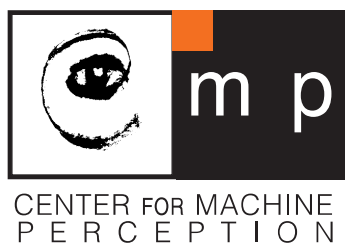
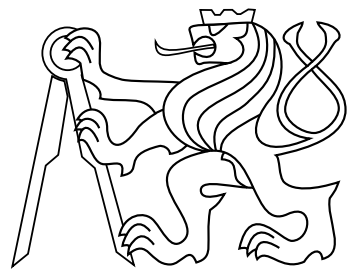
Třídění a vyhledávání
Searching and sorting

Jan Kybic

http://cmp.felk.cvut.cz/~kybic
kybic@fel.cvut.cz

2016





Vyhledávání
Searching

- Mějme posloupnost (pole) $a_0, \ldots, a_{N-1}$
- Mějme hodnotu q
- Úkol: zjistit, zda existuje $a_i = q$

Vyhledávání
Searching

- Mějme posloupnost (pole) $a_0, \ldots, a_{N-1}$
- Mějme hodnotu q
- Úkol: zjistit, zda existuje $a_i = q$

Varianty

- Výstup: ano/ne nebo pozice
- Hledání opakujeme mnohokrát pro stejné a
  - předzpracování
- Posloupnost a je setříděná.
- Stochastické hledání

Vyhledávání v Pythonu

operátor `in`

Obsahuje pole daný prvek?

```
>>> a=[17,20,26,31,44,77,65,55,93]
>>> 20 in a
True
>>> 30 in a
False
>>> 30 not in a
True
>>> 20 not in a
False
```

Vyhledávání v Pythonu (2)

`in` / `not in` funguje i pro řetězce, *n*-tice a podobné typy *(containers)*

```
>>> "omo" in "Olomouc"    # podřetězec
True
>>> "" in "Olomouc"       # prázdný řetězec
True
>>> "olo" in "Olomouc"    # rozlišuje velká/malá písmena
False
>>> 4 in (3,4)
True
>>> 3. in (3,4)           # na typu nezáleží
True
```

Lineární vyhledávání
linear/sequential search

Procházíme postupně a než narazíme na q

```
def sequential_search(a,q):
  """ Returns 'True' if 'a' contains 'q' """
  for x in a:
    if x==q:
      return True
  return False
```

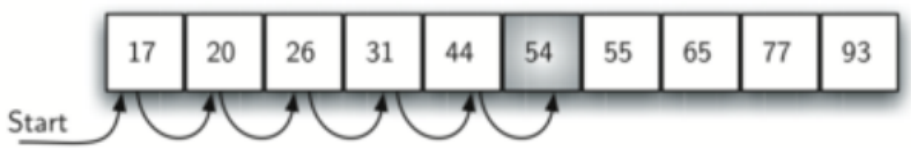


Image from Miller & Ranum: Problem solving with algothms and data structures

Lineární vyhledávání
linear/sequential search

Procházíme postupně a než narazíme na q

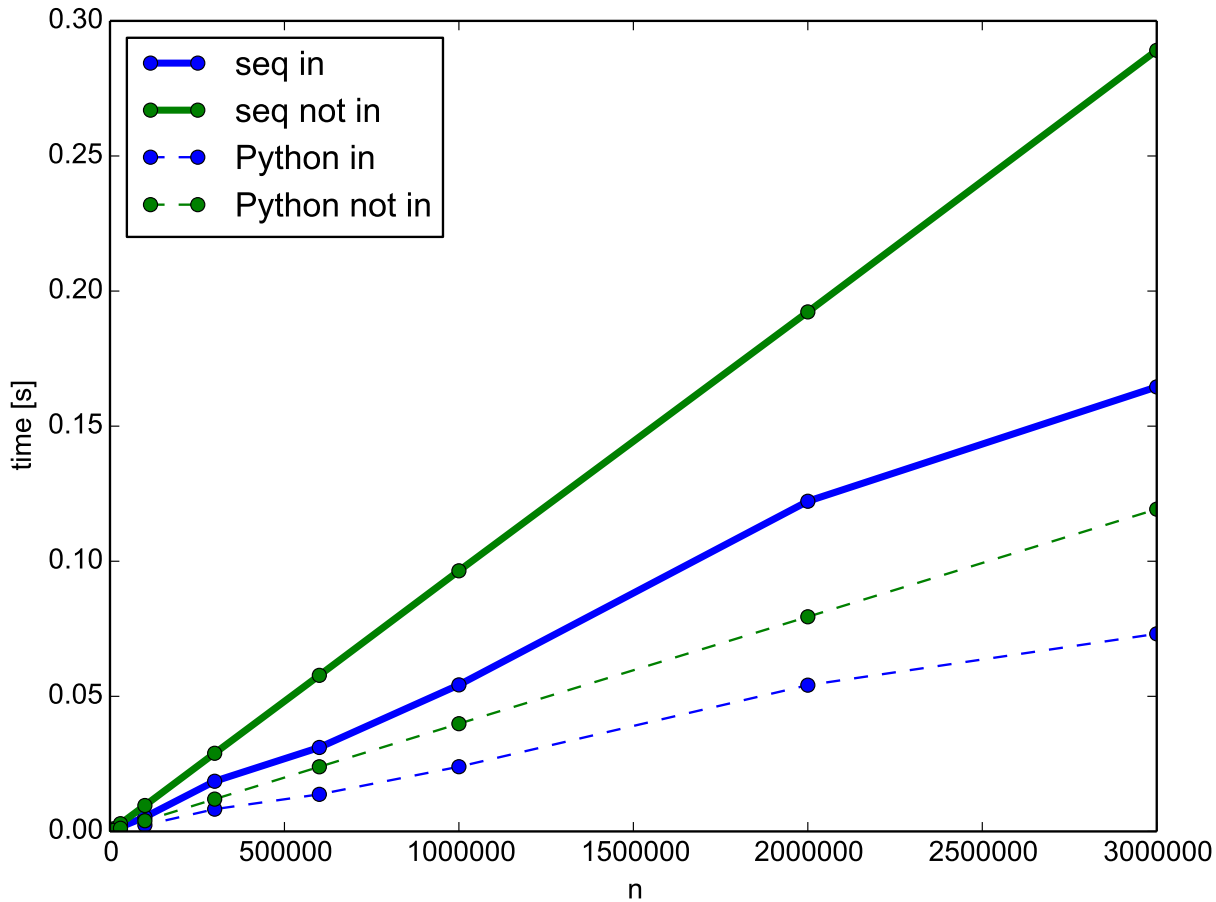
```
def sequential_search(a,q):
  """ Returns 'True' if 'a' contains 'q' """
  for x in a:
    if x==q:
      return True
  return False
```

