

Pole / Arrays

Jan Kybic

<http://cmp.felk.cvut.cz/~kybic>
kybic@fel.cvut.cz

2016–2017



Pole

Hodnoty a reference

Další příklady

Datové typy

v Pythonu

- ▶ **Jednoduché typy:** (*primitive data type*)
 - ▶ celé číslo, reálné číslo, logická hodnota,
- ▶ **Složené typy / datové struktury:** (*composite/compound data type, data structures*)
 - ▶ řetězec, *n*-tice (*tuple*), **pole**

Složené typy / datové struktury

- ▶ Hierarchicky sdružují data
- ▶ Slouží k organizaci dat, související data jsou uložena a manipulována spolu
- ▶ Pro zvýšení efektivity programování i vykonávání
- ▶ Operace na datových strukturách
 - ▶ Vytvoření
 - ▶ Čtení jednotlivých složek (elementů)
 - ▶ Modifikace jednotlivých složek
 - ▶ Vyhledávání
 - ▶ Přidávání, odebrání, ...

Pole (Array)

- ▶ Obsahuje N elementů (objektů, prvků)
- ▶ Přímý přístup (*random access*)
 - ▶ Pro čtení i zápis
 - ▶ V konstantním čase

Pole v Pythonu

► Vytvoření

```
>>> a=[0.3,0.6,0.1]
```

```
>>> a
```

```
[0.3, 0.6, 0.1]
```

► Čtení prvku

```
>>> a[1]
```

```
0.6
```

```
>>> a[0]
```

```
0.3
```



V Pythonu má první prvek index 0.

Pole v Pythonu

► Vytvoření

```
>>> a=[0.3,0.6,0.1]
```

```
>>> a
```

```
[0.3, 0.6, 0.1]
```

► Čtení prvku

```
>>> a[1]
```

```
0.6
```

```
>>> a[0]
```

```
0.3
```

► Změna prvku

```
>>> a[2]=1.5
```

```
>>> a
```

```
[0.3, 0.6, 1.5]
```



V Pythonu má první prvek index 0.

Pole bez polí

- ▶ **Vytvoření**

```
>>> a0=0.3 ; a1=0.6 ; a2=0.1
```

- ▶ **Čtení prvku**

```
>>> a1
```

```
0.6
```

```
>>> a0
```

```
0.3
```

- ▶ **Změna prvku**

```
>>> a2=1.5
```


S polem je to pohodlnější...

- ▶ Operace s celým polem

```
a=[0.3,0.6,0.1]
```

```
print(a)
```

```
[0.3, 0.6, 0.1]
```

- ▶ Index může být výraz

```
s=0.
```

```
for i in range(3):
```

```
    s+=a[i]
```

```
    print("a[%d]=%f" % (i,a[i]))
```

```
print(s)
```

```
a[0]=0.300000
```

```
a[1]=0.600000
```

```
a[2]=0.100000
```

```
0.9999999999999999
```

Pole různých typů

```
a=[0.3,0.6,0.1]
```

```
print(a[0])
```

0.3

```
b=[3,1,4,1,5,9,2]
```

```
print(b[2])
```

4

```
barvy=["srdce","listy","kule","žaludy"]
```

```
print(barvy[3])
```

žaludy

```
bits=[True,False]
```

```
print(bits)
```

[True, False]



Homogenní pole = všechny prvky jsou stejného typu.

Funkce a pole

Unární operace

```
>>> a=[0.3,0.6,0.1]
>>> print(a)
[0.3, 0.6, 0.1]
>>> len(a)
3
>>> sum(a)
0.9999999999999999
>>> max(a)
0.6
>>> bits=[True,False]
>>> all(bits)
False
>>> any(bits)
True
```

Funkce a pole

Binární operace

Spojování, opakování

```
>>> a=[0.3,0.6,0.1]
```

```
>>> b=[0.7,0.9]
```

```
>>> a+b
```

```
[0.3, 0.6, 0.1, 0.7, 0.9]
```

```
>>> b*3
```

```
[0.7, 0.9, 0.7, 0.9, 0.7, 0.9]
```

Vytvoření pole

- ▶ Výčtem

```
>>> a=[0.3,0.6,0.1]
```

- ▶ opakováním prvků

```
>>> a=10*[0]
```

👉 Opakování používejte pouze pro primitivní nebo neměnné typy.

Vytvoření pole

- ▶ Výčtem

```
>>> a=[0.3,0.6,0.1]
```

- ▶ opakováním prvků

```
>>> a=10*[0]
```

👉 Opakování používejte pouze pro primitivní nebo neměnné typy.

```
>>> a=3*[[1,2]]
```

```
>>> a
```

```
[[1, 2], [1, 2], [1, 2]]
```

```
>>> a[1][0]=10
```

```
>>> a
```

```
[[10, 2], [10, 2], [10, 2]]
```

Vytvoření pole (2)

- ▶ z posloupnosti

```
>>> list(range(1,11))
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```




V Pythonu se tento druh pole jmenuje `list`

Vytvoření pole (2)


- ▶ z posloupnosti


```
>>> list(range(1,11))  
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

 V Pythonu se tento druh pole jmenuje `list`

- ▶ přidáváním na konec

```
a=[]  
for i in range(10):  
    a+= [0.0]  
print(a)  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

 Přidávání může být časově náročné.

 V jiných jazycích je délka pole pevná.

Vytvoření pole (3)

- ▶ výrazem (*list comprehension*)

