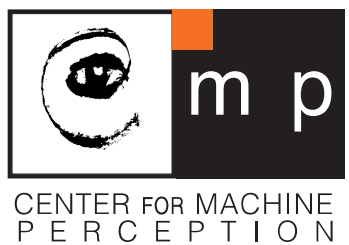
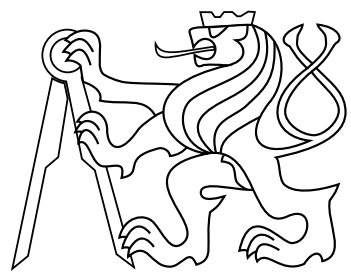
Časová složitost / Time complexity

Jan Kybic

http://cmp.felk.cvut.cz/~kybic
kybic@fel.cvut.cz

2016





Složitost algoritmů
Algorithm complexity

- **Časová** a paměťová složitost
- Trvání výpočtu v závislosti na vstupních datech
  - v nejhorším případě, v průměru...
- Který algoritmus je lepší?
- Jak velká data jsme schopni zpracovat?
- Empirická vs. teoretická analýza

Empirická časová složitost

Teoretická časová složitost

Empirická časová složitost

- Změříme dobu běhu pro různá vstupní data
- Vyhodnocujeme algoritmus + implementace + hardware
- Kvantitativní výsledky
- Neposkytuje záruky, obtížná predikce

Příklad: Prvočísla

- Najdi všechna prvočísla menší než m
- Metody:
  1. Zkus všechny dělitele do $n - 1$
  2. Zkus všechny dělitele do $\sqrt{n}$
  3. Eratosthenovo síto
  4. Eratosthenovo síto, vylepšené ($\sqrt{n}$, jen lichá]

Soubor `porovnani_prvocislo.py`

Prvočísla — měření času (1)

```
Implementation :  prvocisla_jednoduse
  n=   100 CPU time=  0.001s
  n=   300 CPU time=  0.004s
  n=  1000 CPU time=  0.035s
  n=  3000 CPU time=  0.274s
  n= 10000 CPU time=  2.716s
  n= 30000 CPU time= 21.899s
  n=100000 CPU time=218.257s
```

Prvočísla — měření času (2)

```
Implementation :  prvocisla_odmocnina
  n=   100 CPU time= 0.000s
  n=   300 CPU time= 0.001s
  n=  1000 CPU time= 0.003s
  n=  3000 CPU time= 0.012s
  n= 10000 CPU time= 0.063s
  n= 30000 CPU time= 0.278s
  n=100000 CPU time= 1.439s
```

