

# Struktury a uniony, přesnost výpočtů a vnitřní reprezentace číselných typů

Jan Faigl

Katedra počítačů  
Fakulta elektrotechnická  
České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 07

**B0B36PRP – Procedurální programování**



# Přehled témat

- Část 1 – Struktury a uniony

  - Struktury – `struct`

  - Proměnné se sdílenou pamětí – `union`

*S. G. Kochan: kapitola 9 a 17*

  - Příklad

*P. Herout: kapitola 14*

- Část 2 – Přesnost výpočtů a vnitřní reprezentace číselných typů

  - Přesnost výpočtů a numerická stability

  - Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

  - Reprezentace celých čísel

  - Reprezentace reálných čísel

*S. G. Kochan: kapitola 14 (typové konverze)*

  - Typové konverze

*Appendix B (matematické funkce)*

  - Matematické funkce

*P. Herout: kapitola 7 (typové konverze)*

- Část 3 – Zadání 6. domácího úkolu (HW06)



# Část I

## Část 1 – Struktury a uniony



# Obsah

Struktury – struct

Proměnné se sdílenou pamětí – union

Příklad



## Struktura – struct

- Struktura je konečná množina prvků (proměnných), které nemusí být stejného typu
- Skladba struktury je definovaná uživatelem jako nový typ sestavený z již definovaných typů
- K prvkům struktury **přistupujeme tečkovou notací**
- K prvkům můžeme přistupovat přes ukazatel operátorem  $\rightarrow$
- Pro struktury stejného typu je definována operace přiřazení

```
struct1 = struct2;
```

*Pro proměnné typu pole není přímé přiřazení definováno, přiřazení pole je tak nutné realizovat po prvcích.*

- Struktury (jako celek) **nelze** porovnávat relačním operátorem  $==$
- Struktura může být funkci předávána hodnotou i ukazatelem
- Struktura může být návratovou hodnotou funkce



## Příklad struct – Definice

- Bez zavedení nového typu (`typedef`) je nutné před identifikátor jména struktury uvádět klíčové slovo `struct`

```
struct record {
    int number;
    double value;
};

typedef struct {
    int n;
    double v;
} item;

record r; /* THIS IS NOT ALLOWED! */
        /* Type record is not known */

struct record r; /* Keyword struct is required */
item i;         /* type item defined using typedef */
```

- Zavedením nového typu `typedef` můžeme používat typ struktury již bez uvádění klíčového slova `struct`

lec07/struct.c



## Definice jména struktury a typu struktury

- Uvedením `struct record` zavádíme nové jméno struktury `record`

```
struct record {  
    int number;  
    double value;  
};
```

- Definujeme identifikátor `record` ve jmeném prostoru struktur
- Definicí typu `typedef` zavádíme nové jméno typu `record`

```
typedef struct record record;
```

  - Definujeme globální identifikátor `record` jako jméno typu `struct record`
- Obojí můžeme kombinovat v jediné definici jména a typu struktury

```
typedef struct record {  
    int number;  
    double value;  
} record;
```



## Příklad struct – Inicializace

- Struktury:

```
struct record {                typedef struct {
    int number;                 int n;
    double value;              double v;
};                               } item;
```

- Proměnné typu struktura můžeme inicializovat prvek po prvku

```
struct record r;
r.value = 21.4;
r.number = 7;
```

- Podobně jako pole lze inicializovat přímo při definici

```
item i = { 1, 2.3 };
```

- nebo pouze konkrétní položky (ostatní jsou nulovány)

```
struct record r2 = { .value = 10.4};
```





## Příklad struct jako parametr funkce

- Struktury můžeme předávat jako parametry funkcí hodnotou

```
void print_record(struct record rec) {  
    printf("record: number(%d), value(%lf)\n",  
        rec.number, rec.value);  
}
```

- Nebo ukazatelem

```
void print_item(item *v) {  
    printf("item: n(%d), v(%lf)\n", v->n, v->v);  
}
```

- Při předávání parametru

- **hodnotou** se vytváří nová proměnná a původní obsah předávané struktury se kopíruje na zásobník
- **ukazatelem** se kopíruje pouze hodnota ukazatele (adresa) a pracujeme tak s původní strukturou

[lec07/struct.c](#)