```
>>> [i for i in range(1,11)]  
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

```
>>> [i*i for i in range(1,11)]  
[1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]
```

```
>>> [0. for i in range(1,11)]  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

Elegantní, ale specialita Pythonu — nemusíte si pamatovat.

Indexace

`x[i]`

- ▶ i -tý prvek x
- ▶ pro sekvenční typy: pole, řetězce, n -tice

Indexace

`x[i]`

- ▶ i -tý prvek x
- ▶ pro sekvenční typy: pole, řetězce, n -tice

```
a=[2,7,1]
```

```
print(a[2])
```

Indexace

`x[i]`

- ▶ *i*-tý prvek *x*
- ▶ pro sekvenční typy: pole, řetězce, *n*-tice

```
a=[2,7,1]
```

```
print(a[2])
```

1

Indexace

`x[i]`

- ▶ i -tý prvek x
- ▶ pro sekvenční typy: pole, řetězce, n -tice

```
a=[2,7,1]
```

```
print(a[2])
```

1

```
s="Ferda"
```

```
print(s[2])
```

Indexace

`x[i]`

- ▶ *i*-tý prvek *x*
- ▶ pro sekvenční typy: pole, řetězce, *n*-tice

```
a=[2,7,1]
```

```
print(a[2])
```

1

```
s="Ferda"
```

```
print(s[2])
```

r

Indexace

`x[i]`

- ▶ i -tý prvek x
- ▶ pro sekvenční typy: pole, řetězce, n -tice

```
a=[2,7,1]
```

```
print(a[2])
```

1

```
s="Ferda"
```

```
print(s[2])
```

r

```
t=(1,2)
```

```
print(t[0])
```

1

Indexace (2)

Záporné indexy

Specialita Pythonu — nemusíte si pamatovat.

`x[i]` pro $i < 0$

Indexace (2)

Záporné indexy

Specialita Pythonu — nemusíte si pamatovat.

`x[i]` pro $i < 0$

`x[i]=x[len(x)+i]`

```
>>> a=[6,7,5,2,9]
```

```
>>> a
```

```
[6, 7, 5, 2, 9]
```

```
>>> a[-1]
```

```
9
```

```
>>> a[2]
```

```
5
```

```
>>> a[-2]
```

```
2
```

Řezy pole

(array slicing)

Specialita Pythonu — nemusíte si pamatovat.

$$x[i:j] = [x[i], x[i+1], \dots, x[j-1]]$$

Příklad:

```
a=[6,7,5,2,9]  
print(a[2:4])
```

Řezy pole

(array slicing)

Specialita Pythonu — nemusíte si pamatovat.

$$x[i:j] = [x[i], x[i+1], \dots, x[j-1]]$$

Příklad:

```
a=[6,7,5,2,9]
```

```
print(a[2:4])
```

```
[5, 2]
```

Řezy pole (2)

(vynechané argumenty)

```
x[i:] = x[i:len(x)]  
x[:j] = x[0:j]  
x[:] = x[0:len(x)] = x
```

```
a = [6, 7, 5, 2, 9]  
print(a[:3])
```

Řezy pole (2)

(vynechané argumenty)

```
x[i:] = x[i:len(x)]  
x[:j] = x[0:j]  
x[:] = x[0:len(x)] = x
```

```
a = [6, 7, 5, 2, 9]
```

```
print(a[:3])
```

```
[6, 7, 5]
```

Řezy pole (2)

(vynechané argumenty)

```
x[i:] = x[i:len(x)]  
x[:j] = x[0:j]  
x[:] = x[0:len(x)] = x
```

```
a = [6, 7, 5, 2, 9]
```

```
print(a[:3])
```

```
[6, 7, 5]
```

```
print(a[-2:])
```

Řezy pole (2)

(vynechané argumenty)

```
x[i:] = x[i:len(x)]  
x[:j] = x[0:j]  
x[:] = x[0:len(x)] = x
```

```
a = [6, 7, 5, 2, 9]
```

```
print(a[:3])
```

```
[6, 7, 5]
```

```
print(a[-2:])
```

```
[2, 9]
```

Řezy pole (2)

(vynechané argumenty)

```
x[i:]=x[i:len(x)]  
x[:j]=x[0:j]  
x[:]=x[0:len(x)]=x
```

```
a=[6,7,5,2,9]  
print(a[:3])
```

```
[6, 7, 5]
```

```
print(a[-2:])
```

```
[2, 9]
```

```
s="Rakousko"  
print(s[3:])
```

```
ousko
```


Příklad: Jména dnů v týdnu

Úkol: převed'te $i \in \{0, \dots, 6\}$ na jméno dne.