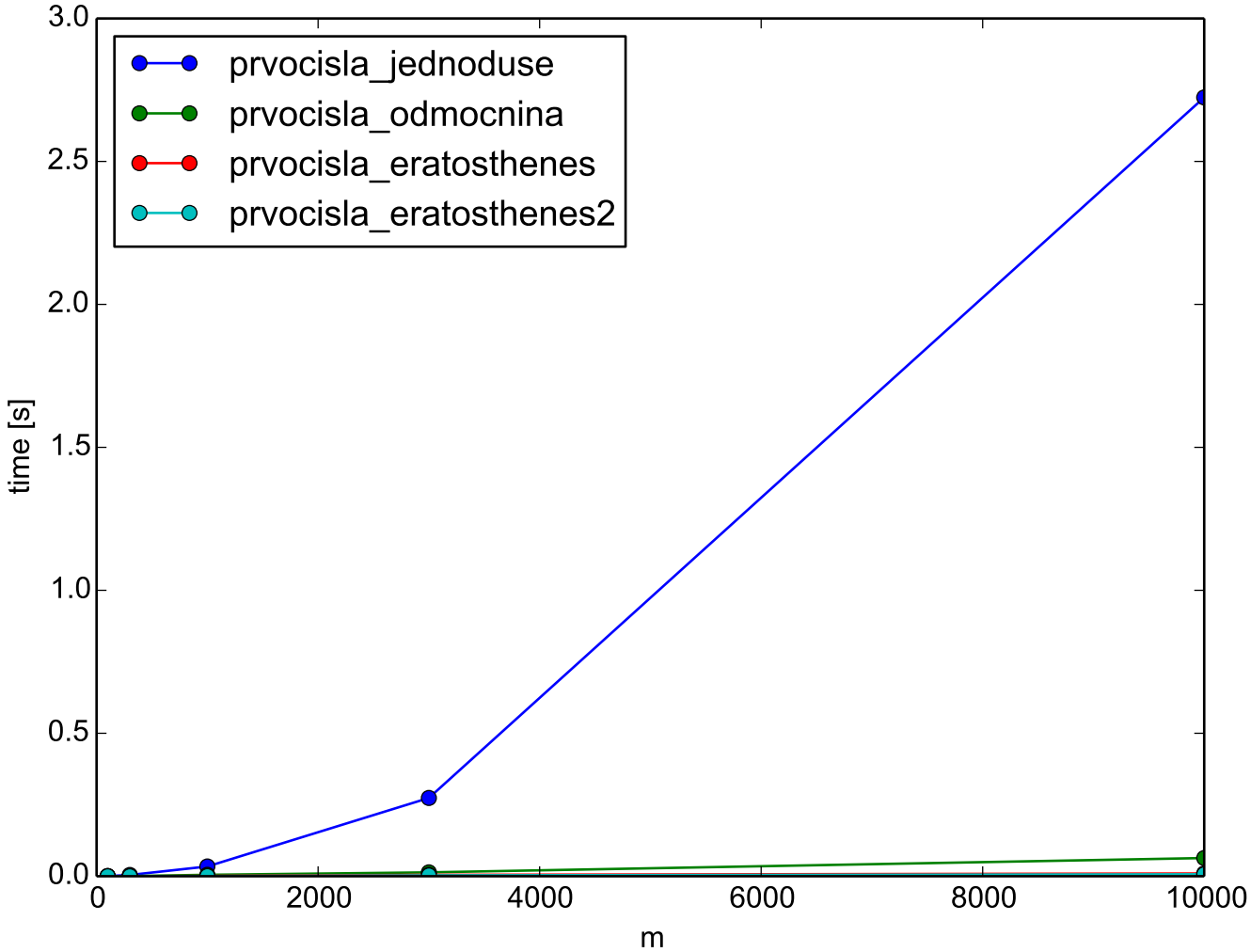
Prvočísla — měření času (3)

```
Implementation :  prvocisla_eratosthenes
  n=   100 CPU time= 0.000s
  n=   300 CPU time= 0.000s
  n=  1000 CPU time= 0.001s
  n=  3000 CPU time= 0.003s
  n= 10000 CPU time= 0.009s
  n= 30000 CPU time= 0.027s
  n=100000 CPU time= 0.095s
```

Prvočísla — měření času (4)