## Příklad struct – Přřazení

- Hodnoty proměnné stejného typu struktury můžeme přiřadit operátorem =

```
struct record {                typedef struct {
    int number;                int n;
    double value;              double v;
};                               } item;
```

```
struct record rec1 = { 10, 7.12 };
struct record rec2 = { 5, 13.1 };
item i;
print_record(rec1); /* number(10), value(7.120000) */
print_record(rec2); /* number(5), value(13.100000) */
rec1 = rec2;
i = rec1; /* THIS IS NOT ALLOWED! */
print_record(rec1); /* number(5), value(13.100000) */
lec07/struct.c
```



## Příklad struct – Přímá kopie paměti

- Jsou-li dvě struktury stejně veliké, můžeme přímo kopírovat obsah příslušné paměťové oblasti

*Například funkcí `memcpy()` z knihovny `string.h`*

```
struct record r = { 7, 21.4};
item i = { 1, 2.3 };
print_record(r); /* number(7), value(21.400000) */
print_item(&i); /* n(1), v(2.300000) */
if (sizeof(i) == sizeof(r)) {
    printf("i and r are of the same size\n");
    memcpy(&i, &r, sizeof(i));
    print_item(&i); /* n(7), v(21.400000) */
}
```

- V tomto případě je interpretace hodnot v obou strukturách identická, obecně tomu však být nemusí

lec07/struct.c



## Struktura struct a velikost

- Vnitřní reprezentace struktury nutně nemusí odpovídat součtu velikostí jednotlivých prvků

```
struct record {  
    int number;  
    double value;  
};  
  
typedef struct {  
    int n;  
    double v;  
} item;
```

```
printf("Size of int: %lu size of double: %lu\n", sizeof  
    (int), sizeof(double));  
printf("Size of record: %lu\n", sizeof(struct record));  
printf("Size of item: %lu\n", sizeof(item));
```

```
Size of int: 4 size of double: 8  
Size of record: 16  
Size of item: 16
```

lec07/struct.c



## Struktura struct a velikost 1/2

- Při kompilaci zpravidla dochází k zarovnání prvků na velikost slova příslušné architektury

*Např. 8 bytů v případě 64-bitové architektury.*

- Můžeme explicitně předsat kompaktní paměťovou reprezentaci, např. direktivou `__attribute__((packed))` pro překladače `clang` a `gcc`

```
struct record_packed {  
    int n;  
    double v;  
} __attribute__((packed));
```

`lec07/struct.c`



## Struktura struct a velikost 2/2

- Nebo 

```
typedef struct __attribute__((packed)) {  
    int n;  
    double v;  
} item_packed;
```

- Příklad výstupu:

```
printf("Size of int: %lu size of double: %lu\n", sizeof(int),  
      sizeof(double));  
printf("record_packed: %lu\n", sizeof(struct record_packed));  
printf("item_packed: %lu\n", sizeof(item_packed));
```

```
Size of int: 4 size of double: 8  
Size of record_packed: 12  
Size of item_packed: 12
```

lec07/struct.c

- Zarovnání zpravidla přináší rychlejší přístup do paměti, ale zvyšuje paměťové nároky

<http://www.catb.org/esr/structure-packing>



# Obsah

Struktury – struct

Proměnné se sdílenou pamětí – union

Příklad



## Proměnné se sdílenou pamětí – union

- **Union** je množina prvků (proměnných), které nemusí být stejného typu
- Prvky unionu sdílejí společně stejná paměťová místa
- Velikost unionu je dána velikostí největšího z jeho prvků
- Skladba unionu je definována uživatelem jako nový typ sestavený z již definovaných typů
- K prvkům unionu se přistupuje tečkovou notací
- Pokud nedefinujeme nový typ je nutné k identifikátoru proměnné unionu uvádět klíčové slovo **union**

*Překrývají se*

*Podobně jako u struktury **struct***

```
1 union Nums {
2     char c;
3     int i;
4 };
5 Nums nums; /* THIS IS NOT ALLOWED! Type Nums is not known! */
6 union Nums nums;
```





## Příklad union 1/2

- Union složený z proměnných typu: `char`, `int` a `double`

```
1 int main(int argc, char *argv[])
2 {
3     union Numbers {
4         char c;
5         int i;
6         double d;
7     };
8     printf("size of char %lu\n", sizeof(char));
9     printf("size of int %lu\n", sizeof(int));
10    printf("size of double %lu\n", sizeof(double));
11    printf("size of Numbers %lu\n", sizeof(union Numbers));
12
13    union Numbers numbers;
14
15    printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c,
        numbers.i, numbers.d);
```

