

# Prioritní fronta a příklad použití v úloze hledání nejkratších cest

Jan Faigl

Katedra počítačů  
Fakulta elektrotechnická  
České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 12

BOB36PRP – Procedurální programování

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 1 / 50

Prioritní fronta polem

Halda

## Prioritní fronta polem – rozhraní

- V případě implementace prioritní fronty polem můžeme využít jedno pole pro hodnoty a druhé pole pro uložení priority daného prvku

*Implementace vychází z `lec11/queue_array.h`.*

```
typedef struct {  
    void **queue; // Pole ukazatelů na jednotlivé prvky  
    int *priorities; // Pole hodnot priorit jednotlivých prvků  
    int count;  
    int head;  
    int tail;  
} queue_t;
```

- Další rozhraní (jména a argumenty funkcí) mohou zůstat identické jako u implementace spojovým seznamem

*Viz předchozí přednáška*

```
void queue_init(queue_t **queue); int queue_push(void *value, int priority,  
void queue_delete(queue_t **queue); queue_t *queue);  
void queue_free(queue_t *queue); void* queue_pop(queue_t *queue);  
void* queue_peek(const queue_t *queue);  
  
_Bool queue_is_empty(const queue_t *queue);
```

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 5 / 50

Prioritní fronta polem

Halda

## Prioritní fronta polem 2/3 – peek() a pop()

- Funkce `peek()` využívá lokální (static) funkce `getEntry()`

```
void* queue_peek(const queue_t *queue)  
{  
    return queue_is_empty(queue) ? NULL : queue->queue[getEntry(queue)];  
}
```

- Ve funkci `pop()` musíme zajistit zaplnění místa, pokud je vyjmut prvek z prostředka fronty (pole).

```
void* queue_pop(queue_t *queue) Případnou mezeru zaplníme prvkem ze startu  
{  
    void *ret = NULL;  
    int bestEntry = getEntry(queue);  
    if (bestEntry >= 0) { // entry has been found  
        ret = queue->queue[bestEntry];  
        if (bestEntry != queue->head) { //replace the bestEntry by head  
            queue->queue[bestEntry] = queue->queue[queue->head];  
            queue->priorities[bestEntry] = queue->priorities[queue->head];  
        }  
        queue->head = (queue->head + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;  
        queue->count -= 1;  
    }  
    return ret;  
}
```

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 8 / 50

## Přehled témat

- Část 1 – Prioritní fronta polem a haldou  
Prioritní fronta polem  
Halda
- Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu  
Popis úlohy  
Návrh řešení  
Příklad naivní implementace prioritní fronty polem  
Implementace pq haldou s `push()` a `update()`
- Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 2 / 50

Prioritní fronta polem

Halda

## Prioritní fronta polem 1/3 – push()

- Funkce `push()` je až na uložení priority identická s verzí bez priorit

```
int queue_push(void *value, int priority, queue_t *queue)  
{  
    int ret = QUEUE_OK; // by default we assume push will be OK  
    if (queue->count < MAX_QUEUE_SIZE) {  
        queue->queue[queue->tail] = value;  
  
        // store priority of the new value entry  
        queue->priorities[queue->tail] = priority;  
  
        queue->tail = (queue->tail + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;  
        queue->count += 1;  
    } else {  
        ret = QUEUE_MEMFAIL;  
    }  
    return ret;  
}
```

- Funkce `peek()` a `pop()` potřebují prvek s nejnižší (nejvyšší) prioritou
  - Nalezení prvku z „čela“ fronty realizujeme funkcí `getEntry()`, kterou následně využijeme jak v `peek()`, tak v `pop()`

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 6 / 50

Prioritní fronta polem

Halda

## Prioritní fronta polem – příklad použití

- Použití je identické s implementací spojovým seznamem

```
make && ./demo-priority_queue_array  
ccache clang -c priority_queue_array.c -O2 -o priority_queue-  
array.o  
ccache clang priority_queue_array.o demo-priority_queue_array.o  
-o demo-priority_queue_array  
Add 0 entry '2nd' with priority '2' to the queue  
Add 1 entry '4th' with priority '4' to the queue  
Add 2 entry '1st' with priority '1' to the queue  
Add 3 entry '5th' with priority '5' to the queue  
Add 4 entry '3rd' with priority '3' to the queue  
  
Pop the entries from the queue  
1st  
2nd  
3rd  
4th  
5th  
  
lec12/priority_queue_array/priority_queue_array.h  
lec12/priority_queue_array/priority_queue_array.c  
lec12/priority_queue_array/demo-priority_queue_array.c
```