```
def jmeno_dne(i):  
    if i==0:  
        return "pondělí"  
    elif i==1:  
        return "úterý"  
    elif i==2:  
        return "středa"  
    elif i==3:  
        return "čtvrtek"  
    elif i==4:  
        return "pátek"  
    elif i==5:  
        return "sobota"  
    elif i==6:  
        return "neděle"  
    else:  
        return "???"
```

Příklad: Jména dnů v týdnu (2)

```
print(jmeno_dne(3))
```

čtvrtek

Příklad: Jména dnů v týdnu (3)

Řešení pomocí pole

```
jmena_dni=["pondělí","úterý","středa","čtvrtek",  
           "pátek","sobota","neděle"]
```

```
print(jmena_dni[3])
```

Příklad: Jména dnů v týdnu (3)

Řešení pomocí pole

```
jmena_dni=["pondělí","úterý","středa","čtvrtek",  
           "pátek","sobota","neděle"]
```

```
print(jmena_dni[3])
```

čtvrtek

Příklad: Jména dnů v týdnu (3)

Řešení pomocí pole

```
jmena_dni=["pondělí","úterý","středa","čtvrtek",  
           "pátek","sobota","neděle"]
```

```
print(jmena_dni[3])
```

čtvrtek

```
def jmeno_dne(i):  
    return jmena_dni[i]
```

```
print(jmeno_dne(3))
```

Příklad: Jména dnů v týdnu (3)

Řešení pomocí pole

```
jmena_dni=["pondělí","úterý","středa","čtvrtek",  
           "pátek","sobota","neděle"]
```

```
print(jmena_dni[3])
```

čtvrtek

```
def jmeno_dne(i):  
    return jmena_dni[i]
```

```
print(jmeno_dne(3))
```

čtvrtek

Příklad: Jména dnů v týdnu (3)

Řešení pomocí pole

```
jmena_dni=["pondělí","úterý","středa","čtvrtek",  
           "pátek","sobota","neděle"]
```

```
print(jmena_dni[3])
```

čtvrtek

```
def jmeno_dne(i):  
    return jmena_dni[i]
```

```
print(jmeno_dne(3))
```

čtvrtek




Uzávorkovaný výraz lze rozdělit na více řádek.

Příklad: průměr a směrodatná odchylka

Odhad ze vzorků

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2}$$

```
def mean(v):  
    "Calculate a mean of a vector"  
    s=0.  
    for i in range(len(v)):  
        s+=v[i]  
    return(s/len(v))
```

 Řetězec za hlavičkou funkce slouží k dokumentaci. Lze ho zobrazit příkazem `help(mean)`.

Příklad: průměr a směrodatná odchylka (2)

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2}$$

```
import math
```

```
def stdev(v):
```

```
    "Calculate a corrected sample standard deviation"
```

```
    m=mean(v)
```

```
    s=0.
```

```
    for i in range(len(v)):
```

```
        s+=(v[i]-m)**2
```

```
    return math.sqrt(s/(len(v)-1))
```

Příklad: průměr a směrodatná odchylka (3)

Vypočítáme μ , σ pro $x_1 = 0, \dots, x_{1001} = 1000$

```
a=list(range(1001))
```

```
print("mean=",mean(a)," sigma=",stdev(a))
```

```
mean= 500.0  sigma= 289.10811126635656
```

Pro spojitou uniformní distribuci $[0, 1000]$ je

$$\mu = 500 \text{ a } \sigma = \frac{1000}{\sqrt{12}} \approx 288.67.$$

Pole jako argument cyklu

Průměr podruhé

Místo

```
def mean(v):  
    "Calculate a mean of a vector"  
    s=0.  
    for i in range(len(v)):  
        s+=v[i]  
    return(s/len(v))
```

Můžeme psát

```
def mean(v):  
    "Calculate a mean of a vector"  
    s=0.  
    for x in v:  
        s+=x  
    return(s/len(v))
```



Argumentem cyklu `for` je *sekvence*, například pole.

Pole jako argument cyklu (2)

Výsledek je stejný

```
def mean(v):  
    "Calculate a mean of a vector"  
    s=0.  
    for x in v:  
        s+=x  
    return(s/len(v))
```

```
a=list(range(1001))  
print("mean=",mean(a))
```

```
mean= 500.0
```

Použití funkcí pole

Průměr potřetí

Místo:

```
def mean(v):  
    s=0.  
    for x in v:  
        s+=x  
    return(s/len(v))
```

Můžeme psát

```
def mean(v):  
    "Calculate a mean of a vector"  
    return(sum(v)/len(v))
```



Pokud můžete, používejte existující funkce.

Použití funkcí pole (2)

Směrodatná odchylka podruhé

Místo:

```
def stdev(v):  
    "Calculate a corrected sample standard deviation"  
    m=mean(v)  
    s=0.  
    for i in range(len(v)):  
        s+=(v[i]-m)**2  
    return math.sqrt(s/(len(v)-1))
```

Můžeme psát

```
def stdev(v):  
    "Calculate a corrected sample standard deviation"  
    m=mean(v)  
    s=sum([(x-m)**2 for x in v])  
    return math.sqrt(s/(len(v)-1))
```

Použití funkcí pole (2)

```
def stdev(v):  
    "Calculate a corrected sample standard deviation"  
    m=mean(v)  
    s=sum([(x-m)**2 for x in v])  
    return math.sqrt(s/(len(v)-1))
```

lze dále zkrátit

```
def stdev(v):  
    return math.sqrt(sum([(x-mean(v))**2 for x in v])/  
                      (len(v)-1))
```

Použití funkcí pole (2)

```
def stdev(v):  
    "Calculate a corrected sample standard deviation"  
    m=mean(v)  
    s=sum([(x-m)**2 for x in v])  
    return math.sqrt(s/(len(v)-1))
```

lze dále zkrátit