- Příklad výstupu:

```
size of char 1
size of int 4
size of double 8
size of Numbers 8
Numbers c: 48 i: 740313136 d: 0.000000
```

lec07/union.c



## Příklad union 2/2

### ■ Proměnné sdílejí paměťový prostor

```
1 numbers.c = 'a';
2 printf("\nSet the numbers.c to 'a'\n");
3 printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i,
4       numbers.d);
5 numbers.i = 5;
6 printf("\nSet the numbers.i to 5\n");
7 printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i,
8       numbers.d);
9 numbers.d = 3.14;
10 printf("\nSet the numbers.d to 3.14\n");
11 printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i,
12       numbers.d);
```

### ■ Příklad výstupu:

```
Set the numbers.c to 'a'
Numbers c: 97 i: 1374389601 d: 3.140000
```

```
Set the numbers.i to 5
Numbers c: 5 i: 5 d: 3.139999
```

```
Set the numbers.d to 3.14
Numbers c: 31 i: 1374389535 d: 3.140000
```



## Inicializace union

- Proměnnou typu `union` můžeme inicializovat při definici

```
1 union {  
2     char c;  
3     int i;  
4     double d;  
5 } numbers = { 'a' };
```

*Pouze první položka (proměnná) může být inicializována*

- V C99 můžeme inicializovat konkrétní položku (proměnnou)

```
1 union {  
2     char c;  
3     int i;  
4     double d;  
5 } numbers = { .d = 10.3 };
```



# Obsah

Struktury – struct

Proměnné se sdílenou pamětí – union

Příklad



## Příklad struktura, pole a výčtový typ 1/3

- Hodnoty (konstanty) výčtového typu jsou celá čísla, která mohou být použita jako indexy (pole)
- Také je můžeme použít pro inicializaci pole struktur

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <string.h>
4
5 enum weekdays { MONDAY, TUESDAY, WEDNESDAY, THURSDAY, FRIDAY };
6
7 typedef struct {
8     char *name;
9     char *abbr; // abbreviation
10 } week_day_s;
11
12 const week_day_s days_en[] = {
13     [MONDAY] = { "Monday", "mon" },
14     [TUESDAY] = { "Tuesday", "tue" },
15     [WEDNESDAY] = { "Wednesday", "wed" },
16     [THURSDAY] = { "Thursday", "thr" },
17     [FRIDAY] = { "Friday", "fri" },
18 };
```

lec07/demo-struct.c



## Příklad struktura, pole a výčtový typ 2/3

- Připravíme si pole struktur pro konkrétní jazyk
- Program vytiskne jméno a zkratku dne v týdnu dle čísla dne v týdnu

*V programu používáme jednotné číslo dne bez ohledu na jazykovou mutaci*

```
19 const week_day_s days_cs[] = {
20     [MONDAY] = { "Pondeli", "po" },
21     [TUESDAY] = { "Utery", "ut" },
22     [WEDNESDAY] = { "Streda", "st" },
23     [THURSDAY] = { "Ctvrtek", "ct" },
24     [FRIDAY] = { "Patek", "pa" },
25 };
26
27 int main(int argc, char *argv[], char **envp)
28 {
29     int day_of_week = argc > 1 ? atoi(argv[1]) : 1;
30     if (day_of_week < 1 || day_of_week > 5) {
31         fprintf(stderr, "(EE) File: '%s' Line: %d -- Given day of
32             week out of range\n", __FILE__, __LINE__);
33         return 101;
34     }
35     day_of_week -= 1; // start from 0
```

lec07/demo-struct.c



## Příklad struktura, pole a výčtový typ 3/3

- Detekci národního prostředí provedeme podle hodnoty proměnné prostředí

*Pro jednoduchost detekujeme češtinu na základě výskytu řetězce "cs" v hodnotě proměnné prostředí LC\_CTYPE.*