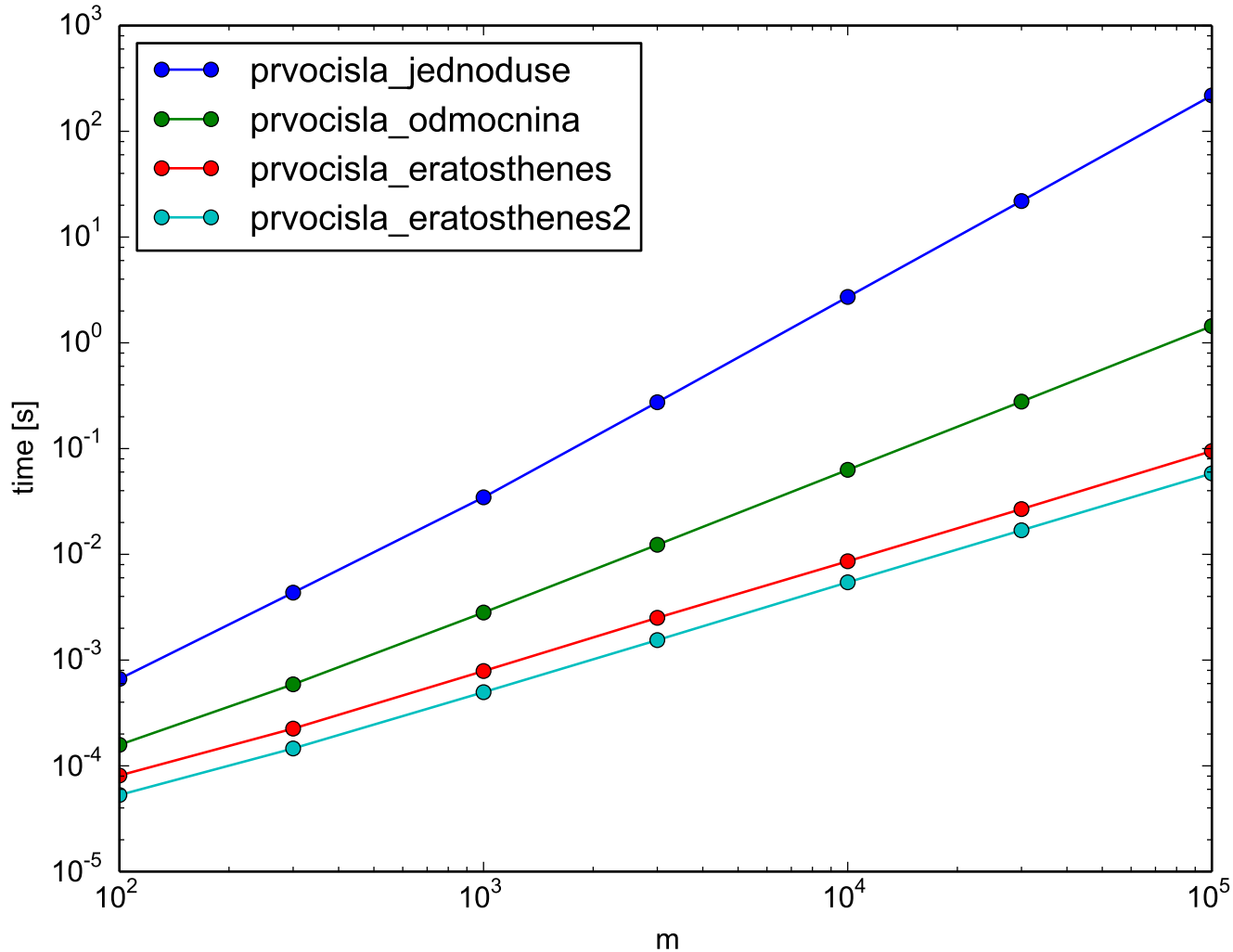
```
Implementation :  prvocisla_eratosthenes2
  n=   100 CPU time= 0.000s
  n=   300 CPU time= 0.000s
  n=  1000 CPU time= 0.000s
  n=  3000 CPU time= 0.002s
  n= 10000 CPU time= 0.005s
  n= 30000 CPU time= 0.017s
  n=100000 CPU time= 0.058s
```

Prvočísla — graf



Kvalitativní (řádové) rozdíly.

Prvočísla — graf (2)



Empirická časová složitost

Teoretická časová složitost

Teoretická analýza časová složitosti

- Studujme funkci $T(n)$
- Velikost problému n
  - vstupní parametr
  - délka vstupních dat
  - parametrů může být více
- Čas běhu programu T
  - Ve fyzických jednotkách
  - V počtu ‘typických operací’ — přiřazení, porovnání, sčítání,. . . *(výpočetní model)*

Asymptotická časová složitost

Přesný vzorec pro $T(n)$ není nutný...

- Zajímají nás pouze kvalitativní rozdíly
- Multiplikativní konstanty zanedbáme
  - vliv počítače, programátora, programovacího jazyka...
  - "vždycky si můžeme koupit rychlejší počítač"
- Zajímá nás chování pro velká n
  - Rychlost růstu $T(n)$ pro $n \to \infty$
  - Pomaleji rostoucí části $T(n)$ zanedbáme

$f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ je $O\big(g(n)\big)$ pokud existují konstanty $c > 0$ a $n_0 > 0$ takové, že $f(n) \leq cg(n)$ pro všechna $n \geq n_0$.