Počet porovnání:

	nejméně	nejvíce	průměrně
$q \notin a$	N	N	N
$q \in a$	1	N	N/2

- Složitost $O(N)$, kde `N=len(a)`.
- Rychleji to nejde, protože na každý prvek a_i se musíme podívat.

Lineární vyhledávání — empirická složitost



Soubor `search_experiments.py`

Binární vyhledávání
Binary search

Vyhledávání v setříděné posloupnosti

- Mějme posloupnost (pole) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{N-1} \leq a_N$
- Mějme hodnotu q
- Úkol: zjistit, zda existuje $a_i = q$
- Je vyhledávání v setříděném poli rychlejší?

Hlavní myšlenky

- Postupně zmenšujeme interval indexů, kde by mohlo ležet q
- V každém kroku porovnáme q s prostředním prvkem intervalu a podle toho zvolíme jeden z podintervalů.
- Skončíme, pokud je prvek nalezen, nebo pokud je podinterval prázdný.

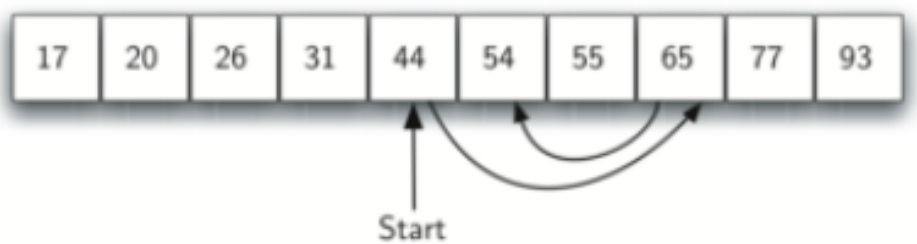


Image from Miller & Ranum: Problem solving with algothms and data structures

Binární vyhledávání — implementace

```
def binary_search(a,q):
  l=0                 # first index of the subinterval
  h=len(a)-1          # last index of the subinterval
  while l<=h:
    m=(l+h)//2 # middle point
    if a[m]==q:
      return True
    if a[m]>q:
      h=m-1
    else:
      l=m+1
  return False
```