```
def stdev(v):  
    return math.sqrt(sum([(x-mean(v))**2 for x in v])/  
                      (len(v)-1))
```

Výsledek se nezměnil

```
print("mean=",mean(a)," sigma=",stdev(a))  
mean= 500.0  sigma= 289.10811126635656
```



Zkracování může zhoršit srozumitelnost kódu.

Příklad: Náhodná permutace

Vytvořte náhodnou permutace čísel $0, 1, \dots, N - 1$

Příklad: Náhodná permutace

Vytvořte náhodnou permutaci čísel $0, 1, \dots, N - 1$

Myšlenka

- ▶ Uložíme do pole počáteční permutaci $0, 1, \dots, N - 1$
- ▶ Budeme *vyměňovat* vždy dva prvky
- ▶ Aktuální prvek $i = 0, \dots, N - 2$ vyměníme s náhodně vybraným prvkem na pozici $j = i, i + 1, \dots, N - 1$

Příklad: Náhodná permutace (2)

```
import random

def permutation(n):
    "Create a random permutation of integers 0..n-1"
    p=list(range(n))
    for i in range(n-1):
        r=random.randrange(i,n)
        temp=p[r]
        p[r]=p[i]
        p[i]=temp
    return(p)
```

Příklad: Náhodná permutace (3)

Vyzkoušíme:

```
print(permutation(10))  
[0, 2, 5, 8, 7, 4, 6, 9, 3, 1]  
print(permutation(10))  
[2, 1, 4, 3, 7, 9, 5, 8, 6, 0]  
print(permutation(10))  
[9, 5, 0, 2, 4, 1, 3, 6, 8, 7]
```

Kontrolní tisky

Jak to vlastně funguje

```
def permutation(n):  
    "Create a random permutation of integers 0..n-1"  
    p=list(range(n))  
    print("p=",p)  
    for i in range(n-1):  
        r=random.randrange(i,n)  
        temp=p[r]  
        p[r]=p[i]  
        p[i]=temp  
        print("i=%d r=%d p=%s" % (i,r,str(p)))  
    return(p)
```

```
permutation(5)
```

Kontrolní tisky (2)

p= [0, 1, 2, 3, 4]

i=0 r=0 p=[0, 1, 2, 3, 4]

i=1 r=2 p=[0, 2, 1, 3, 4]

i=2 r=2 p=[0, 2, 1, 3, 4]

i=3 r=3 p=[0, 2, 1, 3, 4]

👉 Toto je velmi obecná a užitečná technika ověření funkčnosti programů.

Permutace pole

Vytiskneme prvky pole v náhodném pořadí:

```
barvy=["srdce","listy","kule","žaludy"]
```

```
p=permutation(len(barvy))
```

```
for i in range(len(barvy)):
```

```
    print(barvy[p[i]])
```

Permutace pole

Vytiskneme prvky pole v náhodném pořadí:

```
barvy=["srdce","listy","kule","žaludy"]  
p=permutation(len(barvy))
```

```
for i in range(len(barvy)):  
    print(barvy[p[i]])
```

žaludy

kule

listy

srdce

Permutace pole

Vytiskneme prvky pole v náhodném pořadí:

```
barvy=["srdce","listy","kule","žaludy"]  
p=permutation(len(barvy))
```

```
for i in range(len(barvy)):  
    print(barvy[p[i]])
```

žaludy

kule

listy

srdce

Pole v novém pořadí:

```
print([ barvy[i] for i in p])
```

```
['žaludy', 'kule', 'listy', 'srdce']
```

Příklad: Házení dvěma kostkami

Jaká je pravděpodobnost, že padne součet s ?

Příklad: Házení dvěma kostkami

Jaká je pravděpodobnost, že padne součet s ?

$$P(s) = \frac{\text{počet příznivých}}{\text{počet celkem}} = \frac{6 - |s - 7|}{6^2}$$

s	počet možností	$P(s)$
2	1	0.028
3	2	0.056
4	3	0.083
5	4	0.111
6	5	0.139
7	6	0.167
8	5	0.139
9	4	0.111
10	3	0.083
11	2	0.056
12	1	0.028

Simulace házení dvěma kostkami

```
import random

h=[0]*13 # četnost výskytu součtu h[s]
n=100000

# Simulace n dvojic hodů
for i in range(n):
    x=random.randrange(1,7)
    y=random.randrange(1,7)
    s=x+y
    h[s]+=1
```

Soubor dve_kostky.py

Simulace házení dvěma kostkami (2)

```
# Tisk výsledných pravděpodobností
for s in range(2,13):
    anal=(6-abs(s-7))/36
    simul=h[s]/n
    print("s=%2d  P(s)=analyticky %0.3f      "
          "simulace %0.3f      chyba %6.3f" %
          (s,anal,simul,anal-simul))
```

Soubor dve_kostky.py

Simulace házení dvěma kostkami (2)