Pro polynomiální $f(n)$ — člen nejvyššího řádu, bez konstanty.
Příklady:

$$f(n) = 456211n + 235166 \qquad \text{je } O\big(n\big)$$
$$f(n) = n(n+2)/2 \qquad \text{je } O\big(n^2\big)$$
$$f(n) = 442(n+12)\log n \qquad \text{je } O\big(n \log n\big)$$
$$f(n) = 4n^3 + 100n^2 + 1000n + 5000 \qquad \text{je } O\big(n^3\big)$$

$f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ je $O(g(n))$ pokud existují konstanty $c > 0$ a $n_0 > 0$ takové, že $f(n) \leq cg(n)$ pro všechna $n \geq n_0$.

Ověření: $f(n) = 4n^3 + 100n^2 + 1000n + 5000$ je $O(n^3)$
Možné ověření:

$$n \geq 100 \quad \Rightarrow \quad n^3 \geq 100n^2, \quad n^3 \geq 1000n, \quad n^3 \geq 5000$$

a proto

$$n \geq 100 \quad \Rightarrow \quad 4n^3 + 100n^2 + 1000n + 5000 \leq 7n^3$$

$$n_0 = 100, \quad c = 7$$

Asymptotická notace

Řád růstu funkce / big-O notation

$f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ je $O(g(n))$ pokud existují konstanty $c > 0$ a $n_0 > 0$ takové, že $f(n) \leq cg(n)$ pro všechna $n \geq n_0$.

$O(\cdot)$ notace je *horní odhad*, ale uvádíme ten nejlepší známý.

Tedy $f(n) = 4n^3 + 100n^2$ je nejenom $O(n^3)$, ale zároveň i $O(n^4)$ a $O(n^{10})$.

Asymptotická notace (2)

Big-Θ notation

$f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ je $\Theta(g(n))$ pokud existují konstanty $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ a $n_0 > 0$ takové, že $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ pro všechna $n \geq n_0$.

Tedy konstantní násobek g je zároveň horní a dolní odhad.

$4n^3 + 100n^2$ je $O(n^3)$, $O(n^4)$, $O(n^{10})\ldots$

$4n^3 + 100n^2$ je pouze $\Theta(n^3)$, ale nikoliv i $\Theta(n^4)$ či $\Theta(n^{10})$.

Asymptotická notace (2)

Big-Θ notation

$f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ je $\Theta(g(n))$ pokud existují konstanty $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ a $n_0 > 0$ takové, že $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ pro všechna $n \geq n_0$.

Tedy konstantní násobek g je zároveň horní a dolní odhad.

$4n^3 + 100n^2$ je $O(n^3)$, $O(n^4)$, $O(n^{10})\ldots$

$\times$

$4n^3 + 100n^2$ je pouze $\Theta(n^3)$, ale nikoliv i $\Theta(n^4)$ či $\Theta(n^{10})$.

Θ notace je přesnější, ale v praxi se často setkáte s $O(\cdot)$ ve významu $\Theta(\cdot)$. Odhad $O(\cdot)$ je snazší nalézt.

Asymptotická notace (3)

Limita pro velká n

$f(n) \overset{n\to\infty}{\sim} g(n)$ pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

- Zkráceně $f(n) \sim g(n)$ *(je asymptoticky rovno)*
- Pro polynomy, pouze člen nejvyššího řádu, včetně konstanty.

