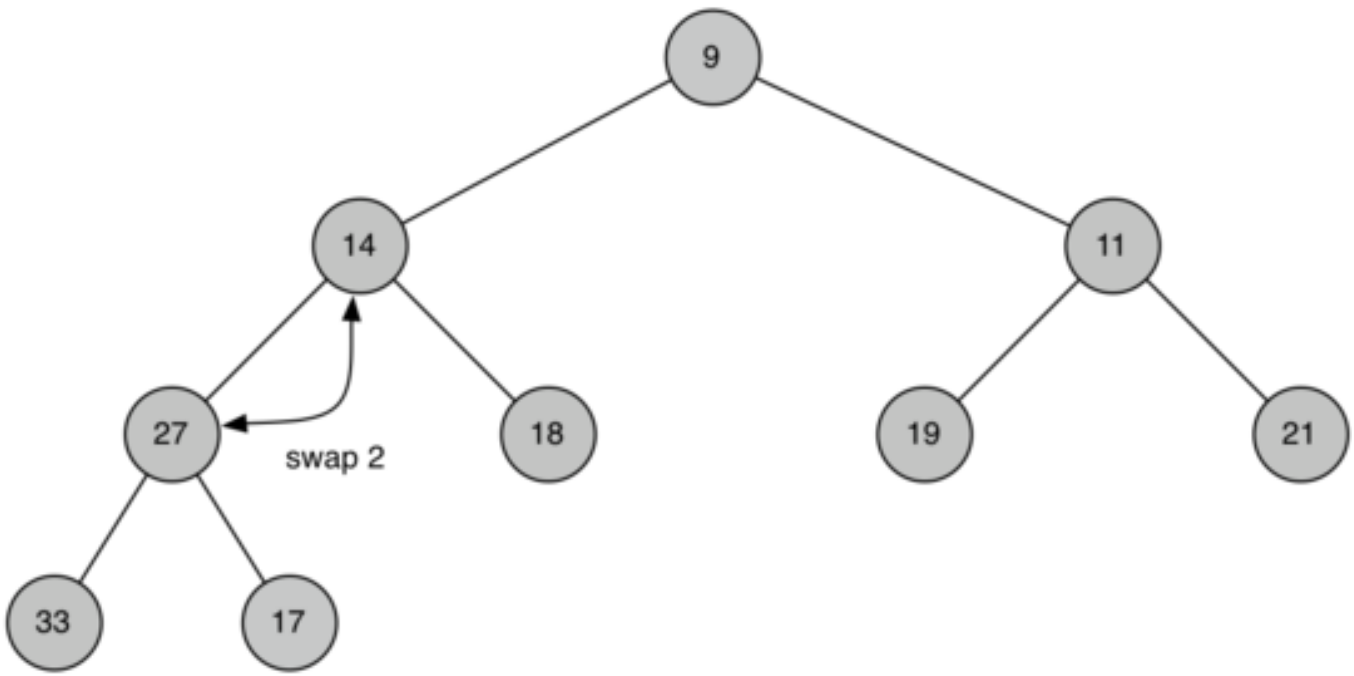
Odebrání nejmenšího prvku

- Minimum je v kořeni stromu.
- Halda (pole) se zkrátí o jeden prvek.
- Tento prvek přesuneme do kořene a ‘probubláme’ dolů:
  - Rekurzivně měníme uzel s menším synem, dokud je porušená vlastnost haldy.