```
Terminal> python3 dve_kostky.py
```

```
s= 2 P(s)=analyticky 0.028 simulace 0.027 chyba 0.001
s= 3 P(s)=analyticky 0.056 simulace 0.056 chyba -0.000
s= 4 P(s)=analyticky 0.083 simulace 0.083 chyba 0.000
s= 5 P(s)=analyticky 0.111 simulace 0.111 chyba 0.000
s= 6 P(s)=analyticky 0.139 simulace 0.138 chyba 0.001
s= 7 P(s)=analyticky 0.167 simulace 0.165 chyba 0.001
s= 8 P(s)=analyticky 0.139 simulace 0.139 chyba -0.000
s= 9 P(s)=analyticky 0.111 simulace 0.113 chyba -0.002
s=10 P(s)=analyticky 0.083 simulace 0.084 chyba -0.001
s=11 P(s)=analyticky 0.056 simulace 0.056 chyba -0.000
s=12 P(s)=analyticky 0.028 simulace 0.027 chyba 0.001
```

Pole

Hodnoty a reference

Další příklady

Hodnotová semantika

(value semantics)

- ▶ U objektu je důležitá hodnota, nikoliv identita. Proměnná reprezentuje hodnotu.
- ▶ Primitivní typy v Pythonu se chovají jako hodnoty (*values*)
- ▶ Přiřazení vytvoří nový objekt.

```
a=7
```

```
b=a
```

```
a=6
```

```
print(a)
```


Hodnotová semantika

(value semantics)

- ▶ U objektu je důležitá hodnota, nikoliv identita. Proměnná reprezentuje hodnotu.
- ▶ Primitivní typy v Pythonu se chovají jako hodnoty (*values*)
- ▶ Přiřazení vytvoří nový objekt.

```
a=7
```

```
b=a
```

```
a=6
```

```
print(a)
```

```
6
```

Hodnotová semantika

(value semantics)

- ▶ U objektu je důležitá hodnota, nikoliv identita. Proměnná reprezentuje hodnotu.
- ▶ Primitivní typy v Pythonu se chovají jako hodnoty (*values*)
- ▶ Přřazení vytvoří nový objekt.

```
a=7
```

```
b=a
```

```
a=6
```

```
print(a)
```

```
6
```

```
print(b)
```

Hodnotová semantika

(value semantics)

- ▶ U objektu je důležitá hodnota, nikoliv identita. Proměnná reprezentuje hodnotu.
- ▶ Primitivní typy v Pythonu se chovají jako hodnoty (*values*)
- ▶ Přřazení vytvoří nový objekt.

```
a=7
```

```
b=a
```

```
a=6
```

```
print(a)
```

```
6
```

```
print(b)
```

```
7
```

Referenční semantika

(reference semantics)

- ▶ Proměnná typu pole je referencí/odkazem (*reference, link*)
- ▶ Přiřazení vytvoří nový *odkaz* na existující objekt.

```
a=[7,3]
```

```
b=a
```

```
a[1]=6
```

```
print(a)
```

Referenční semantika

(reference semantics)

- ▶ Proměnná typu pole je referencí/odkazem (*reference, link*)
- ▶ Přiřazení vytvoří nový *odkaz* na existující objekt.

```
a=[7,3]
```

```
b=a
```

```
a[1]=6
```

```
print(a)
```

```
[7, 6]
```

Referenční semantika

(reference semantics)

- ▶ Proměnná typu pole je referencí/odkazem (*reference, link*)
- ▶ Přiřazení vytvoří nový *odkaz* na existující objekt.

```
a=[7,3]
```

```
b=a
```

```
a[1]=6
```

```
print(a)
```

```
[7, 6]
```

```
print(b)
```

Referenční semantika

(reference semantics)

- ▶ Proměnná typu pole je referencí/odkazem (*reference, link*)
- ▶ Přiřazení vytvoří nový odkaz na existující objekt.

```
a=[7, 3]
```

```
b=a
```

```
a[1]=6
```

```
print(a)
```

```
[7, 6]
```

```
print(b)
```

```
[7, 6]
```

- ▶ Pole lze měnit (*mutable*)
- ▶ Sdílení odkazů (*sharing, aliasing*)

Neměnnost

(immutability)

- ▶ Vlastnost datového typu.
- ▶ Neměnné objekty po vytvoření změnit nelze — řetězce, *n*-tice

```
>>> s="Ahoj"
```

```
>>> s[0]="a"
```


Neměnnost

(immutability)

- ▶ Vlastnost datového typu.
- ▶ Neměnné objekty po vytvoření změnit nelze — řetězce, *n*-tice

```
>>> s="Ahoj"
```

```
>>> s[0]="a"
```

- ▶ Neměnné typy (řetězce, *n*-tice) se také chovají jako hodnoty

```
a="raz"
```

```
b=a
```

```
a="dva"
```

```
print(a)
```

```
dva
```

Neměnnost

(immutability)

- ▶ Vlastnost datového typu.
- ▶ Neměnné objekty po vytvoření změnit nelze — řetězce, *n*-tice

```
>>> s="Ahoj"
```

```
>>> s[0]="a"
```

- ▶ Neměnné typy (řetězce, *n*-tice) se také chovají jako hodnoty

```
a="raz"
```

```
b=a
```

```
a="dva"
```

```
print(a)
```

```
dva
```

```
print(b)
```

Neměnnost

(immutability)

- ▶ Vlastnost datového typu.
- ▶ Neměnné objekty po vytvoření změnit nelze — řetězce, *n*-tice