```
35  _Bool cz = 0;
36  while (*envp != NULL) {
37      if (strstr(*envp, "LC_CTYPE") && strstr(*envp, "cs"))
38          ) {
39              cz = 1;
40              break;
41          }
42      envp++;
43  }
44  const week_day_s *days = cz ? days_cs : days_en;
45  printf("%d %s %s\n",
46          day_of_week,
47          days[day_of_week].name,
48          days[day_of_week].abbr);
49  return 0;
50 }
```

lec07/demo-struct.c



## Část II

### Část 2 – Vnitřní reprezentace číselných typů





# Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



## Přesnost výpočtu 1/2

- Ztráta přesnosti při aritmetických operacích.

### Příklad sčítání dvou čísel

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main(void)
4 {
5     double a = 1e+10;
6     double b = 1e-10;
7
8     printf("a   : %24.121f\n", a);
9     printf("b   : %24.121f\n", b);
10    printf("a+b: %24.121f\n", a + b);
11
12    return 0;
13 }
14
15 clang sum.c && ./a.out
16 a   : 10000000000.000000000000
17 b   :          0.000000000100
18 a+b: 10000000000.000000000000
```



## Přesnost výpočtu 2/2

### Příklad dělení dvou čísel

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main(void)
4 {
5     const int number = 100;
6     double dV = 0.0;
7     float fV = 0.0f;
8
9     for (int i = 0; i < number; ++i) {
10         dV += 1.0 / 10.0;
11         fV += 1.0 / 10.0;
12     }
13
14     printf("double value: %lf ", dV);
15     printf(" float value: %lf ", fV);
16
17     return 0;
18 }
19
20 clang division.c && ./a.out
21 double value: 10.000000 float value: 10.000002
```

lec07/division.c



## Přesnost výpočtu - strojová přesnost

- Strojová přesnost  $\epsilon_m$  - nejmenší desetinné číslo, které přičtením k 1.0 dává výsledek různý od 1, pro  $|v| < \epsilon_m$ , platí

$$v + 1.0 == 1.0.$$

*Symbol == odpovídá porovnání dvou hodnot (test na ekvivalenci).*

- Zaokrouhlovací chyba - nejméně  $\epsilon_m$ .
- Přesnost výpočtu - aditivní chyba roste s počtem operací v řádu  $\sqrt{N} \cdot \epsilon_m$ .
  - Často se však kumuluje preferabilně v jedno směru v řádu  $N \cdot \epsilon_m$ .



## Zdroje a typy chyby

- Chyby matematického modelu - matematická aproximace fyzikální situace.
- Chyby vstupních dat.
- Chyby numerické metody.
- Chyby zaokrouhlovací.
  
- Absolutní chyba aproximace  
 $E(x) = \hat{x} - x$ ,  $\hat{x}$  přesná hodnota,  $x$  aproximace.
- Relativní chyba  $RE(x) = \frac{\hat{x} - x}{x}$ .



## Podmíněnost numerických úloh

- Podmíněnost úlohy  $C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}$
- Dobře podmíněná úloha  $C_p \approx 1$ .
- Výpočet je dobře podmíněný, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech.
- Numericky stabilní výpočet - vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek je malý.
- Výpočet je stabilní, je-li dobře podmíněný a numericky stabilní.



## Možnosti zvýšení přesnosti

- Reprezentace racionálních čísel - podíl dvou celočíselných hodnot, např. *Homogenní souřadnice*.
- „Libovolná přesnost“ - speciální knihovny, např. `gmp` až do výše volné paměti.

*souřadnice*  $x,y$  - 7511164176768 346868669952 3739567104  $\sim$  2008.57, 92.76

*Informativní*



## Příklady chyb

- Ariane 5 - 4.6.1996

40 sekund po startu explodovala. Datová konverze z 64-bitového desetinné reprezentace na 16-ti bitový znaménkový integer.

[http://www.esa.int/esaCP/Pr\\_33\\_1996\\_p\\_EN.html](http://www.esa.int/esaCP/Pr_33_1996_p_EN.html)

- Systém Patriot - 25.2.1991

Systémový čas v desetinách sekundy, převod na sekundy realizován dělením 10, registry pouze 24 bitů.

<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html>

<http://www5.informatik.tu-muenchen.de/~huckle/bugse.html>





# Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



# Datové typy

- Při návrhu algoritmu abstrahujeme od binární podoby paměti počítače
- S daty pracujeme jako s hodnotami různých datových typů, které jsou uloženy v paměti předepsaným způsobem
- Datový typ specifikuje:
  - Množinu hodnot, které je možné v počítači uložit

*Záleží na způsobu reprezentace*

  - Množinu operací, které lze s hodnotami typu provádět
- **Jednoduchý typ** je takový typ, jehož hodnoty jsou atomické, tj. z hlediska operací dále nedělitelné



## Příklad číselných typů a vnitřní reprezentace

- Např. 32-bitový typ `int` umožňuje uložit celá čísla v intervalu  $\langle -2147483648, 2147483647 \rangle$ , pro která můžeme použít
  - aritmetické operace `+`, `-`, `*`, `/` s výsledkem hodnota typu `int`
  - relační operace `==`, `!=`, `>`, `<`, `>=`, `<=`
- Inicializovat hodnotou dekadického nebo hexadecimálního literálu