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 9 / 50

Prioritní fronta polem

Halda

## Část I

### Část 1 – Prioritní fronta (Halda)

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 3 / 50

Prioritní fronta polem

Halda

## Prioritní fronta polem 2/3 – getEntry()

- Nalezení nejmenšího (největšího) prvku provedeme lineárním prohledáním aktuálních prvků uložených ve frontě (poli)

```
static int getEntry(const queue_t *const queue)  
{  
    int ret = -1;  
    if (queue->count > 0) {  
        for (int cur = queue->head, i = 0; i < queue->count; ++i) {  
            if (  
                ret == -1 ||  
                (queue->priorities[ret] > queue->priorities[cur])  
            ) {  
                ret = cur;  
            }  
            cur = (cur + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;  
        }  
    }  
    return ret;  
}
```

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 7 / 50

Prioritní fronta polem

Halda

## Prioritní fronta spojovým seznamem nebo polem a výpočetní náročnost

- V naivní implementaci prioritní fronty jsme zohlednění priority „odložili“ až do doby, kdy potřebujeme odebrat prvek z fronty
- Při odebrání (nebo vrácení) nejmenšího prvku v nejneprávnějších případech musíme projít všechny položky
- Může být v případě mnoha prvků **výpočetně náročné** a raději bychom chtěli „udržovat“ prvek připravený
  - Můžeme to například udělat zavedením položky **head**, ve které bude aktuálně nejnižší (nejvyšší) vložený prvek do fronty
  - Prvek **head** aktualizujeme v metodě `push()` porovnáním hodnoty aktuálně vkládaného prvku
  - Tím zefektivníme operaci **peek()**
  - V případě odebrání prvku, však musíme frontu znovu projít a najít nový prvek

Alternativně můžeme použít sofistikovanější datovou strukturu, která nám umožní efektivně udržovat hodnotu nejmenšího prvku a to jak při operaci vložení `push()` tak při operaci vyjmutí `pop()` prvku z prioritní fronty.

Jan Faigl, 2017 BOB36PRP – Přednáška 12: Halda a hledání nejkratších cest 10 / 50

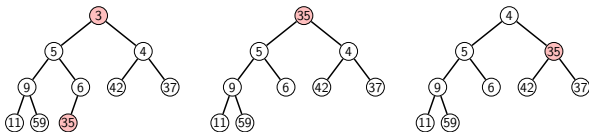
## Halda

- Halda je dynamická datová struktura, která má „tvar“ binárního stromu a uspořádání prioritní fronty
- Každý prvek haldy obsahuje hodnotu a dva potomky, podobně jako binární strom
- Vlastnosti haldy – „Heap property“**
  - Hodnota každého prvku je menší než hodnota libovolného potomka
  - Každá úroveň binárního stromu haldy je plná, kromě poslední úrovně, která je zaplněna zleva doprava **Binární plný strom**
  - Prvky mohou být odebrány pouze přes kořenový uzel
- Vlastnost haldy zajišťuje, že **kořen je vždy prvek s nejnižším/nejvyšším ohodnocením**

V případě binárního plného stromu je složitost procházení úměrná hloubce stromu, která je v případě  $n$  prvků úměrná  $\log_2(n)$ . Složitost operací `push()`, `pop()`, `peek()` tak můžeme očekávat nikoliv  $O(n)$  (jako v případě předchozí implementace prioritní fronty polem a spojovým seznamem), ale  $O(\log n)$ .

## Halda – odebrání prvku `pop()`

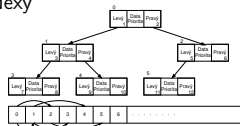
- Při operaci `pop()` odebereme kořen stromu
  - Prázdné místo nahradíme nejpravějším listem
  - Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s potomkem a postup opakujeme
- V nejnepříznivějším případě prvek „probublá“ až do listu stromu



- Jak zjistit nejpravější list
  - V případě implementace spojovou strukturou (nelineární) můžeme explicitně udržovat odkaz
  - Binární plný strom můžeme efektivně reprezentovat polem** – pak nejpravější list je poslední prvek v poli

## Halda jako binární plný strom reprezentovaný polem

- Pro definovaný maximální počet prvků v haldě, si předalokujeme pole o daném počtu prvků
- Binární **plný strom** má všechny vrcholy na úrovni rovné hloubce stromu co nejvíce vlevo
- Kořen stromu je první prvek s indexem 0, následníky prvku na pozici  $i$  lze v poli určit jako prvky s indexy
  - levý následník:  $i_{levy} = 2i + 1$
  - pravý následník:  $i_{pravy} = 2i + 2$