```
>>> s="Ahoj"  
>>> s[0]="a"
```

- ▶ Neměnné typy (řetězce, *n*-tice) se také chovají jako hodnoty

```
a="raz"  
b=a  
a="dva"  
print(a)  
dva  
  
print(b)  
raz
```

Neměnnost

(immutability)

- ▶ Vlastnost datového typu.
- ▶ Neměnné objekty po vytvoření změnit nelze — řetězce, *n*-tice

```
>>> s="Ahoj"  
>>> s[0]="a"
```

- ▶ Neměnné typy (řetězce, *n*-tice) se také chovají jako hodnoty

```
a="raz"  
b=a  
a="dva"  
print(a)  
dva  
  
print(b)  
raz
```



Proměnné v Pythonu nejsou hodnoty, ale *odkazy* (*references*).

Práce s neměnnými objekty

Jak lze s neměnnými objekty pracovat?

Práce s neměnnými objekty

Jak lze s neměnnými objekty pracovat?
Vytvoříme objekt nový, nezávislý na starém.

```
>>> s="Ahoj"  
>>> r="a"+s[1:]  
>>> r  
'ahoj'  
>>> s  
'Ahoj'
```

Vedlejší efekty funkcí

Funkce může změnit své změnitelné (*mutable*) parametry

```
def add_one(x):  
    for i in range(len(x)):  
        x[i] += 1
```

```
v=[1,2,3]  
add_one(v)  
print(v)
```

Vedlejší efekty funkcí

Funkce může změnit své změnitelné (*mutable*) parametry

```
def add_one(x):  
    for i in range(len(x)):  
        x[i] += 1
```

```
v=[1,2,3]  
add_one(v)  
print(v)
```

```
[2, 3, 4]
```


Vedlejší efekty funkcí

Funkce může změnit své změnitelné (*mutable*) parametry

```
def add_one(x):  
    for i in range(len(x)):  
        x[i] += 1
```

```
v=[1,2,3]  
add_one(v)  
print(v)
```

```
[2, 3, 4]
```

Funkce není čistá (*impure*).



Vedlejšími efektům se pokud možno vyhněte.

Nahrazení vedlejších efektů

```
def add_one_clean(x):  
    return [ x[i]+1 for i in range(len(x))]
```

```
v=[1,2,3]  
v=add_one_clean(v)  
print(v)
```

```
[2, 3, 4]
```

Kopírování polí

- ▶ Přřazení proměnné typu pole vytvoří nový odkaz na stejné pole

```
a=[7,3]
```

```
b=a
```

```
a[1]=6
```

```
print("a=",a, "b=",b)
```

```
a= [7, 6] b= [7, 6]
```

Kopírování polí

- ▶ Přřazení proměnné typu pole vytvoří nový odkaz na stejné pole

```
a=[7,3]
```

```
b=a
```

```
a[1]=6
```

```
print("a=", a, "b=", b)
```

```
a= [7, 6] b= [7, 6]
```

- ▶ Kopírováním se vytvoří nový objekt se stejným obsahem

```
a=[7,3]
```

```
b=a.copy()
```

```
a[1]=6
```

```
print("a=", a, "b=", b)
```

```
a= [7, 6] b= [7, 3]
```



Lze psát též `b=a[:]`

Kopírování polí

- ▶ Přřazení proměnné typu pole vytvoří nový odkaz na stejné pole

```
a=[7,3]
```

```
b=a
```

```
a[1]=6
```

```
print("a=", a, "b=", b)
```

```
a= [7, 6] b= [7, 6]
```

- ▶ Kopírováním se vytvoří nový objekt se stejným obsahem

```
a=[7,3]
```

```
b=a.copy()
```

```
a[1]=6
```

```
print("a=", a, "b=", b)
```

```
a= [7, 6] b= [7, 3]
```



Lze psát též `b=a[:]`



Kopírování je mělké (*shallow*), jen jedna úroveň.

Výhody

- ▶ Vyloučení vedlejších efektů
- ▶ Méně chyb
 - ▶ Kdy kopírovat, co lze přepsat
 - ▶ Vzdálený kód mění proměnné
- ▶ Snazší optimalizace
- ▶ Snazší paralelizace

Výhody

- ▶ Vyloučení vedlejších efektů
- ▶ Méně chyb
 - ▶ Kdy kopírovat, co lze přepsat
 - ▶ Vzdálený kód mění proměnné
- ▶ Snazší optimalizace
- ▶ Snazší paralelizace

Nevýhody

- ▶ Trochu menší expresivita.
- ▶ Objektů vzniká velké množství, alokace/dealokace paměti.
- ▶ Nutnost kopírování.
- ▶ Paměťová a výpočetní náročnost.

Výhody

- ▶ Vyloučení vedlejších efektů
- ▶ Méně chyb
 - ▶ Kdy kopírovat, co lze přepsat
 - ▶ Vzdálený kód mění proměnné
- ▶ Snazší optimalizace
- ▶ Snazší paralelizace

Nevýhody

- ▶ Trochu menší expresivita.
- ▶ Objektů vzniká velké množství, alokace/dealokace paměti.
- ▶ Nutnost kopírování.
- ▶ Paměťová a výpočetní náročnost.



Existují techniky jak kopírování omezit.

Pole

Hodnoty a reference

Další příklady

Příklad: Problém sběratele

Coupon collector

Kolikrát musíme náhodně s opakováním vybrat z množiny N prvků, než vybereme každý prvek alespoň jednou?

Příklad: Problém sběratele

Coupon collector

Kolikrát musíme náhodně s opakováním vybrat z množiny N prvků, než vybereme každý prvek alespoň jednou?

Matematická analýza

$$\begin{aligned}\text{počet výběrů} = T(N) &= \lceil N H_N \rceil \approx N(\log N + 0.577) + 0.5 \\ T(50) &= 225\end{aligned}$$

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# Simulace problému sběratele,
import random
import sys

n=int(sys.argv[1])      # počet různých prvků
collectedCount=0      # počet již vybraných různých prvků
isCollected=[False]*n # již jsme viděli tento prvek
count=0                # kolik prvků jsme již vybrali

while collectedCount < n:
    r=random.randrange(n) # náhodný prvek 0..n-1
    count+=1
    if not isCollected[r]: # nový prvek
        collectedCount+=1
        isCollected[r]=True

print("Pro n=%d byla potřeba %d výběrů." % (n,count))
```

```
Terminal> python3 coupon_collector.py 50
```