```
1 int i; // definice promenne typu int
2 int decI = 120; // definice spolu s prirazeni
3 int hexI = 0x78; //pocatecni hodnota v 16-kove soustave
4
5 int sum = 10 + decI + 0x13; //pocatecni hodnota je vyraz
```

- Vnitřní reprezentace typů (např. `int`, `short`, `double`) umožňuje uložit čísla z definovaného rozsahu s různou přesností.
- Číselné datové typy lze vzájemně převádět implicitní nebo explicitní typovou konverzí
- Při konverzi nemusí být hodnota zachována – viz

`lec07/demo-types.c`



## Reprezentace dat v počítači

- V počítači není u datové položky určeno jaký konkrétní datový typ je v paměti uložen
- Proto musíme přidělení paměti **definovat** s jakými typy dat budeme pracovat
- Překladač pak tuto definici hlídá a volí odpovídající strojové instrukce pro práci s datovými položkami například jako s odpovídajícími číselnými typy

*Např. neceločíselné (float) typy a využití tzv. FPU*

### Příklad ekvivalentních reprezentací v paměti počítače

- $0100\ 0001_{(2)}$  – binární zápis jednoho bajtu (8-mi bitů);
- $65_{(10)}$  – odpovídající číslo v dekadické soustavě;
- $41_{(16)}$  – odpovídající číslo v šestnáctkové soustavě;
- znak A – tentýž obsah paměťového místa  $0100\ 0001_{(2)}$  o velikosti 1 byte může být interpretován také jako znak A.



# Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



## Číselné soustavy

- Číselné soustavy – poziční číselné soustavy (polyadické) jsou charakterizovány bází udávající kolik číslic lze maximálně použít

$x_d = \sum_{i=-n}^{i=m} a_i \cdot z^i$ , kde  $a_i$  je číslice a  $z$  je základ soustavy

- Unární – např. počet vypitých půllitrů
- Binární soustava (bin) – 2 číslice 0 nebo 1

$$\begin{aligned} 11010,01_{(2)} &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 26,25 \end{aligned}$$

- Desítková soustava (dec) – 10 číslic, znaky 0 až 9

$$\begin{aligned} 138,24_{(10)} &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} \\ &= 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 \end{aligned}$$

- Šestnáctková soustava (hex) – 16 číslic, znaky 0 až 9 a A až F

$$\begin{aligned} 0x7D_{(16)} &= 7 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0 \\ &= 112 + 13 \\ &= 125 \end{aligned}$$



## Kódování záporných čísel

- **Přímý kód** – znaménko je určeno 1. bitem (zleva), snadné stanovení absolutní hodnoty, dvě nuly, příklad reprezentace:
  - $121_{(10)}$        $0111\ 1001_{(2)}$
  - $-121_{(10)}$       $1111\ 1001_{(2)}$
  - $0_{(10)}$          $0000\ 0000_{(2)}$
  - $-0_{(10)}$         $1111\ 1111_{(2)}$
  
- **Inverzní kód** – záporné číslo odpovídá bitové negaci kladné hodnoty čísla; dvě nuly; příklad reprezentace:
  - $121_{(10)}$        $0111\ 1001_{(2)}$