Binární vyhledávání — časová složitost

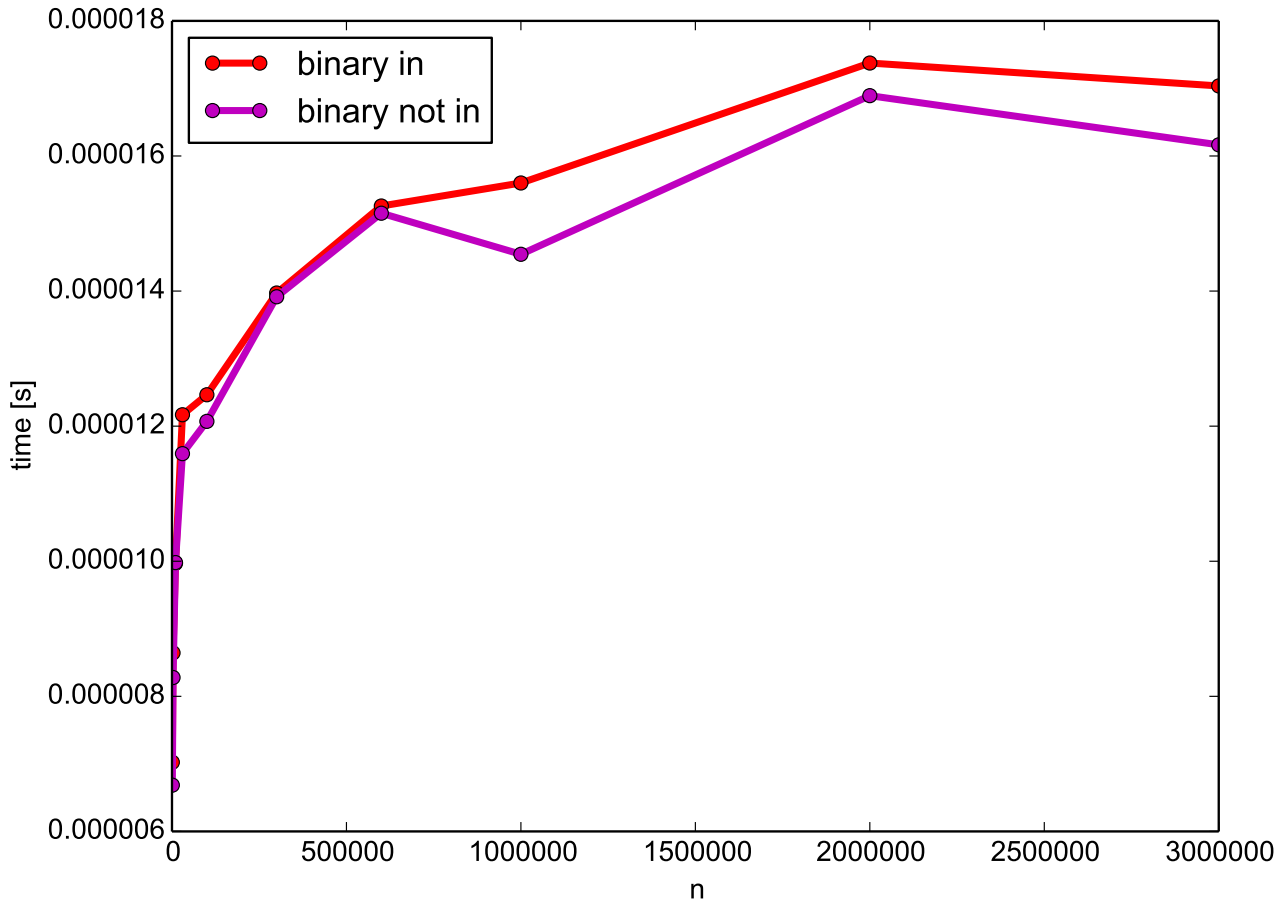
Počet porovnání

- Počet prvků v intervalu je $d = h - l + 1$ a v první iteraci $d = N$
- V každé iteraci se interval d zmenší nejméně na polovinu
- Po t iteracích je $d \leq N2^{-t}$
- Dokud algoritmus běží, musí platit $d \geq 1$,

$$1 \leq d \leq N2^{-t}$$
$$N \leq 2^t \quad \Rightarrow \quad t \geq \log_2 N$$

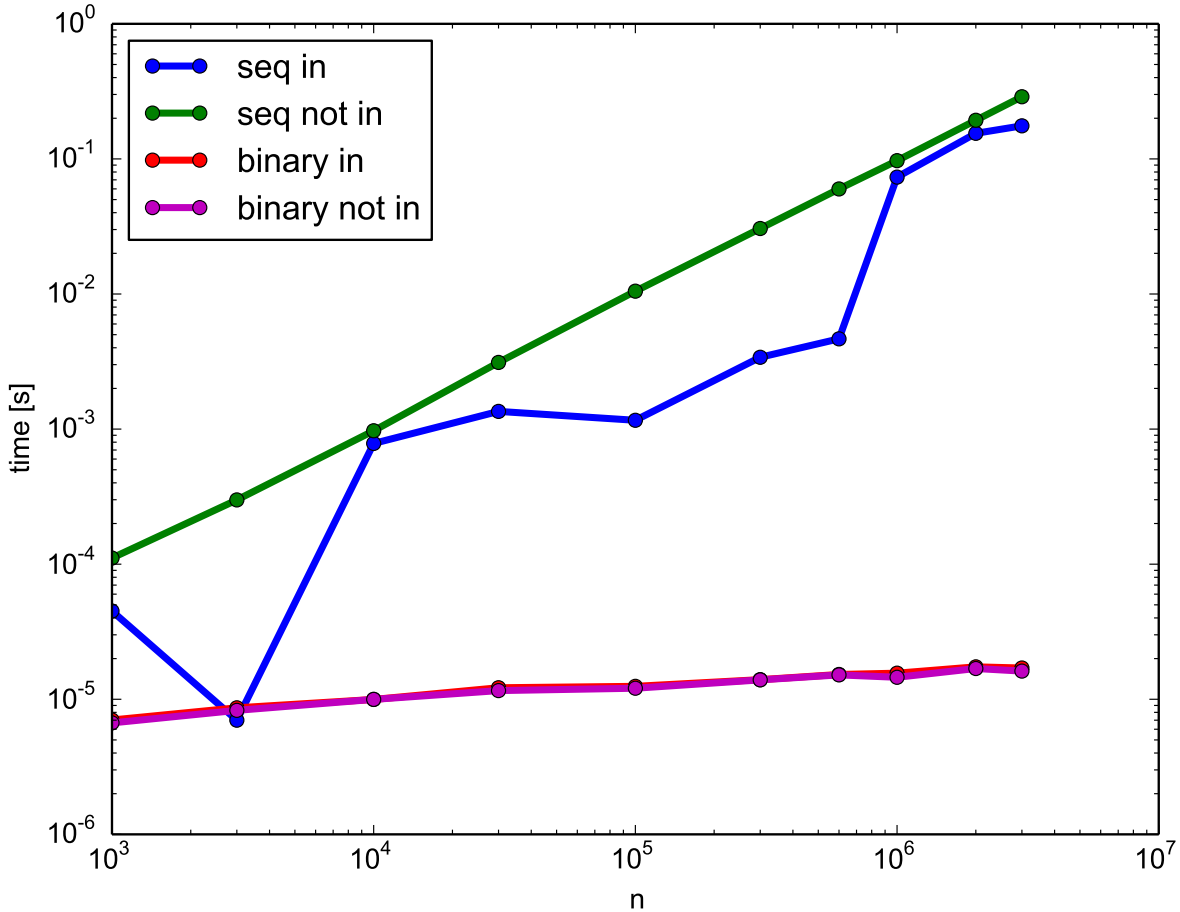
- Počet porovnání $t \sim \log_2 N$
- Složitost $O(\log n)$
- Strategie *rozděl a panuj (Divide and conquer)*

Binární vyhledávání — empirická složitost



Soubor `search_experiments.py`

Binární vs. sekvenční vyhledávání



Vyplatí se, pokud mnohokrát vyhledáváme nad stejným a.

Vyhledávání

Třídění

Třídící algoritmy

- Mějme posloupnost (pole) $A = \left[a_0, \ldots, a_{N-1}\right]$ a relaci '$\leq$'
- Najděte takovou permutaci $B = \left[b_0, \ldots, b_{N-1}\right]$ pole A, aby $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_{N-1}$.

Poznámky:

- Formy výstupu:
  - Třídění na místě *(in place)*
  - Vytvoření nového pole B, pole A zůstává nezměněno.
  - Najdeme indexy $j_1, j_2, \ldots, j_N$, tak aby $b_i = a_{j_i}$ (`a[j[i]]`)
- Stabilní třídění — zachovává pořadí ekvivalentních prvků.