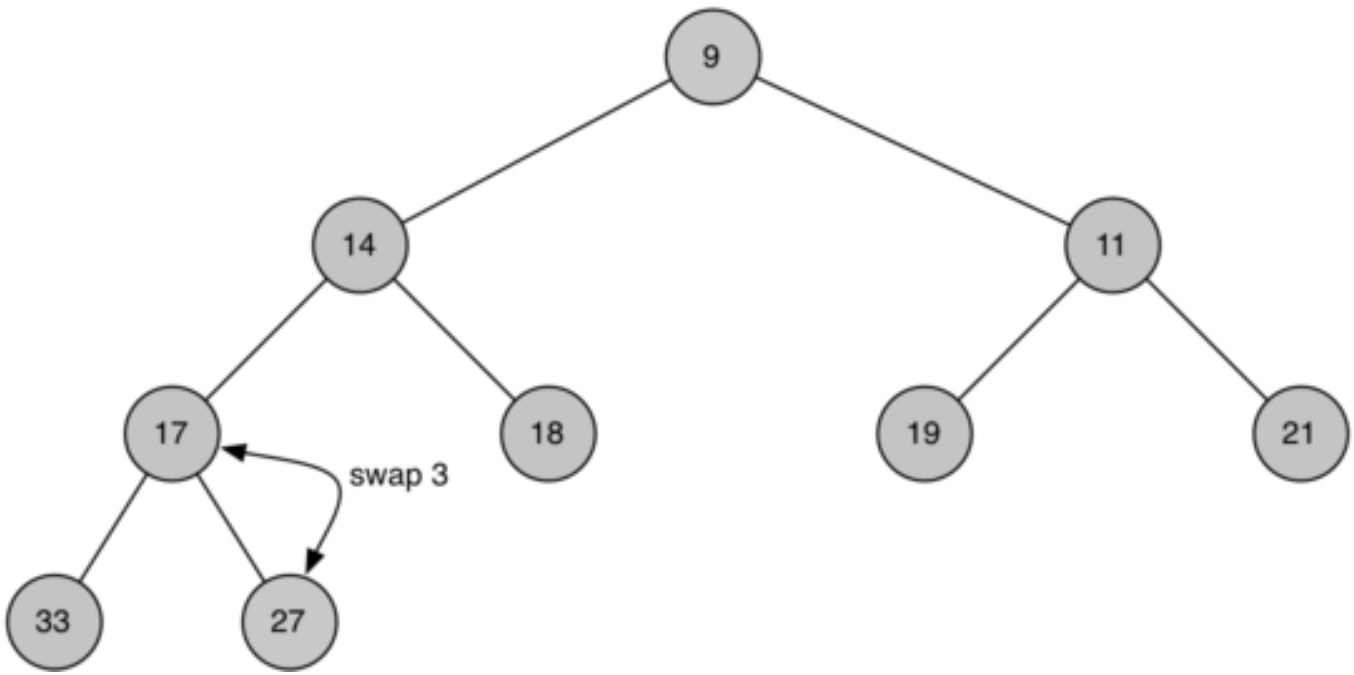
Odebrání nejmenšího prvku

- Minimum je v kořeni stromu.
- Halda (pole) se zkrátí o jeden prvek.
- Tento prvek přesuneme do kořene a ‘probubláme’ dolů:
  - Rekurzivně měníme uzel s menším synem, dokud je porušená vlastnost haldy.



Odebrání nejmenšího prvku

- Minimum je v kořeni stromu.
- Halda (pole) se zkrátí o jeden prvek.
- Tento prvek přesuneme do kořene a ‘probubláme’ dolů:
  - Rekurzivně měníme uzel s menším synem, dokud je porušená vlastnost haldy.