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 4n^3 + 100n^2 + 1000n + 5000 && \sim 4n^3 \\
f(n) &= 456211n + 235166 && \sim 456211n \\
f(n) &= n(n+2)/2 && \sim n^2/2 \\
f(n) &= 442(n+12)\log n && \sim 442n\log n
\end{aligned}
$$

- Místo f je $O(n^3)$ píšeme $f(n) \sim O(n^3)$

Druhy odhadů

Časová složitost typicky závisí na datech (nejen na velikosti n)

- **Průměrná složitost** *(Average complexity)*
  - složitá teoretická analýza
  - lze odhadnout z experimentů na typických datech
- **Nejhorší složitost** *(Worst-case complexity)*
  - jen experimentálně nelze
  - teoretická analýza $\rightarrow$ různě přesné horní odhady

Druhy odhadů

Časová složitost typicky závisí na datech (nejen na velikosti n)

- **Průměrná složitost** *(Average complexity)*
  - složitá teoretická analýza
  - lze odhadnout z experimentů na typických datech
- **Nejhorší složitost** *(Worst-case complexity)*
  - jen experimentálně nelze
  - teoretická analýza $\rightarrow$ různě přesné horní odhady

Složitost může záležet na více parametrech vstupních dat (např. počet vstupních čísel a jejich maximální hodnota)

Složitost hledání prvočísel

```
for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