Třídění v Pythonu

Funkce `sorted` vrací nové setříděné pole

```
>>> a=[80,43,20,15,90,67,51]
>>> sorted(a)
[15, 20, 43, 51, 67, 80, 90]
```

Metoda `sort` setřídí pole na místě (úspornější)

```
>>> a.sort()
>>> a
[15, 20, 43, 51, 67, 80, 90]
```

Třídění v Pythonu

Funkce `sorted` vrací nové setříděné pole

```
>>> a=[80,43,20,15,90,67,51]
>>> sorted(a)
[15, 20, 43, 51, 67, 80, 90]
```

Metoda `sort` setřídí pole na místě (úspornější)

```
>>> a.sort()
>>> a
[15, 20, 43, 51, 67, 80, 90]
```

Třídění sestupně

```
>>> sorted(a,reverse=True)
[90, 80, 67, 51, 43, 20, 15]
```

Třídění řetězců

Lze třídit veškeré porovnatelné typy, například řetězce

```
>>> names=["Barbora","Adam","David","Cyril"]
>>> sorted(names)
['Adam', 'Barbora', 'Cyril', 'David']
```

Třídění řetězců

Lze třídit veškeré porovnatelné typy, například řetězce

```
>>> names=["Barbora","Adam","David","Cyril"]
>>> sorted(names)
['Adam', 'Barbora', 'Cyril', 'David']
```

Třídění není podle českých pravidel

```
print(sorted(["pan","paze"]))
```

```
['pan', 'paze']
```

```
print(sorted(["pán","paže"]))
```

```
['paže', 'pán']
```

Třídění *n*-tic

n-tice jsou tříděny postupně podle složek

```
>>> a=[(50,2),(50,1),(40,100),(40,20)]
>>> sorted(a)
[(40, 20), (40, 100), (50, 1), (50, 2)]
```

Třídění *n*-tic

n-tice jsou tříděny postupně podle složek

```
>>> a=[(50,2),(50,1),(40,100),(40,20)]
>>> sorted(a)
[(40, 20), (40, 100), (50, 1), (50, 2)]

>>> studenti=[("Bara",18),("Adam",20),
...                ("David",15),("Cyril",25)]
>>> sorted(studenti)
[('Adam', 20), ('Bara', 18), ('Cyril', 25), ('David', 15)]
```

Uživatelská třídící funkce

Funkce v parametru `key` transformuje prvky pro třídění.

Třídení podle druhé složky dvojice

```
>>> a=[(50,2),(50,1),(40,100),(40,20)]
>>> sorted(a,key=lambda x: x[1])
[(50, 1), (50, 2), (40, 20), (40, 100)]

>>> studenti=[("Bara",18),("Adam",20),
...                ("David",15),("Cyril",25)]
>>> sorted(studenti,key=lambda x: x[1])
[('David', 15), ('Bara', 18), ('Adam', 20), ('Cyril', 25)]
```

Uživatelská třídící funkce (2)

Třídění bez ohledu na velikost písmen

```
>>> s=["Python","Quido","abeceda","zahrada"]
>>> sorted(s)
['Python', 'Quido', 'abeceda', 'zahrada']
>>> sorted(s,key=lambda x: x.lower())
['abeceda', 'Python', 'Quido', 'zahrada']
```

Vyhledávání

Třídění

Třídící algoritmy

Třídící algoritmy

- Třídění probubláváním *(bubble sort)*
- Třídění zatřiďováním *(insertion sort)*
- Třídění výběrem *(selection sort)*
- Shell sort
- Třídění spojováním *(merge sort)*
- *Quick sort*
- `sort`, `sorted`

Řazení probubláváním
Bubble sort

Vyměňuje sousední prvky ve špatném pořadí. Jeden průchod:

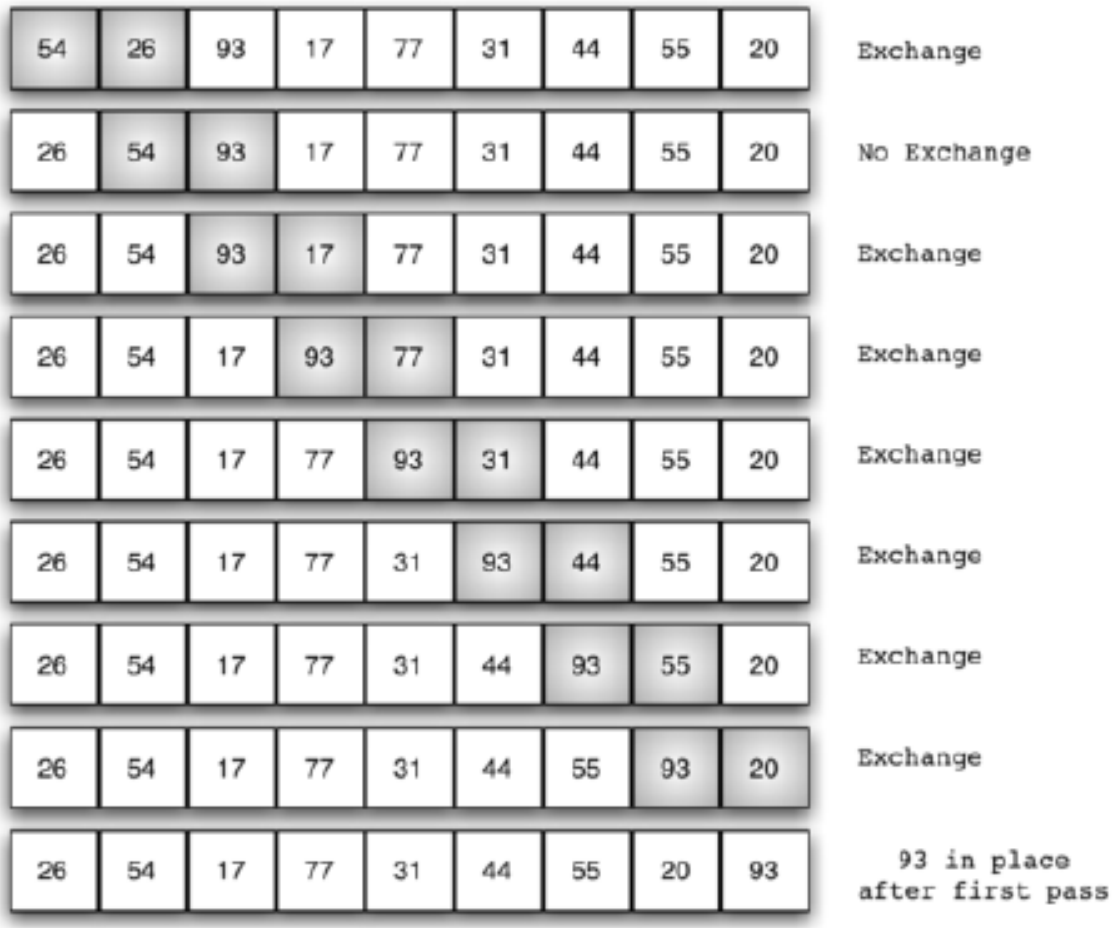


Image from Miller & Ranum: Problem solving with algothms and data structures

Řazení probubláváním — implementace

Bubble sort

```
def bubble_sort(a):
  """ sorts array a in-place in ascending order"""
  for i in range(len(a)-1,0,-1):
    # i=n-1..1.  a[i+1:] is already sorted
    for j in range(i):
      if a[j]>a[j+1]:
        a[j],a[j+1]=a[j+1],a[j] # exchange
```

Řazení probubláváním — implementace

Bubble sort

```
def bubble_sort(a):
  """ sorts array a in-place in ascending order"""
  for i in range(len(a)-1,0,-1):
    # i=n-1..1.  a[i+1:] is already sorted
    for j in range(i):
      if a[j]>a[j+1]:
        a[j],a[j+1]=a[j+1],a[j] # exchange
```

Složitost

- Vnější smyčka proběhne $N-1 \sim N$-krát
- Vnitřní smyčka proběhne vždy i-krát, kde $i < N$, tedy max. N-krát
- Počet porovnání je tedy max. $N^2 \quad \rightarrow \quad$ složitost $O(N^2)$
- Počet výměn je velký, element musí ‘probublat’ nakonec

Řazení probubláváním — vylepšení

Pokud neproběhla žádná výměna, je pole setříděné.

```
def bubble_sort(a):
  """ sorts array a in-place in ascending order"""
  for i in range(len(a)-1,0,-1):
    # i=n-1..1.  a[i+1:] is already sorted
    exchanged=False # exchanges in this iteration?
    for j in range(i):
      if a[j]>a[j+1]:
        a[j],a[j+1]=a[j+1],a[j] # exchange
        exchanged=True
    if not exchanged: break
```

Třídění probubláváním — kontrola

```
>>> a=[31, 60, 23, 91, 62, 65, 59, 92, 42, 74]
>>> bubble_sort(a)
>>> a
[23, 31, 42, 59, 60, 62, 65, 74, 91, 92]
```

Třídění probubláváním — kontrola

```
>>> a=[31, 60, 23, 91, 62, 65, 59, 92, 42, 74]
>>> bubble_sort(a)
>>> a
[23, 31, 42, 59, 60, 62, 65, 74, 91, 92]
```

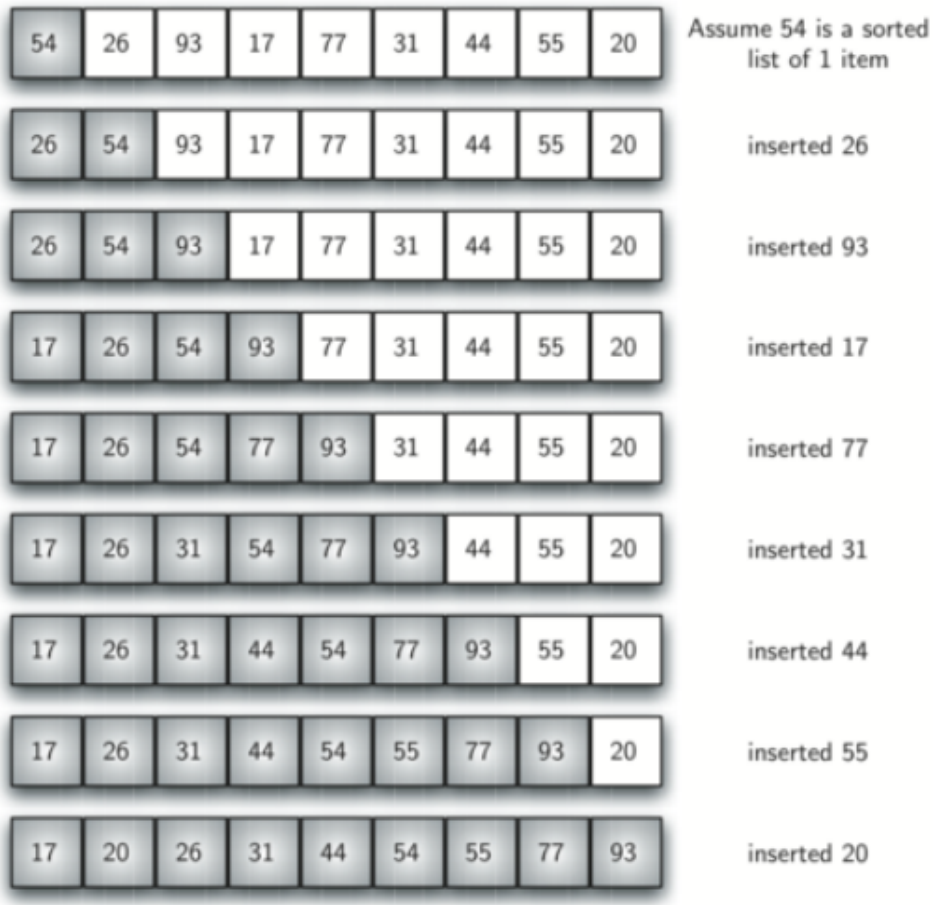
☝ Správný test je důkladnější:

```
def test_sort(f=bubble_sort):
  for j in range(100):
    n=100
    a=[random.randrange(100000) for i in range(n)]
    f(a)
    for i in range(n-1):
      assert(a[i]<=a[i+1])
  print(f.__name__," sort test passed")
```