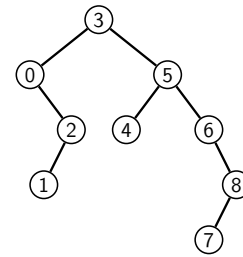
Podobně lze odvodit vztah pro předchůdce

- Kořen stromu reprezentuje nejprioritnější prvek (např. s nejmenší hodnotou nebo maximální prioritou)

## Binární vyhledávací strom vs halda

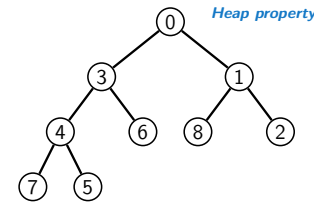
### Binární vyhledávací strom

- Může obsahovat prázdná místa
- Hloubka stromu se může měnit
  - Přestože jsme raději, pokud je strom vyvážený. To je však implementačně náročnější než implementace haldy.



### Halda

- Binární plný strom
  - Hloubka stromu vždy  $\lfloor \log_2(n) \rfloor$
- Kořen stromu je vždy prvek s nejnižší (nejvyšší) hodnotou
- Každý podstrom splňuje vlastnost haldy



## Prioritní fronta haldou

- Prvky ukládáme do haldy a při každém vložení / odebrání zajišťujeme, aby platily vlastnosti **haldy**
- Operace `peek()` má konstantní složitost a nezáleží na počtu prvků ve frontě, nejnižší prvek je vždy kořen
- Operace `push()` a `pop()` udržují vlastnost haldy záměnami prvku až do hloubky stromu

Asymptotická složitost v notaci velké  $O$  je  $O(1)$ .

Pro binární plný strom je hloubka stromu  $\log_2(n)$ , kde  $n$  je aktuální počet prvků ve stromu, odtud složitost operace  $O(\log(n))$ .

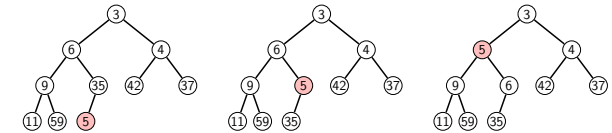
## Operace vkládání a odebírání prvků

- I v případě reprezentace polem pracují operace vkládání a odebírání identicky
  - Funkce `push()` přidá prvek jako další prvek v poli a následně propaguje prvek směrem nahoru až je splněna vlastnost haldy
  - Při odebrání prvku funkcí `pop()` je poslední prvek v poli umístěn na začátek pole (tj. kořen stromu) a propagován směrem dolů až je splněna vlastnost haldy
- Dochází pouze k vzájemnému zaměňování hodnot na pozicích v poli (haldě)
  - Z indexu prvku v poli vždy můžeme určit jak levého a pravého následníka, tak i předcházející prvek (rodič) v pohledu na haldu jako binární strom.
- Hlavní výhodou reprezentace polem je přístup do předem alokovaného bloku paměti
  - Všechny prvky můžeme jednoduše projít v jedné smyčce, například při výpisu
- Ověření zdali implementace operací `push()` a `pop()` zachovává podmínku haldy můžeme realizovat ověřující funkcí `is_heap()`

## Halda – přidání prvku `push()`

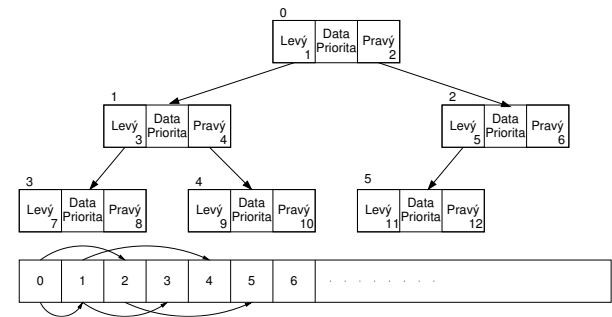
- Po každém provedení operace `push()` musí být splněny vlastnosti haldy
- Prvek přidáme na konec haldy, tj. na první volnou pozici (vlevo) na nejnižší úrovni haldy
- Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s nadřazeným prvkem (předkem)

V nejnepříznivějším případě prvek „probublá“ až do kořene stromu



## Reprezentace binárního stromu polem

- Binární plný strom můžeme reprezentovat lineární strukturou
- V případě známého maximálního počtu prvků v haldě, pak jednoduše předalokovaným polem položek