Pro n=50 bylo potřeba 184 výběrů.

```
Terminal> python3 coupon_collector.py 50
```

Pro n=50 bylo potřeba 228 výběrů.

```
Terminal> python3 coupon_collector.py 50
```

Pro n=50 bylo potřeba 243 výběrů.

```
Terminal> python3 coupon_collector.py 50
```

Pro n=50 bylo potřeba 239 výběrů.

Prvočísla

prvocislo3.py

```
# prvocislo3.py - Vypíše prvočísla menší než zadaný limit
import sys
m=int(sys.argv[1])
for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
    p=2 # začátek testu
    while p*p<=n:
        if n % p == 0:
            break
        p+=1
    if p*p > n: # n je prvočíslo
        print(n,end=" ")
print() # závěrečný konec řádky
```

```
Terminal> python3 prvocislo3.py 1000
```

```
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,  
47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,  
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139,  
149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191,  
193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239,  
241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283,  
293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349,  
353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401,  
409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457,  
461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509,  
521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577,  
587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631,  
641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683,  
691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751,  
757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821,  
823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877,  
881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941,  
947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997,
```

Eratosthenovo síto

eratosthenes.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-  
# eratosthenes3.py - Vypíše prvočísla menší než zadaný limit  
  
import sys  
n=int(sys.argv[1])  
  
p=[True]*n # p[i] = je 'i' prvočíslo?  
  
for i in range(2,n):  
    if p[i]: # je to prvočíslo  
        print(i,end=" ", "  
            j=2*i # označ j=2i,3i,... < n  
            while j<n:  
                p[j]=False  
                j=j+i  
  
print() # závěrečný konec řádky
```



```
Terminal> python3 eratosthenes.py 1000
```

```
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,  
47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,  
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139,  
149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191,  
193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239,  
241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283,  
293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349,  
353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401,  
409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457,  
461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509,  
521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577,  
587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631,  
641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683,  
691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751,  
757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821,  
823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877,  
881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941,  
947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997,
```

Porovnání rychlosti

```
time -p python3 prvocislo3.py 10000 >/dev/null
time -p python3 erathostenes.py 10000 >/dev/null
```

N	čas [s]	
	prvocislo3	Eratosthenes
10^3	0.05	0.05
10^4	0.15	0.06
10^5	2.11	0.24
10^6	53.11	2.19

Dvourozměrné matice

pole polí

```
a=[[1,0,2,3],[0,2,3,1],[3,0,2,5]]
```

```
print(a)
```

```
[[1, 0, 2, 3], [0, 2, 3, 1], [3, 0, 2, 5]]
```

Dvourozměrné matice

pole polí

```
a=[[1,0,2,3],[0,2,3,1],[3,0,2,5]]
```

```
print(a)
```

```
[[1, 0, 2, 3], [0, 2, 3, 1], [3, 0, 2, 5]]
```

```
print(len(a))
```

Dvourozměrné matice

pole polí

```
a=[[1,0,2,3],[0,2,3,1],[3,0,2,5]]
```

```
print(a)
```

```
[[1, 0, 2, 3], [0, 2, 3, 1], [3, 0, 2, 5]]
```

```
print(len(a))
```

```
3
```

Dvourozměrné matice

pole polí

```
a=[[1,0,2,3],[0,2,3,1],[3,0,2,5]]
```

```
print(a)
```

```
[[1, 0, 2, 3], [0, 2, 3, 1], [3, 0, 2, 5]]
```

```
print(len(a))
```

```
3
```

```
print(a[1])
```

Dvourozměrné matice

pole polí

```
a=[[1,0,2,3],[0,2,3,1],[3,0,2,5]]
```

```
print(a)
```

```
[[1, 0, 2, 3], [0, 2, 3, 1], [3, 0, 2, 5]]
```

```
print(len(a))
```

```
3
```

```
print(a[1])
```

```
[0, 2, 3, 1]
```

Dvourozměrné matice

pole polí

```
a=[[1,0,2,3],[0,2,3,1],[3,0,2,5]]
```

```
print(a)
```

```
[[1, 0, 2, 3], [0, 2, 3, 1], [3, 0, 2, 5]]
```

```
print(len(a))
```

```
3
```

```
print(a[1])
```

```
[0, 2, 3, 1]
```

```
print(a[1][2])
```


Dvourozměrné matice

pole polí

```
a=[[1,0,2,3],[0,2,3,1],[3,0,2,5]]
```

```
print(a)
```

```
[[1, 0, 2, 3], [0, 2, 3, 1], [3, 0, 2, 5]]
```

```
print(len(a))
```

```
3
```

```
print(a[1])
```

```
[0, 2, 3, 1]
```

```
print(a[1][2])
```

```
3
```

Tisk matice

```
def print_2d_matrix(a):  
    for i in range(len(a)):  
        print(a[i])
```