Třídění zatřiďováním

Insertion sort

Prvek a_i zatřídíme do již setříděných $a_0, \ldots, a_{i-1}$



Třídění zatřiďováním — implementace

Insertion sort

```
def insertion_sort(a):
  """ sorts array a in-place in ascending order"""
  for i in range(1,len(a)):     # a[0:i] is sorted
    val=a[i]
    j=i
    while j>0 and a[j-1]>val:
      a[j]=a[j-1]
      j-=1
    a[j]=val
```

Třídění zatřiďováním — implementace

Insertion sort

```
def insertion_sort(a):
  """ sorts array a in-place in ascending order"""
  for i in range(1,len(a)):     # a[0:i] is sorted
    val=a[i]
    j=i
    while j>0 and a[j-1]>val:
      a[j]=a[j-1]
      j-=1
    a[j]=val
```

Složitost

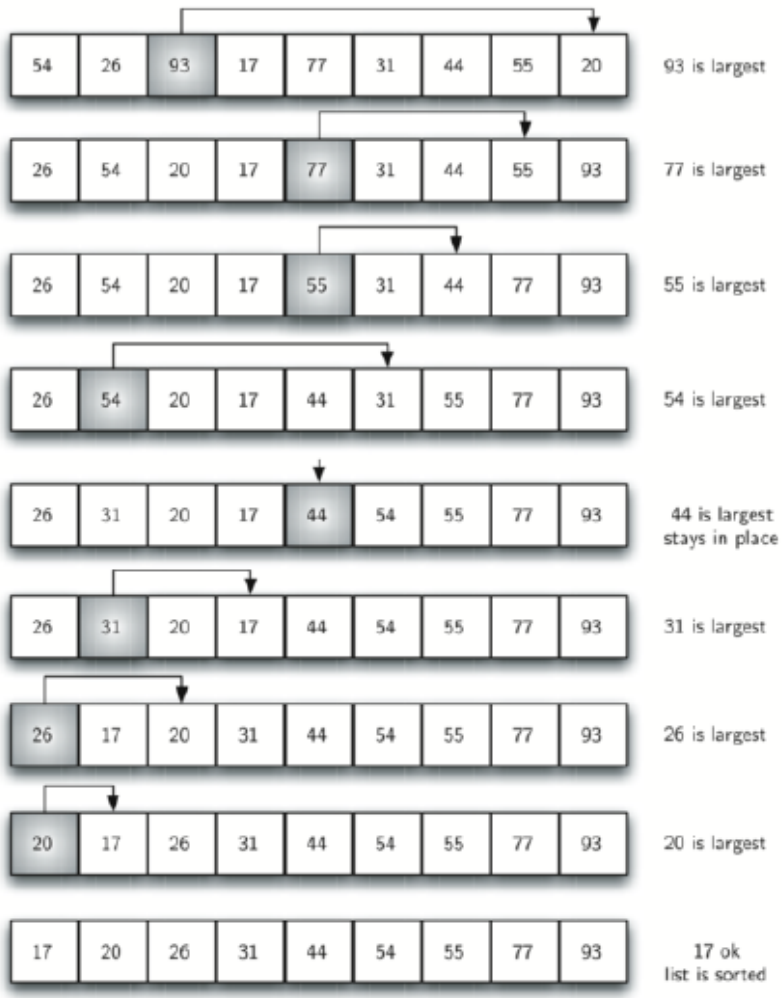
- Vnější smyčka proběhne $N-1 \sim N$-krát.
- Vnitřní smyčka proběhne max. $i < N$ krát.
- Počet porovnání je tedy max. $N^2 \quad \rightarrow \quad$ složitost $O(N^2)$.
- Nepoužívá výměny, ale posun (rychlejší).
- Přirozeně detekuje setříděné pole.

Třídění zatřiďováním — kontrola

```
>>> a=[43, 22, 42, 7, 58, 85, 48, 82, 80, 1]
>>> insertion_sort(a)
>>> a
[1, 7, 22, 42, 43, 48, 58, 80, 82, 85]
```

Třídění výběrem
Selection sort

- Vybere maximum mezi $a_0, \ldots, a_{N-1}$, to umístí do a_{N-1}.
- Vybere maximum mezi $a_0, \ldots, a_{N-2}$, to umístí do a_{N-2}...



Třídění výběrem — implementace

Selection sort

```
def selection_sort(a):
  """ sorts array a in-place in ascending order"""
  for i in range(len(a)-1,0,-1):
    # find out what should go to a[i]
    max_pos=0 # index of the maximum
    for j in range(1,i+1):
      if a[j]>a[max_pos]:
        max_pos=j
    a[i],a[max_pos]=a[max_pos],a[i]
```

Třídění výběrem — implementace

Selection sort

```
def selection_sort(a):
  """ sorts array a in-place in ascending order"""
  for i in range(len(a)-1,0,-1):
    # find out what should go to a[i]
    max_pos=0 # index of the maximum
    for j in range(1,i+1):
      if a[j]>a[max_pos]:
        max_pos=j
    a[i],a[max_pos]=a[max_pos],a[i]
```