## Příklad implementace `pq_is_heap()`

- Pro každý prvek haldy musí platit, že jeho hodnota je menší než hodnota levého a pravého následníka
- ```

typedef struct {
    int size; // the maximal number of entries
    int len; // the current number of entries
    int *cost; // array with costs - lowest cost is highest priority
    int *label; // array with labels (each label has cost/priority)
} pq_heap_s;

_Bool pq_is_heap(pq_heap_s *pq, int n)
{
    _Bool ret = true;
    int l = 2 * n + 1; // left successor
    int r = l + 1; // right successor
    if (l < pq->len) {
        ret = (pq->cost[l] < pq->cost[n]) ? false : pq_is_heap(pq, l);
    }
    if (r < pq->len) {
        ret = ret // if ret is false, further test is not performed
        && (pq->cost[r] < pq->cost[n]) ? false : pq_is_heap(pq, r);
    }
    return ret;
}
    
```

## Příklad implementace push()

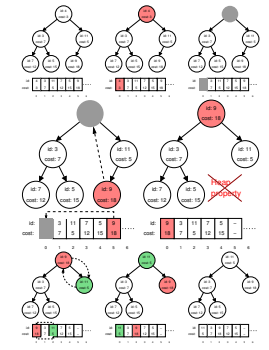
- Prvek přidáme na konec pole a iterativně kontrolujeme, zdali je splněna vlastnost haldy. Pokud ne, prvek zaměníme s předchůdcem.

```
#define GET_PARENT(i) ((i-1) >> 1) // parent is (i-1)/2
_Bool pq_push(pq_heap_s *pq, int label, int cost)
{
    _Bool ret = false;
    if (pq->len < pq->size && label >= 0 && label < pq->size) {
        pq->cost[pq->len] = cost; //add the cost to the next free slot
        pq->label[pq->len] = label; //add label of new entry

        int cur = pq->len; // index of the entry added to the heap
        int parent = GET_PARENT(cur);
        while (cur >= 1 && pq->cost[parent] > pq->cost[cur]) {
            pq_swap(pq, parent, cur); // swap parent<->cur
            cur = parent;
            parent = GET_PARENT(cur);
        }
        pq->len += 1;
        ret = true;
    }
    // assert(pq_is_heap(pq, 0)); // testing the implementation
    return ret;
}
```

## Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu



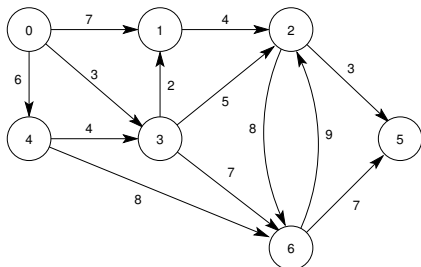
Levý potomek prvku haldy na pozici i je 2i + 1, pravý potomek je na pozici 2i + 2

## Část II

## Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu

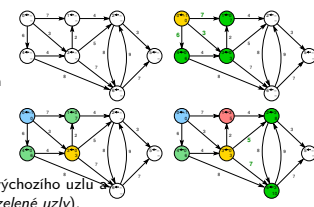
## Hledání nejkratší cesty v grafu

- Uzly grafu mohou reprezentovat jednotlivá místa
- Hrany pak reprezentují cestu jak se mezi místy pohybovat
- Ohodnocení (cena) hrany pak může například odpovídat náročnosti pohybu mezi dvě sousedními uzly
- Cílem je nalézt nejkratší (nejlevnější) cestu z nějakého konkrétního uzlu (0) do všech ostatních uzlů



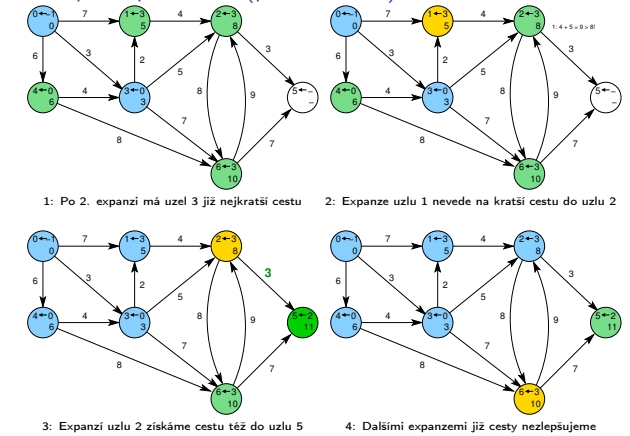
## Dijkstrův algoritmus

- Nechť graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - Následně vybereme takový uzel, do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň má aktuálně nejmenší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
  - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a má již ohodnocení a předchůdce (zelené uzly).



Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.

## Příklad postupu řešení (pokračování)



## Příklad řešení úlohy hledání nejkratších cest v grafu

- Řešení úlohy se skládá z
  - Vstupních dat (grafu) – paměťová reprezentace a načtení hodnot
    - Vstupní graf je zadán jako seznam hran
    - Dalším vstupem je výchozí uzel
  - Výstupních dat (nejkratší cesty) – paměťová reprezentace a uložení (zápis)
    - Všechny nejkratší cesty vypíšeme jako seznam vrcholů s cenou (délkou) nejkratší cesty a bezprostředním předchůdcem (indexem) uzlu na nejkratší cestě z výchozího uzlu (uzel 0)
- Algoritmu hledání cest – Dijkstrův algoritmus
  - Algoritmus je relativně přímočarý v každém kroku expandujeme uzly s aktuálně nejkratší cestou z výchozího uzlu

## Vstupní graf, reprezentace grafu a řešení

- Graf je zadán jako seznam hran v souboru, který můžeme načíst funkcí load\_graph\_simple() z lec10/\*load\_simple.c
- Graf je seznam hran
 

```
typedef struct {
    int from;
    int to;
    int cost;
} edge_t;

typedef struct {
    edge_t *edges;
    int num_edges;
    int capacity;
} graph_t;
```
- Navíc využijeme toho, že jsou hrany uspořádané
  - Hrany vycházející z uzlu určíme jako
  - index první hrany
  - edge\_start
  - a počet hran edge\_count
- Dále potřebujeme pro vlastní řešení v každém uzlu uložit cenu nejkratší cesty cost a předcházející uzel na nejkratší cestě parent

## Datová reprezentace

- Řešení implementujeme v modulu dijkstra
- Všechny potřebné datové struktury zahrneme do jediné struktury dijkstra\_t reprezentující všechny data řešení úlohy
 

```
typedef struct {
    graph_t *graph;
    node_t *nodes;
    int num_nodes;
    int start_node;
} dijkstra_t;
```
- Pro alokaci použijeme malloc(), allocate\_graph() a inicializujeme položky struktury na výchozí hodnoty
 

```
void* dijkstra_init(void)
{
    dijkstra_t *dij = (dijkstra_t*)malloc(sizeof(dijkstra_t));
    if (dij) {
        dij->nodes = NULL;
        dij->num_nodes = 0;
        dij->start_node = -1;
        dij->graph = allocate_graph();
    }
    return dij;
}
```

## Načtení grafu a inicializace uzlů 1/2

- Hranu načteme např. `load_graph_simple()` nebo impl. HW09.  
*Pro jednoduchost a lepší přehlednost zde předpokládáme bezchybné načtení*
- Dále potřebujeme zjistit počet vrcholů  
*Lze implementovat přímo do načítání*
- Alokujeme paměť pro uzly a nastavíme (bezpečně) výchozí hodnoty

```
load_graph_simple(filename, dij->graph);
int m = -1;
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
    const edge_t *const e = &(dij->graph->edges[i]);
    m = m < e->from ? e->from : m;
    m = m < e->to ? e->to : m;
} // smyčka pro určení maximálního počtu vrcholů
dij->num_nodes = m + 1; // m je index a začíná od 0 proto +1
dij->nodes = (node_t*)malloc(sizeof(node_t) * dij->num_nodes);
for (int i = 0; i < dij->num_nodes; ++i) {
    dij->nodes[i].edge_start = -1;
    dij->nodes[i].edge_count = 0;
    dij->nodes[i].parent = -1; // pokud neexistuje indukujeme -1
    // pro cenu volíme -1 ve výpise bude kratší než např. MAX_INT
    dij->nodes[i].cost = -1;
} // nastavení výchozích hodnot uzlů
```