  p=2 # začátek testu
  while p<n:
    if n % p == 0:
      break
    p+=1
  if p==n: # n je prvočíslo
    primes+=[p]
```

Složitost hledání prvočísel

```
for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
  p=2 # začátek testu
  while p<n:
    if n % p == 0:
      break
    p+=1
  if p==n: # n je prvočíslo
    primes+=[p]
```

Analýza:

- Vnější `for` cyklus proběhne $m-1$-krát
- Každý vnitřní cyklus `while` proběhne max. $n-1$-krát, kde $n < m$
- Vnitřní cyklus tedy proběhne max. m^2-krát
- Složitost tohoto algoritmu je tedy $O(m^2)$

Složitost hledání prvočísel

```
for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
  p=2 # začátek testu
  while p<n:
    if n % p == 0:
      break
    p+=1
  if p==n: # n je prvočíslo
    primes+=[p]
```

Poznámky:

- Operace mimo vnitřní cyklus zanedbáme.
- Toto je horní odhad. Ve skutečnosti je složitost nižší, díky příkazu `break`.

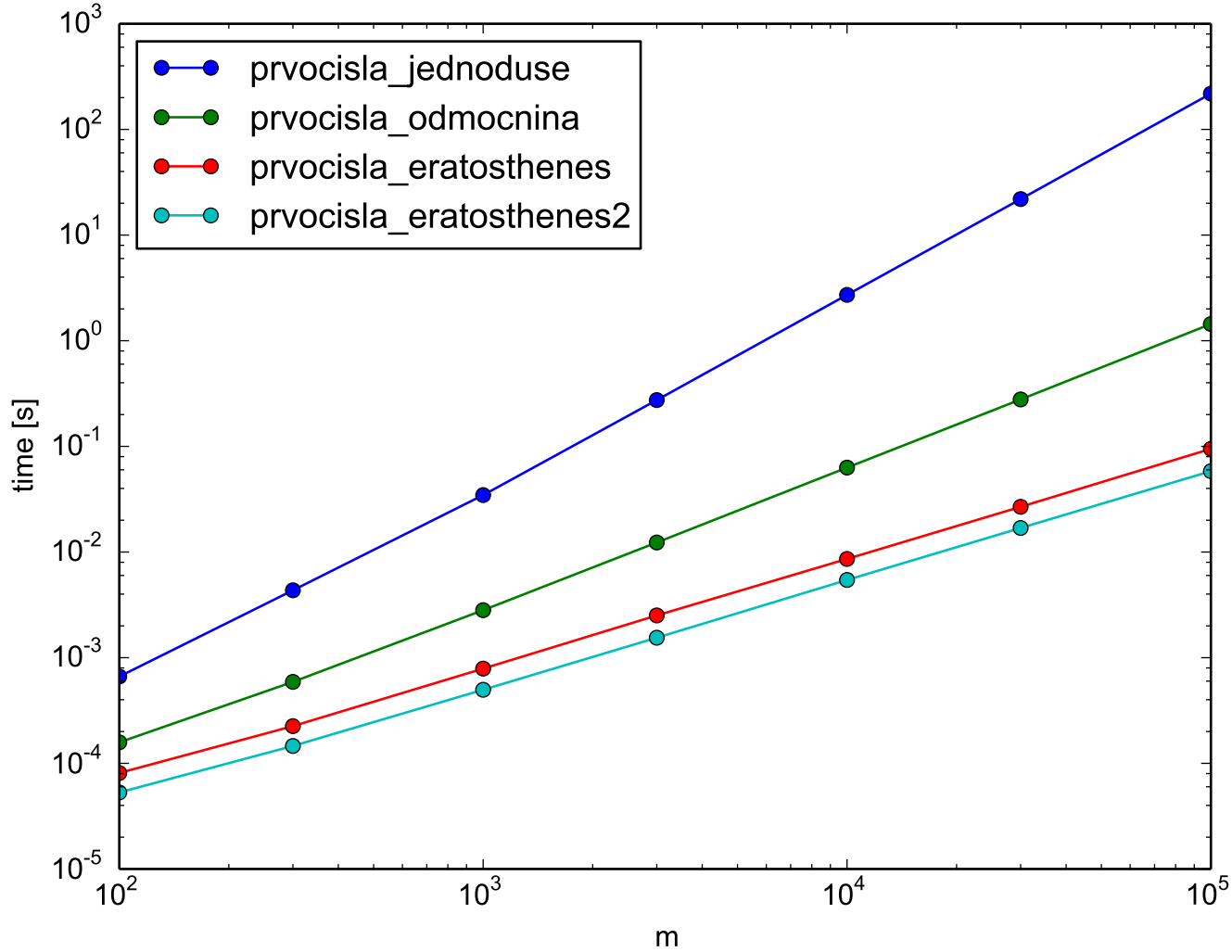
Složitost hledání prvočísel (2)

```
for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
  p=2 # začátek testu
  while p*p<n:
    if n % p == 0:
      break
    p+=1
  if p*p > n: # n je prvočíslo
    primes+=[n]
```