Složitost

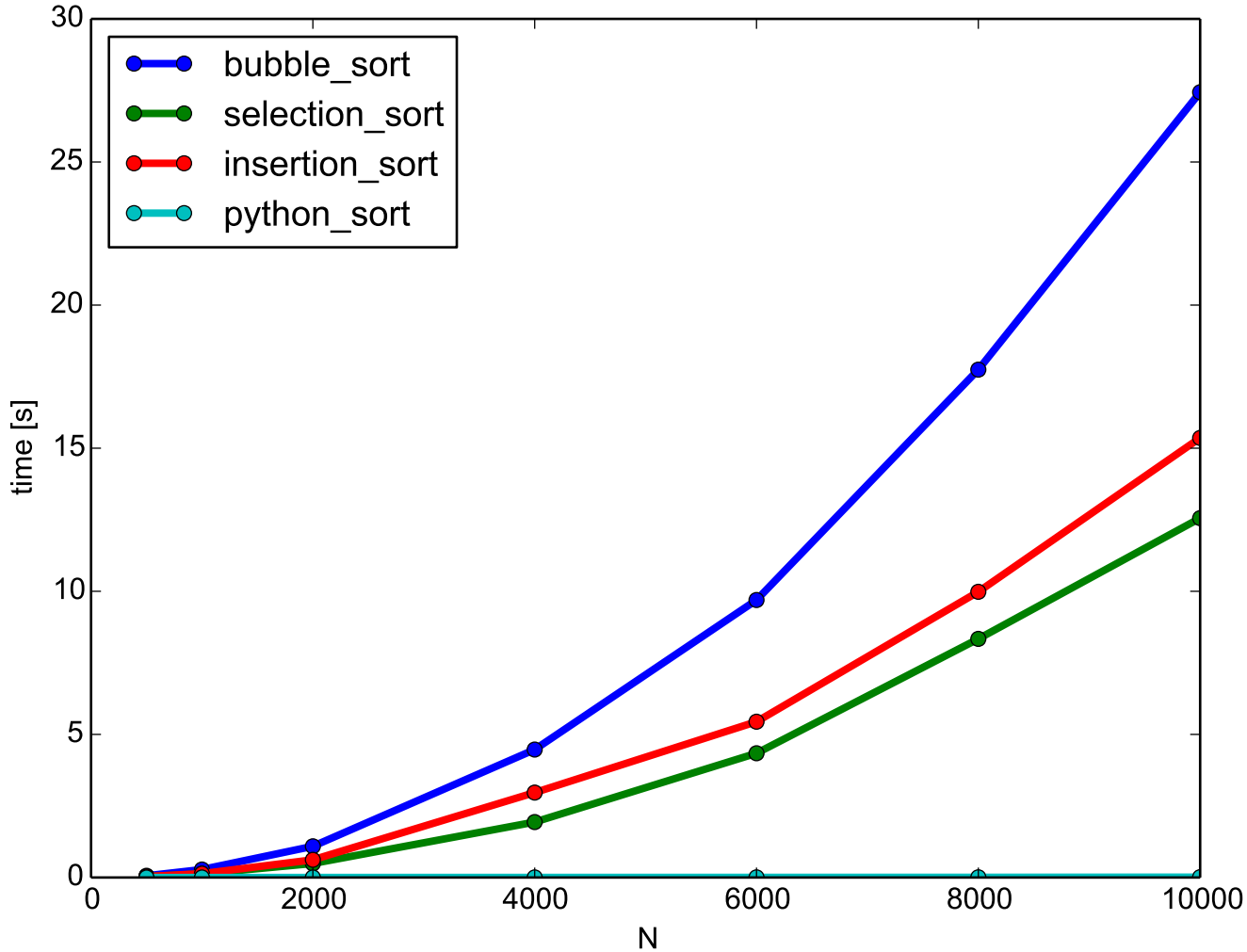
- Vnější smyčka proběhne $N-1 \sim N$-krát
- Vnitřní smyčka proběhne vždy i-krát, kde $i < N$, tedy max. N-krát
- Počet porovnání je tedy max. $N \quad \rightarrow \quad$ složitost $O(N^2)$
- Pouze jedna výměna v každé vnější smyčce

Třídění výběrem — kontrola

```
>>> a=[60, 46, 31, 69, 45, 11, 43, 14, 61, 36]
>>> selection_sort(a)
>>> a
[11, 14, 31, 36, 43, 45, 46, 60, 61, 69]
```