## Prioritní fronta pro Dijkstraův algoritmus

- Součástí balíku `lec12/graph_search_array` je rozhraní `pq.h` pro implementaci prioritní fronty s funkcí `update()`
- ```
void *pq_alloc(int size);
void pq_free(void *pq);
_Bool pq_is_empty(const void *pq);
_Bool pq_push(void *pq, int label, int cost);
_Bool pq_update(void *pq, int label, int cost);
_Bool pq_pop(void *pq, int *oLabel);
```
- `lec12/graph_search_array/pq.h`
- Jedná se o relativně obecný předpis, který neklade zvláštní požadavky na vnitřní strukturu  
V balíku je rozhraní implementované v modulu `pq_array-linear.c`, který obsahuje implementaci prioritní fronty polem s lineární složitostí funkcí `push()` a `pop()`
  - `lec12/graph_search_array` základní funkční řešení hledání nejkratší cesty, prioritní fronta implementována polem

## Příklad použití

- Základní implementace hledání cest s prioritní frontou implementovanou polem je dostupná v `lec12/graph_search_array`
- Vytvoříme graf `g` programem `tdijkstra` např. o max 1000 vrcholů  
`./tdijkstra -c 1000 g`
- Program zkompilujeme a spustíme např.  
`./tgraph_search g s`
- Programem `tdijkstra` můžeme vygenerovat referenční řešení např.  
`./tdijkstra g s.ref`
- a naše řešení pak můžeme porovnat např.  
`diff s s.ref`

## Inicializace uzlů 2/2

- Nastavíme indexy hran jednotlivým uzlům

```
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
    int cur = dij->graph->edges[i].from;
    if (dij->nodes[cur].edge_start == -1) { // first edge
        // mark the first edge in the array of edges
        dij->nodes[cur].edge_start = i;
    }
    dij->nodes[cur].edge_count += 1; // increase no. of edges
}
```

## Prioritní fronta (polem) s push() a update()

- Při expanzi uzlu, můžeme do prioritní fronty vkládat uzly s cenou pro každou hranu vycházející z uzlu
  - Obecně může být hran výrazně více než počet uzlů  
*Pro plný graf o n uzlech až n<sup>2</sup> hran*
  - Proto pro prioritní frontu implementujeme funkci `update()` a tím zaručíme, že ve frontě bude nejvýše tolik prvků, kolik je vrcholů
  - V prioritní frontě tak můžeme předalokovat maximální počet položek
  - Při volání `update()` však potřebujeme získat pozici daného uzlu
    - Prvek v poli najdeme lineárním průchodem prvků ve frontě  
*Budeme však mít lineární složitost*
    - *Pozici prvku v prioritní frontě uložíme do dalšího pole a získáme tak okamžitý přístup za cenu mírně složitějšího vkládání prvků a vyšších paměťových nároků.*
- Operace update() bude mít výhodnou konstantní složitost.*

## Lineární prioritní fronta vs efektivní implementace

- Ukázková implementace v `lec12/graph_search_array`, je sice funkční, pro velké grafy je však výpočet pomalý
  - Například pro graf s 1 mil. vrcholů trvá načtení, nalezení všech nejkratší cest a uložení výsledku přibližně 120 sekund  
`./tdijkstra -c 1000000 g` *Intel Skylake@3.3GHz*  
`/usr/bin/time ./tgraph_search g s`  
Load graph from g  
Find all shortest paths from the node 0  
Save solution to s  
Free allocated memory  
120.53 real    115.92 user    0.07 sys
  - Referenčnímu programu `tdijkstra` pouze cca 1 sekundou  
*Těž k dispozici jako tdijkstra.Linux a tdijkstra.exe*  
`/usr/bin/time ./tdijkstra g s.ref`  
1.03 real    0.94 user    0.07 sys
  - Oba programy vracejí identické výsledky  
md5sum s s.ref  
MD5 (s) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b  
MD5 (s.ref) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b
- **V základní verzi řešení HW10 nesmí být hledání nejkratší cesty více než 2x pomalejší než referenční program.**

## Uložení řešení do souboru

- Po nalezení všech nejkratších cest (z uzlu 0) má každý uzel nastavenou hodnotu `cost` s délkou cesty a v `parent` index bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě  
*Případně -1 pokud cesta neexistuje.*
- ```
typedef struct {
    int edge_start;
    int edge_count;
    int parent;
    int cost;
} node_t;
```

Zápis řešení do souboru můžeme implementovat jednoduchým výpisem do souboru nebo implementací HW09.

```
_Bool dijkstra_save_path(void *dijkstra, const char *filename)
{
    _Bool ret = false;
    const dijkstra_t *const dij = (dijkstra_t*)dijkstra;
    if (dij) {
        FILE *f = fopen(filename, "w");
        if (f) {
            for (int i = 0; i < dij->num_nodes; ++i) {
                const node_t *const node = &(dij->nodes[i]);
                fprintf(f, "%i %i %i\n", i, node->cost, node->parent);
            } // end all nodes
            ret = fclose(f) == 0; // indicate eventual error in saving
        }
    }
    return ret;
}
lec12/dijkstra.c
```