Analýza:

- Vnější `for` cyklus proběhne $m - 1$-krát
- Vnitřní `while` cyklus proběhne max. $\sqrt{n}$-krát, kde $n < m$
- Vnitřní cyklus tedy proběhne max. $m^{1.5}$-krát
- Složitost tohoto algoritmu je tedy $O(m^{1.5})$ *(nebo lepší)*

Prvočísla — graf



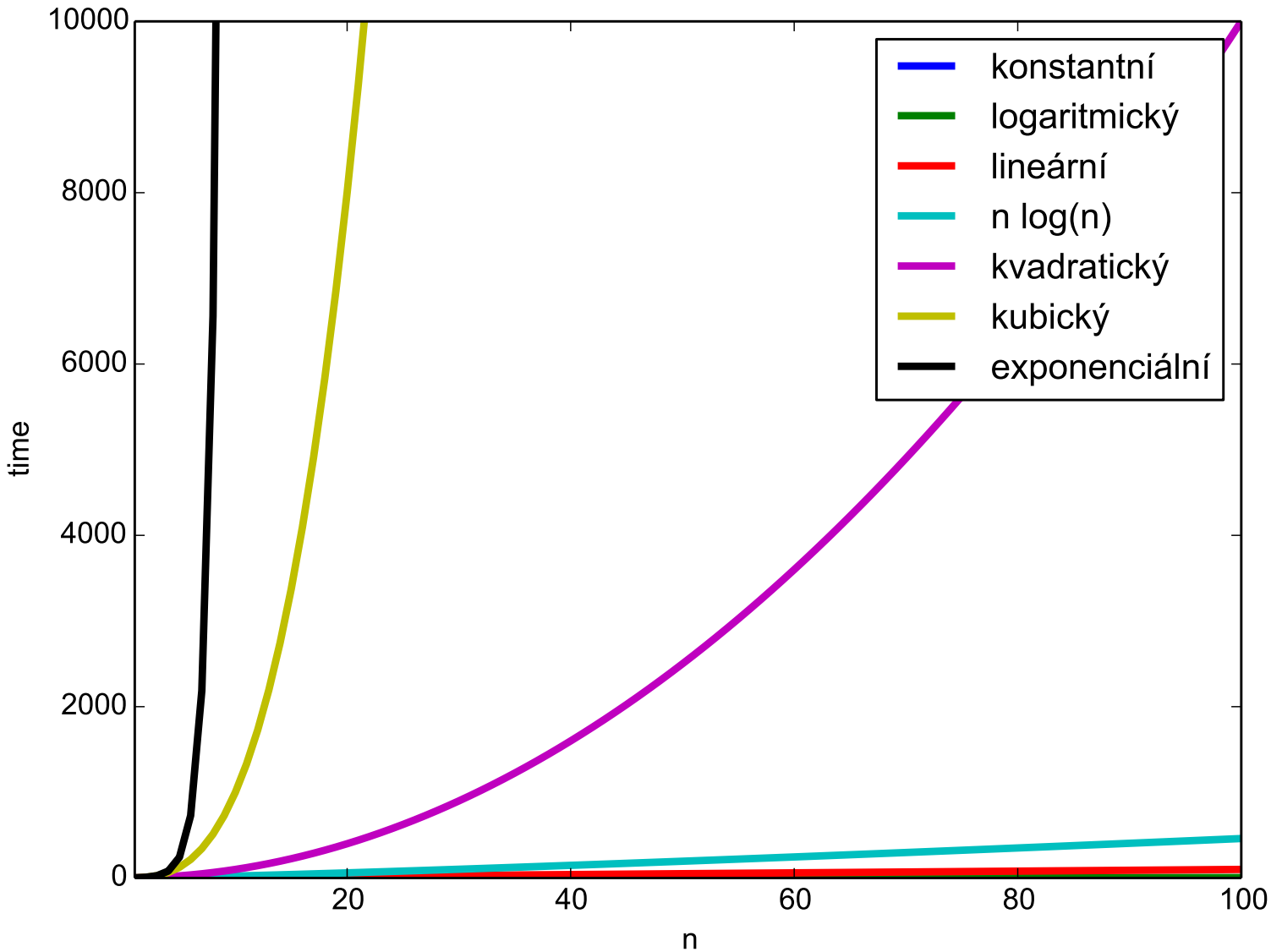
Asymptotická složitost Eratostenova síta je $O\big(n \log(\log n)\big)$

Srovnání složitostí

složitost		poznámka
konstantní	$O(1)$	nejrychlejší
logaritmická	$O(\log n)$	skoro jako $O(1)$, např. vyhledávání
lineární	$O(n)$	rychlé, použitelné pro velká data
	$O(n \log n)$	skoro jako $O(n)$, např. třídění
kvadratické	$O(n^2)$	trochu pomalejší, vhodné do $n \approx 10^6$
kubické	$O(n^3)$	pomalejší, vhodné do $n \lesssim 10^4$
polynomiální	$O(n^k)$	pomalé
exponenciální	$O(b^n)$	velmi pomalé, do $n \approx 50$
	$O(n!), O(n^n)$	nejpomalejší, do $n \approx 15$

Jak se změní čas, zvětší-li se $n \to 2n$?

Srovnání složitostí (2)



Složitost základních operací v Pythonu

- **V konstantním čase:** `len()`, `a[i]` (indexace), `a+=[v]` (přidání na konec), `a.pop()` (smazání posledního prvku)
- **V lineárním čase:** `a+b` (spojení), `a[i:j]` (řez pole), `a.insert()` (vkládání doprostřed pole), `max()`, `sum()`...
- **V čase** $n \log n$: `a.sort()`

Složitost základních operací v Pythonu

- **V konstantním čase:** `len()`, `a[i]` (indexace), `a+=[v]` (přidání na konec), `a.pop()` (smazání posledního prvku)
- **V lineárním čase:** `a+b` (spojení), `a[i:j]` (řez pole), `a.insert()` (vkládání doprostřed pole), `max()`, `sum()`...
- **V čase** $n \log n$: `a.sort()`

Složitost přidání prvku na konec pole je konstantní jen v průměru *(amortized complexity)*, nikoliv pro každou operaci.