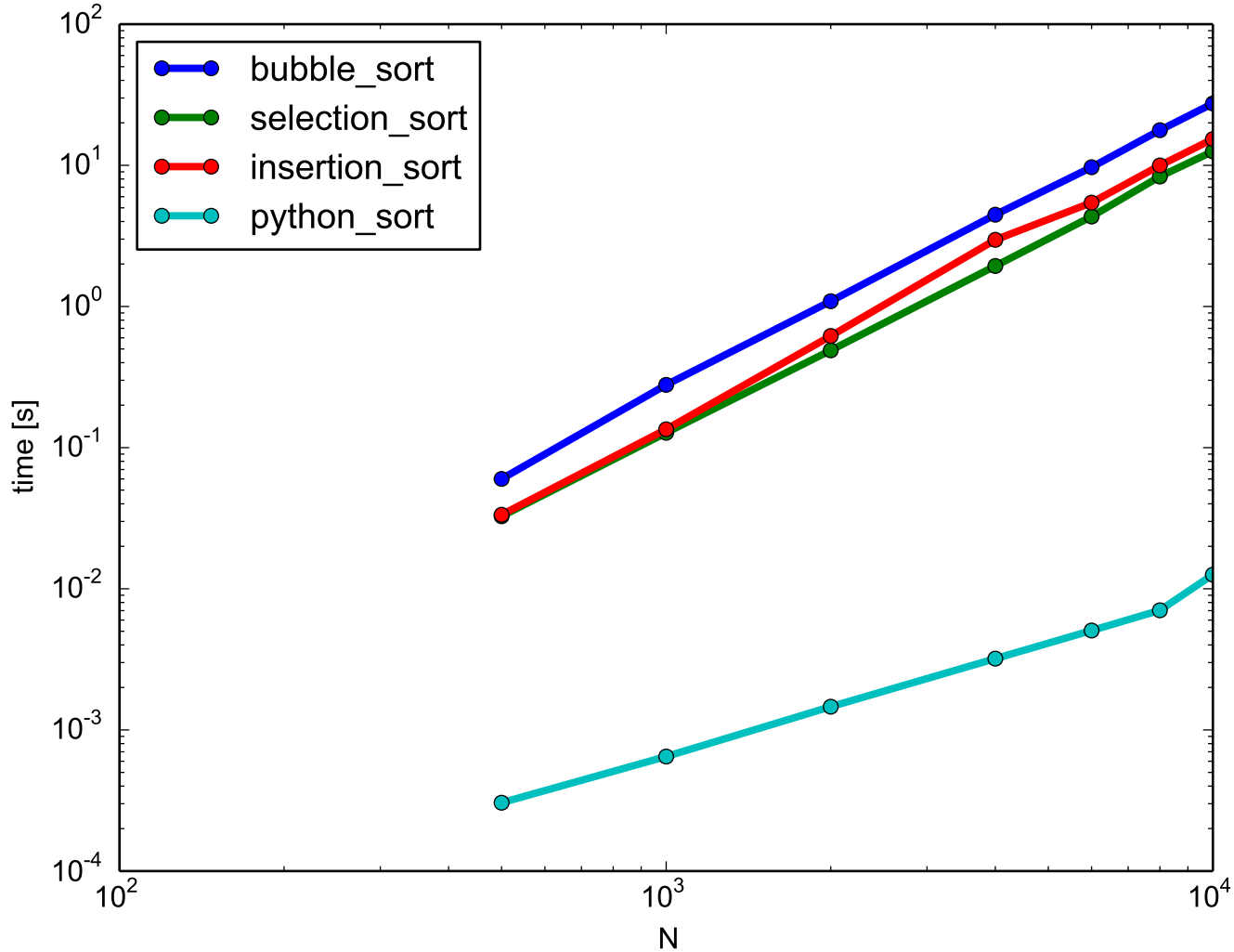
Porovnání rychlosti

Náhodná pole



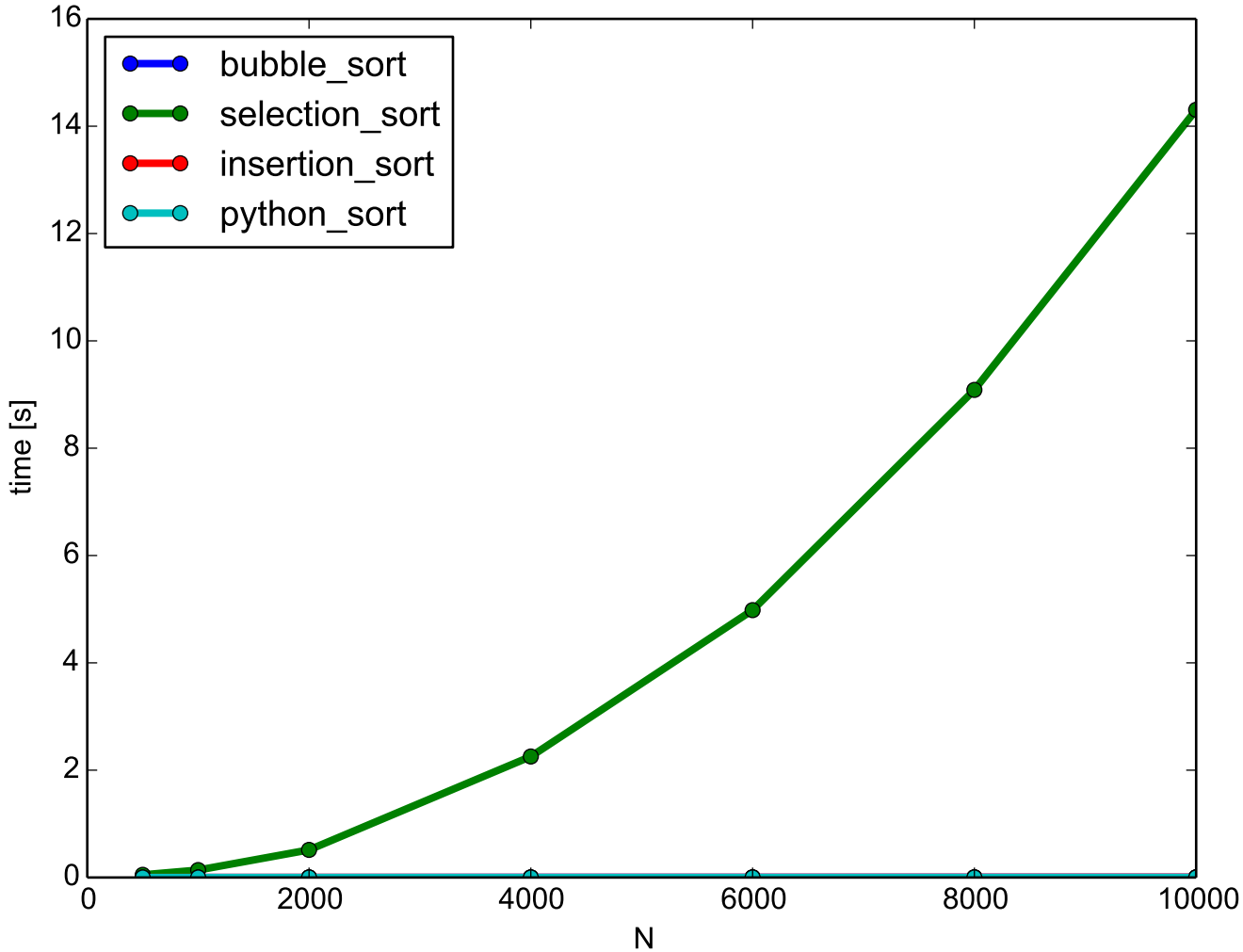
Porovnání rychlosti

Náhodná pole



Porovnání rychlosti

Setříděné pole



Porovnání rychlosti

Setříděné pole