  - $-121_{(10)}$       $1000\ 0111_{(2)}$
  - $0_{(10)}$          $0000\ 0000_{(2)}$
  - $-0_{(10)}$         $1111\ 1111_{(2)}$
  
- **Doplňkový kód** – záporné číslo je uloženo jako hodnota kladného čísla po bitové negaci zvětšená o 1; jediná reprezentace nuly
  - $121_{(10)}$        $0111\ 1001_{(2)}$
  - $-121_{(10)}$       $1000\ 0110_{(2)}$
  - $-121_{(10)}$       $1000\ 0111_{(2)}$
  
  - $127_{(10)}$        $0111\ 1111_{(2)}$
  - $-128_{(10)}$       $1000\ 0000_{(2)}$
  - $-1_{(10)}$         $1111\ 1111_{(2)}$



## Více-bajtová reprezentace a pořadí bajtů

- Číselné typy s více-bajtovou reprezentací mohou mít bajty uloženy v různém pořadí
  - *little-endian* – **nejméně** významný bajt se ukládá na nejnižší adresu  
*x86, ARM*
  - *big-endian* – **nejvíce** významný bajt se ukládá na nejnižší adresu  
*Motorola, ARM*
- Pořadí je důležité při přenosu hodnot z paměti jako posloupnosti bajtů a jejich následné interpretaci
- **Network byte order** – je definován pro síťový přenos a není tak nutné řešit konkrétní architekturu
  - Tj. hodnoty z paměti jsou ukládány a přenášeny v tomto pořadí bajtů a na cílové stanici pak zpětně zapsány do konkrétního nativního pořadí

*big-endian*

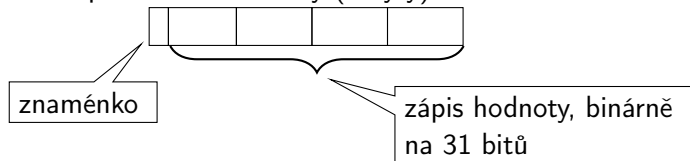
*Informativní*





## Příklad reprezentace celých čísel `int`

- Na 32-bitových a 64-bitových strojích je celočíselný typ `int` zpravidla reprezentován 32 bity (4 byty)



- Typ `int` je znaménkový typ
- Znaménko je zakódováno v 1 bitu a vlastní číselná hodnota pak ve zbývajících 31 bitech
  - Největší číslo je  $0111\dots111 = 2^{31} - 1 = 2147483647$   
*Nezapomínat na 0*
  - Nejmenší číslo je  $-2^{31} = -2147483648$   
*0 už je zahrnuta*
- Pro zobrazení záporných čísel je použit tzv. **doplňkový kód**  
Nejmenší číslo v doplňkovém kódu  $1000\dots000$  je  $-2^{31}$



## Reprezentace záporných celých čísel

- Doplnkový kód –  $D(x)$
- Pro 8-mi bitovou reprezentací čísel
  - Můžeme reprezentovat  $2^8=256$  čísel
  - Rozsah  $r = 256$

$$D(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ r + x & \text{pro } -\frac{r}{2} \leq x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Příklady

Desítkově	Doplnkový kód
0–127	0000 0000 – 0111 1111
128	nelze zobrazit na 8 bitů v doplnkovém kódu
-128	$D(-128) = 256 + (-128) = 128$ to je 1000 0000
-1	$D(-1) = 256 + (-1) = 255$ to je 1111 1111
-4	$D(-4) = 256 + (-4) = 252$ to je 1111 1100



# Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



## Reprezentace reálných čísel

- Pro uložení čísla vyhrajujeme omezený paměťový prostor

### Příklad – zápis čísla $\frac{1}{3}$ v dekadické soustavě

- $= 33333333 \dots 3333$
- $= 0, \overline{33}$