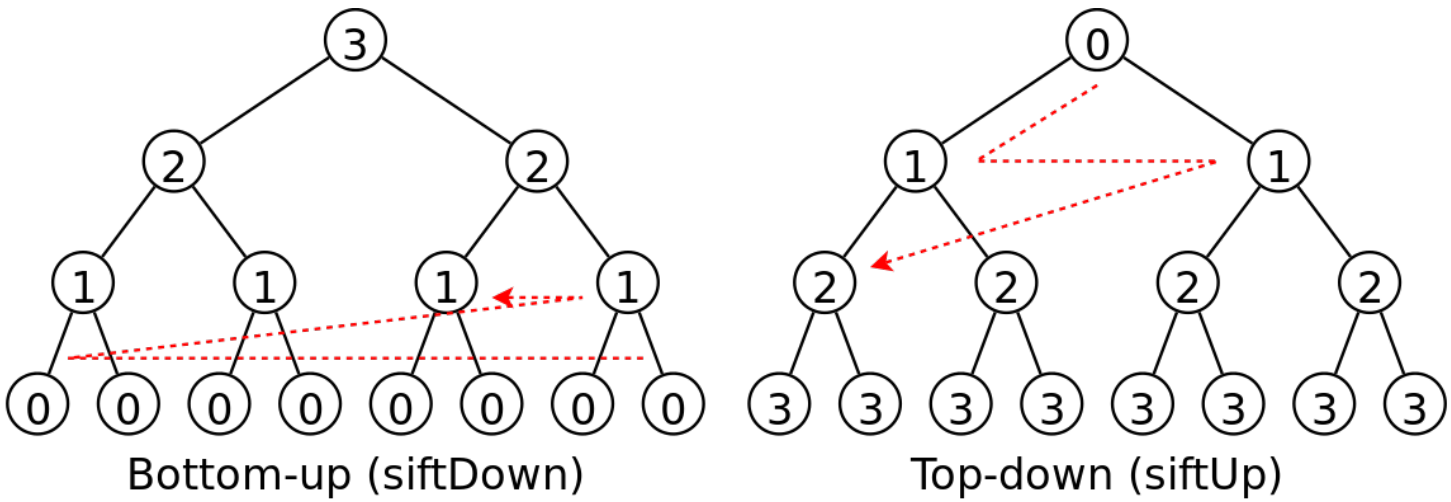
Odebírání nejmenšího prvku — implementace

```
def bubble_down(self,i):
    n=self.size()
    while 2*i+1 < n:
        j=2*i+1 # zjisti index menšího syna
        if j+1 < n and self.heap[j] > self.heap[j+1]:
          j+=1
        if self.heap[i]>self.heap[j]:
          self.heap[i],self.heap[j]=self.heap[j],self.heap[i]
        i=j

def pop(self):
  """ odeber a vrať nejmenší prvek """
  element=self.heap[0]
  self.heap[0]=self.heap[-1]
  self.heap.pop() # smaž poslední prvek
  self.bubble_down(0)
  return element
```

Vytvoření haldy

Jak vytvořit haldu z pole

- Opakované volání `insert` — složitost $O(n \log n)$
- Pole prohlásíme za haldu a opakovaně voláme `bubble_down` — **složitost** $O(n)$



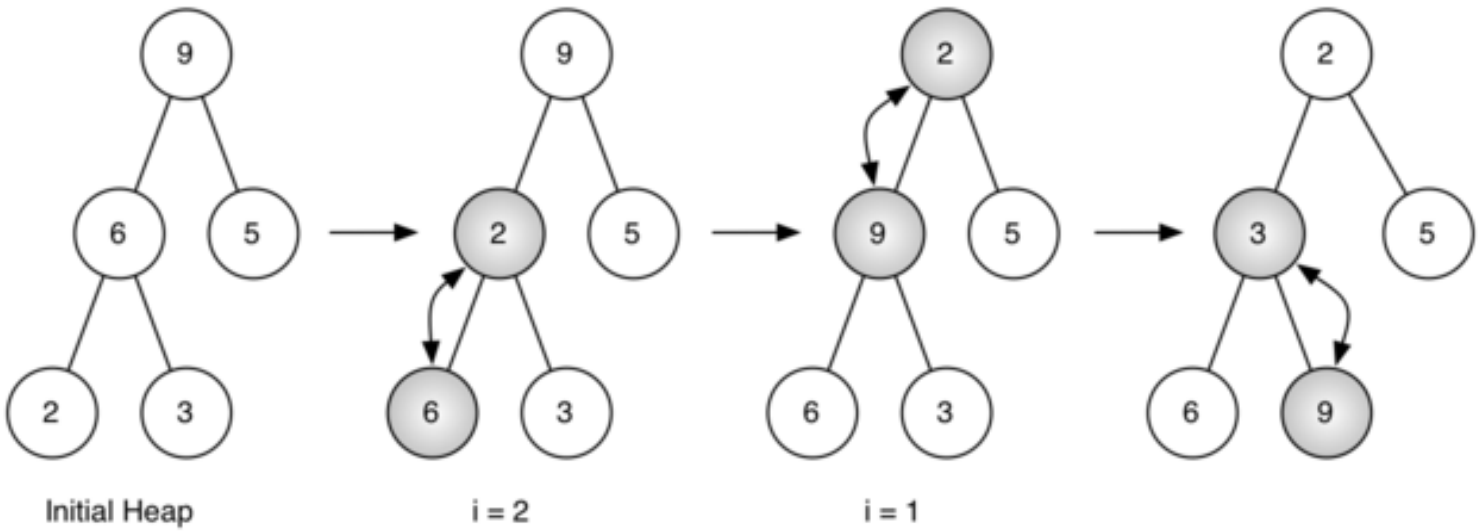
The number in the circle indicates the maximum times of swapping required when adding the node to the heap.