```
print_2d_matrix(a)
```

```
[1, 0, 2, 3]
```

```
[0, 2, 3, 1]
```

```
[3, 0, 2, 5]
```

Vytvoření dvourozměrné matice

```
a=[[0.]*4]*2  
print_2d_matrix(a)  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

Vytvoření dvourozměrné matice

```
a=[[0.]*4]*2  
print_2d_matrix(a)  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

```
a[0][1]=1.0  
print_2d_matrix(a)
```

Vytvoření dvourozměrné matice

```
a=[[0.]*4]*2  
print_2d_matrix(a)  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

```
a[0][1]=1.0  
print_2d_matrix(a)  
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]  
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]
```

Vytvoření dvourozměrné matice

```
a=[[0.]*4]*2
print_2d_matrix(a)
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

```
a[0][1]=1.0
print_2d_matrix(a)
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]
```

Nefunguje jak chceme, kvůli aliasingu.

Vytvoření dvourozměrné matice (2)

```
def create_2d_matrix(n,m,v):  
    "Creates a n-by-m matrix with initial value 'v'"  
    a=[]  
    for i in range(n):  
        a+=[ [v]*m ]  
    return a
```

Vytvoření dvourozměrné matice (2)

```
def create_2d_matrix(n,m,v):  
    "Creates a n-by-m matrix with initial value 'v'"  
    a=[]  
    for i in range(n):  
        a+=[ [v]*m ]  
    return a
```

```
a=create_2d_matrix(2,4,0.0)  
a[0][1]=1.0  
print_2d_matrix(a)  
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```


Vytvoření dvourozměrné matice (2)

```
def create_2d_matrix(n,m,v):  
    "Creates a n-by-m matrix with initial value 'v'"  
    a=[]  
    for i in range(n):  
        a+=[ [v]*m ]  
    return a
```

```
a=create_2d_matrix(2,4,0.0)  
a[0][1]=1.0  
print_2d_matrix(a)  
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]  
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```



Toto je specialita Pythonu

Vytvoření dvourozměrné matice (3)

(array/list comprehension)

```
def create_2d_matrix(n,m,v):  
    "Creates a n-by-m matrix with initial value 'v'"  
    return [ [v]*m for i in range(n) ]
```

Vytvoření dvourozměrné matice (3)

(array/list comprehension)

```
def create_2d_matrix(n,m,v):  
    "Creates a n-by-m matrix with initial value 'v'"  
    return [ [v]*m for i in range(n) ]
```

```
a=create_2d_matrix(2,4,0.0)
```

```
a[0][1]=1.0
```

```
print_2d_matrix(a)
```

```
[0.0, 1.0, 0.0, 0.0]
```

```
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

Binomický koeficient

(kombinační číslo)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{for } n \geq k \geq 0$$

- ▶ počet k prvkových podmnožin z n

$$\binom{3}{1} = 3, \quad \binom{4}{2} = 6$$

Binomický koeficient

(kombinační číslo)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{for } n \geq k \geq 0$$

- ▶ počet k prvkových podmnožin z n

$$\binom{3}{1} = 3, \quad \binom{4}{2} = 6$$

- ▶ koeficient v binomické větě

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Pascalův trojúhelník

Pascal's triangle

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$n = 0$	1				
$n = 1$	1	1			
$n = 2$	1	2	1		
$n = 3$	1	3	3	1	
$n = 4$	1	4	6	4	1

Platí rekurze

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascalův trojúhelník v Pythonu

Vypočítejte pole p , tak aby $p[n][k] = \binom{n}{k}$

```
def pascal_triangle(N):  
    p=[[1]]  
    for n in range(2,N+1):  
        prev=p[n-2] # předchozí řada  
        p+=[[1] +  
            [ prev[k-1] + prev[k] for k in range(1,n-1) ]  
            + [1]]  
    return p
```

```
print_2d_matrix(pascal_triangle(5))
```

```
[1]
```

```
[1, 1]
```

```
[1, 2, 1]
```

```
[1, 3, 3, 1]
```

```
[1, 4, 6, 4, 1]
```



Řádky pole nemusí mít stejnou délku.

- ▶ Pole
 - ▶ často používaná datová struktura
 - ▶ obsahuje n prvků (nejčastěji stejného typu)
 - ▶ k prvkům přistupujeme pomocí celočíselného indexu
 - ▶ prvky pole mohou být i složené datové typy
- ▶ Proměnné jsou reference, aliasing
- ▶ Neměnné (immutable) typy, hodnotová semantika
- ▶ Příklady použití polí