## Hledání nejkratších cest

- Využijeme implementaci prioritní fronty s `push()` a `update()`
- ```
dij->nodes[dij->start_node].cost = 0; // inicializace
void *pq = pq_alloc(dij->num_nodes); // prioritní fronta
int cur_label;
pq_push(pq, dij->start_node, 0);
while (!pq_is_empty(pq) && pq_pop(pq, &cur_label)) {
    node_t *cur = &(dij->nodes[cur_label]); // pro snažší použití
    for (int i = 0; i < cur->edge_count; ++i) { // všechny hrany z uzlu
        edge_t *edge = &(dij->graph->edges[cur->edge_start + i]);
        node_t *to = &(dij->nodes[edge->to]);
        const int cost = cur->cost + edge->cost;
        if (to->cost == -1) { // uzel to nebyl dosud navštíven
            to->cost = cost;
            to->parent = cur_label;
            pq_push(pq, edge->to, cost); // vložení vrcholu do fronty
        } else if (cost < to->cost) { // uzel již v pq, proto
            to->cost = cost; // testujeme cost
            to->parent = cur_label; // a aktualizujeme odkaz (parent)
            pq_update(pq, edge->to, cost); // a prioritní frontu pq
        } // smyčka přes všechny hrany z uzlu cur_label
    } // prioritní fronta je prázdná
    pq_free(pq); // uvolníme paměť
}
lec12/dijkstra.c
```

## Prioritní fronta haldou s push() a update()

- Prioritní frontu implementujeme haldou reprezentovanou v poli  
*Maximální počet prvků dopředu známe.*
  - Halda zaručí složitost operací `push()` a `pop()`  $O(\log n)$   
*Oproti  $O(n)$  u jednoduché implementace prioritní fronty polem.*
  - Je nutné udržovat vlastnost haldy. Pro kontrolu zachování „heap property“ implementujeme rozhraní `pq_is_heap()`
- ```
_Bool pq_is_heap(void *heap, int n);
lec12/graph_search/pq_heap.h
```
- Pro zachování složitosti operací práce s haldou potřebujeme efektivně implementovat také funkci `update()`, tj.  $O(\log n)$ .
    - Potřebujeme znát pozici daného uzlu v haldě  
*Zavedeme pomocné pole s index heapIDX*
    - Při hledání nejkratších cest se délka cesty pouze snižuje
    - Proto se aktualizovaný „uzel“ může v haldě pohybovat pouze směrem nahoru  
*Jedná se tak o identický postup jako při přidání nového prvku funkci push(). V tomto případě však prvek může startovat z prostředka stromu.*



## Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

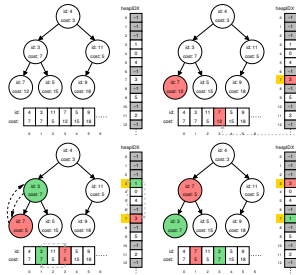
Zavoláme `update(id=7, cost=5)`

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.

- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.

- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.

- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



## Další možnosti urychlení programu

- Kromě efektivní implementace prioritní fronty haldou, která je zásadní, lze běh programu dále urychlit
  - efektivnějším načítáním grafu
  - a ukládáním řešení do souboru.

|                                  |                                   |                                 |
|----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| <code>tgraph_search s.tgs</code> | <code>tdijkstra -v g s.ref</code> | <code>dijkstra-pv g s.pv</code> |
| <code>lec11/tgraph_search</code> | Dijkstra ver. 2.3.4               | HW10 Reference solution         |
| Load time ...1252ms              | Load time ...223ms                | Load time ...235ms              |
| Solve time ...625 ms             | Solve time ...715ms               | Solve time ...610 ms            |
| Save time ...431 ms              | Save time ...106ms                | Save time ...87 ms              |
| Total time ...2308ms             | Total time ...1044ms              | Total time ...932ms             |

- HW10 – Soutěž v rychlosti programu – extra body navíc
  - Na odevzdání stačí opravit funkci `update()` případně využít binární načítání a ukládání z HW09.
  - Dalšího urychlení lze dosáhnout lepší organizací paměti a datovými strukturami