Image courtesy of `Swfung8` (Wikipedia).

Vytvoření haldy

Jak vytvořit haldu z pole

- Opakované volání `insert` — složitost $O(n \log n)$
- Pole prohlásíme za haldu a opakovaně voláme `bubble_down` — **složitost** $O(n)$



Vytvoření haldy — implementace

Cyklus přes prvky, které mají potomky, od posledního k prvnímu:

```
def buildHeap(a,type=MinHeap):
  """ vytvoří haldu z obsahu pole, pole je přepsáno """
  h=type() # vytvoření MinHeap nebo MaxHeap
  h.heap=a # kopie
  for i in range((len(a)-1)//2,-1,-1):
      h.bubble_down(i)
  return h
```

`heap.py` obsahuje `MinHeap` a `MaxHeap`

Halda — příklad

```
import heap

h=heap.MinHeap()
for x in [9, 5, 0, 6, 2, 3]:
  h.insert(x)  # vkládáme po jednom
print(h.pop()) # nejmenší prvek
```

```
0
```

```
h.insert(4)
while not h.is_empty():
  print(h.pop(),end=", ")
```

```
2, 3, 4, 5, 6, 9,
```

Halda — příklad (2)

```
h=heap.buildHeap([9, 5, 0, 6, 2, 3])
while not h.is_empty():
  print(h.pop(),end=", ")
```

```
0, 2, 3, 5, 6, 9,
```

```
h=heap.buildHeap([9, 5, 0, 6, 2, 3],type=heap.MaxHeap)
while not h.is_empty():
   print(h.pop(),end=", ")
```

```
9, 6, 5, 3, 2, 0,
```

Prioritní fronta

Halda

Heap sort

Postup

- Vytvoříme z pole haldu
- Opakovaně odebíráme nejmenší prvek $\rightarrow$ setříděná posloupnost.

Postup

- Vytvoříme z pole haldu
- Opakovaně odebíráme nejmenší prvek $\rightarrow$ setříděná posloupnost.
- Halda i setříděná posloupnost budou sdílet stejné pole.
- Použijeme sestupně setříděnou haldu (`MaxHeap`).

Heap sort
třídění haldou

Postup

- Vytvoříme z pole haldu
- Opakovaně odebíráme nejmenší prvek $\rightarrow$ setříděná posloupnost.
- Halda i setříděná posloupnost budou sdílet stejné pole.
- Použijeme sestupně setříděnou haldu (`MaxHeap`).

Vlastnosti

- Složitost v nejhorším i průměrném případě $O(n \log n)$.
- Nepotřebuje pomocnou paměť.

Heap sort — implementace

```
def bubble_down(a,i,n):
    while 2*i+1 < n:
        j=2*i+1 # zjisti index menšího syna
        if j+1 < n and a[j] < a[j+1]:
          j+=1
        if a[i]<a[j]:
          a[i],a[j]=a[j],a[i]
        i=j


def heap_sort(a):
  n=len(a)
  for i in range((n-1)//2,-1,-1):
      bubble_down(a,i,n)
  for i in range(n-1,0,-1): # od n-1 do 1
    a[0],a[i]=a[i],a[0]
    bubble_down(a,0,i)
  return a
```

Soubor `heapsort.py`.

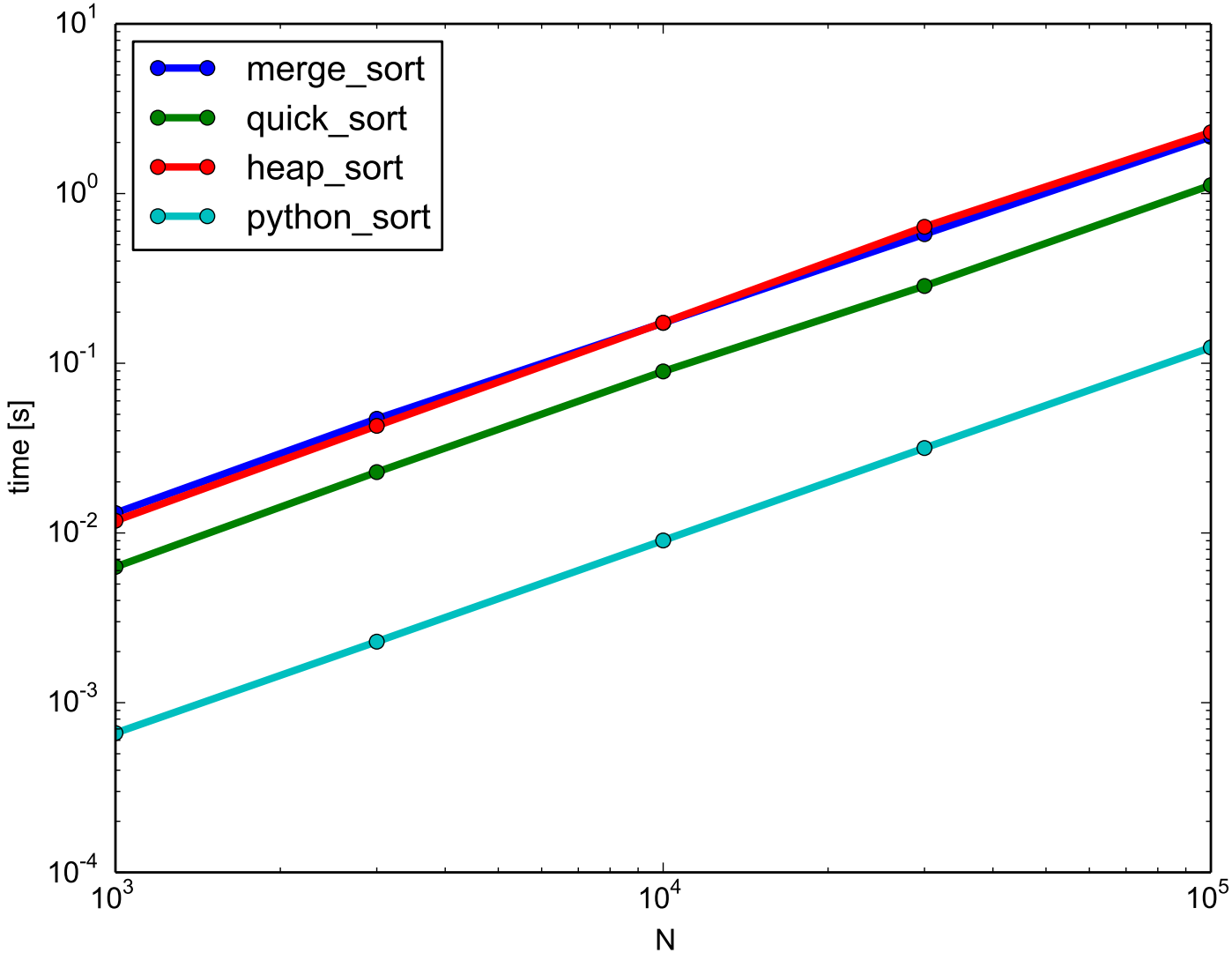
Heap sort — příklad

```
from heapsort import heap_sort

a=[70, 93, 18, 37, 64, 79, 4, 28, 48, 65]
heap_sort(a)
print(a)
```

```
[4, 18, 28, 37, 48, 64, 65, 70, 79, 93]
```