*Jediný zásadní požadavek je implementace rozhraní dle `lec12/dijkstra.h`*

## Shrnutí přednášky

## Příklad implementace

- V `lec12/graph_search` je uveden příklad implementace hledání nejkratších cest s prioritní frontou realizovanou haldou
- Implementace funkce `update()` využívá pole `heapIDX` pro získání pozice prvku v haldě, záměrně je však splnění vlastnosti haldy realizováno vytvořením nové haldy s aktualizovanou cenou uzlu.

```

_Bool pq_update(void *_pq, int label, int cost)
{
    _Bool ret = false;
    pq_heap_s *pq = (pq_heap_s*)_pq;
    pq->cost[pq->heapIDX[label]] = cost; // update the cost, but heap property is not satisfied
    // assert(pq_is_heap(pq, 0));

    pq_heap_s *pqBackup = (pq_heap_s*)pq_malloc(pq->size); //create backup of the heap
    pqBackup->len = pq->len;
    for (int i = 0; i < pq->len; ++i) { // backup the heap
        pqBackup->cost[i] = pq->cost[i]; //just cost and labels
        pqBackup->label[i] = pq->label[i];
    }
    pq->len = 0; //clear all vertices in the current heap
    for (int i = 0; i < pqBackup->len; ++i) { //create new heap from the backup
        pq_push(pq, pqBackup->label[i], pqBackup->cost[i]);
    }
    pq_free(pqBackup); // release the queue
    ret = true;
    return ret;
}
    
```

**Součástí řešení 10. domácího úkolu je správná implementace funkce `update()`!**

## Část III

### Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)

## Diskutovaná témata

- Prioritní fronta
  - Příklad implementace spojovým seznamem `lec12/priority_queue-linked_list`
  - Příklad implementace polem `lec12/priority_queue-array`
- Halda - definice, vlastnosti a základní operace
- Reprezentace binárního plného stromu polem
- Prioritní fronta s haldou
- Hledání nejkratší cesty v grafu – využití prioritní fronty (resp. haldy)
- **Příště: Systémy pro správu verzí.**

## Příklad řešení a rychlost výpočtu

- Po úpravě funkce `update()` získáme prioritní frontu se složitostí operací  $O(\log n)$  a vlastní výpočet bude relativně rychlý.
- Pro získání představy rychlosti výpočtu je v souboru `tgraph_search-time.c` volání dílčích funkcí modulu `dijkstra` s měřením reálného času (`make time`). `lec12/graph_search-time.c`

*Alternativně lze řešit nástrojem `time` nebo pro Win platformu `lec12/bin/timeexec.exe`*

- Vytvoříme graf o 1 mil. uzlů (a cca 3 mil. hran) v souboru `/tmp/g`  
`./bin/tdijkstra -c 10000000 /tmp/g`

|                                                |                                                |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Verze s naivním <code>update()</code>          | Upravená funkce <code>update()</code>          |
| <code>tgraph_search-time /tmp/g /tmp/s1</code> | <code>tgraph_search-time /tmp/g /tmp/s2</code> |
| Load graph from /tmp/g                         | Load graph from /tmp/g                         |
| Load time ...1179ms                            | Load time ...1201ms                            |
| Save solution to /tmp/s1                       | Save solution to /tmp/s2                       |
| Solve time ...965875 ms                        | Solve time ...620 ms                           |
| Save time ...273 ms                            | Save time ...279 ms                            |
| Total time ...967327ms                         | Total time ...2100ms                           |

- Správnost řešení lze zkontrolovat programem `tdijkstra`, např.  
`./bin/tdijkstra -t /tmp/g /tmp/s`

## Zadání 10. domácího úkolu HW10

### Téma: Integrace načítání grafu a prioritní fronta v úloze hledání nejkratších cest

Povinné zadání: **3b**; Volitelné zadání: **3b**; Bonusové zadání: *Soutěž o body*

- **Motivace:** Větší programový celek, využití existujícího kódu a efektivní implementace programu
- **Cíl:** Osvojit si integraci existujícího kódu do funkčního celku složeného z více souborů.
- **Zadání:** <https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b0b36prp/hw/hw10>
  - Funkce `update()` pro efektivní použití prioritní fronty implementované haldou v úloze hledání nejkratší cest v grafu.
  - **Volitelné zadání** rozšiřuje binární načítání/ukládání grafu o specifikovaný binární formát, tj. rozšíření HW 09.
  - **Bonusové zadání** spočívá v efektivnosti implementace tak, aby byl výsledný kód co možná nejrychlejší.
- **Termín odevzdání:** **06.01.2018, 23:59:59 PST**