Heap sort — porovnání rychlosti

Empirická složitost



Další haldy

- *k-regulární halda* — každý uzel k potomků.
- *Fibonacciho halda* (Fredman, Tarjan 1984) — s rostoucí hloubkou klesá maximální počet potomků. Umí vkládat a aktualizovat v čase $O(1)$.
- *přihrádková halda (bucket/radix heap)* — pro malou abecedu o velikosti k. Složitost nalezení minima $O(k)$.

Halda v Pythonu

Modul `heapq`. Operace `heapify` (vytvoření), `heappush` (přidání) a `heappop` (odebrání).

```
import heapq

h=[]
for x in [9, 5, 0, 6, 2, 3]:
  heapq.heappush(h,x)   # vkládáme po jednom
print([ heapq.heappop(h) for i in range(len(h))])
```

```
[0, 2, 3, 5, 6, 9]
```

Heapsort a heapq

```
def heap_sort(a):
  h=a.copy()
  heapq.heapify(h)
  for i in range(len(a)):
    a[i]=heapq.heappop(h)
```

Heapsort a heapq

```
def heap_sort(a):
  h=a.copy()
  heapq.heapify(h)
  for i in range(len(a)):
    a[i]=heapq.heappop(h)


x=[75, 61, 5, 66, 35, 55, 20, 48, 41, 85]
heap_sort(x)
print(x)
```

```
[5, 20, 35, 41, 48, 55, 61, 66, 75, 85]
```

Heapsort a heapq

```
def heap_sort(a):
  h=a.copy()
  heapq.heapify(h)
  for i in range(len(a)):
    a[i]=heapq.heappop(h)


x=[75, 61, 5, 66, 35, 55, 20, 48, 41, 85]
heap_sort(x)
print(x)
```

```
[5, 20, 35, 41, 48, 55, 61, 66, 75, 85]
```

- Potřebuje pomocné pole

Soubor `heapsort2.py`

Halda — shrnutí

- Datová struktura pro rychlé hledání minimálního prvku umožňující přidávání.
- Používáme pro implementace prioritní fronty.
- Vlastnost haldy — prvky od kořene k listu neklesají / nerostou.
- Velmi efektivní implementace pomocí pole. Nepotřebuje odkazy.
- Haldu lze sestrojit v čase $O(n)$, odebrání nejmenšího prvku trvá $O(\log n)$.
- *Heapsort* — zaručená složitost $O(n \log n)$, nepotřebuje pomocnou paměť. Stejně rychlý jako mergesort.

Náměty na domácí práci

- Implementujte simulátor tiskové fronty pomocí prioritní fronty.
- Experimentálně vyhodnoťte rychlost haldy oproti vyhledávacímu stromu (pro hledání minima).
- Zefektivněte ‘probublávání’, místo výměn použijte přesuny.
- Napište ‘probublávání’ rekurzivně.
- Naprogramujte smazání libovolného prvku z haldy.
- Implementujte k regulární haldu. Jaká je časová složitost jednotlivých operací?