- $\approx 0, 33333333333333333333$
- $\approx 0, 333$

$$\text{V trojkové soustavě: } 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} = (0, 1)_3$$

- Nepřesnosti v zobrazení reálných čísel v konečné posloupnosti bitů způsobují
  - Iracionální čísla, např.  $e$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$
  - Čísla, která mají v dané soustavě periodický rozvoj, např.  $\frac{1}{3}$
  - Čísla, která mají příliš dlouhý zápis



## Model reprezentace reálných čísel

- Reálná čísla se zobrazují jako aproximace daným rozsahem paměťového místa
- Reálné číslo  $x$  se zobrazuje ve tvaru

$$x = \text{mantisa} \cdot \text{základ}^{\text{exponent}}$$

$$x = m \cdot z^{\text{exponent}}$$

- Pro jednoznačnost zobrazení musí být mantisa normalizována

$$0,1 \leq m < 1$$

- Ve vyhrazeném paměťovém prostoru je pro zvolený základ uložen exponent a mantisa jako dvě celá čísla



# Příklad modelu reprezentace reálných čísel 1/2

## Reprezentace na 7 bajtů

- Délka mantisy 3 pozice (bajtů) plus znaménko
- Délka exponentu 2 pozice plus znaménko
- Základ  $z = 10$
- Nula



- Příklad  $x = 77,5 = 0,775 \cdot z^{+02}$



## Příklad modelu reprezentace reálných čísel 2/2

### Limitní zobrazitelná čísla

- Maximální zobrazitelné kladné číslo  $0,999z^{99}$



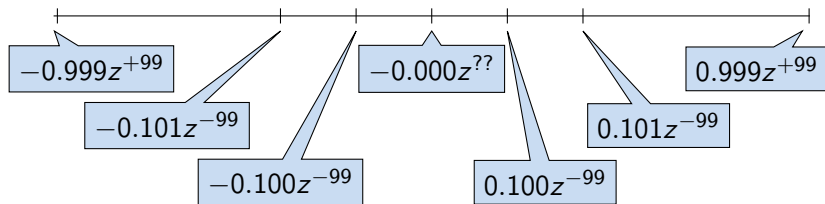
- Maximální zobrazitelné záporné číslo  $-0,100z^{-99}$



- Minimální zobrazitelné kladné číslo  $0,100z^{-99}$

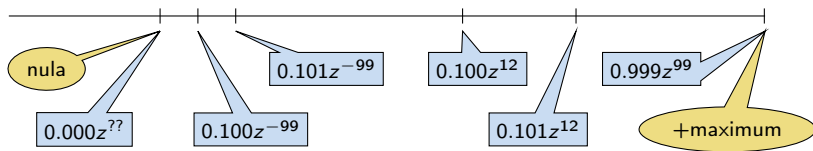


- Minimální zobrazitelné záporné číslo  $-0,999z^{+99}$

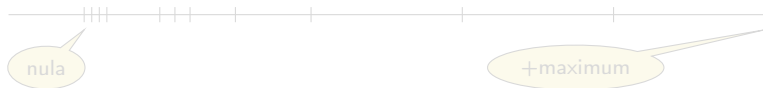


## Model reprezentace reálných čísel a vzdálenost mezi aproximacemi

- Rozsah hodnot pro konkrétní exponent je dán velikostí mantisy
- Absolutní vzdálenost dvou aproximací tak záleží na exponentu
  - Mezi hodnotou 0 a 1,0 je využít celý rozsah mantisy pro exponenty  $\{-99, -98, \dots, 0\}$



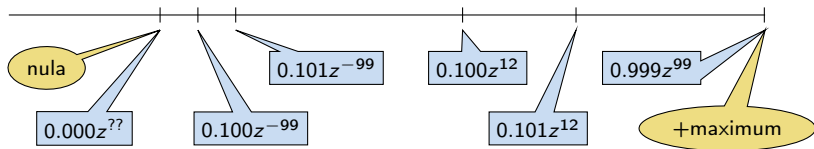
- Aproximace reálných čísel nejsou na číselné ose rovnoměrně rozloženy





## Model reprezentace reálných čísel a vzdálenost mezi aproximacemi

- Rozsah hodnot pro konkrétní exponent je dán velikostí mantisy
- Absolutní vzdálenost dvou aproximací tak záleží na exponentu
  - Mezi hodnotou 0 a 1,0 je využít celý rozsah mantisy pro exponenty  $\{-99, -98, \dots, 0\}$



- Aproximace reálných čísel nejsou na číselné ose rovnoměrně rozloženy



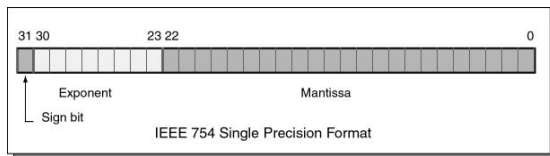
## Reprezentace necelých čísel – IEEE 754

- Reálné číslo  $x$  se zobrazuje ve tvaru

$$x = (-1)^s \text{mantisa} \cdot 2^{\text{exponent} - \text{bias}}$$

*IEEE 754, ISO/IEC/IEEE 60559:2011*

- float** – 32 bitů (4 bajty):  $s$  – 1 bit znaménko (+ nebo –), **mantisa** – 23 bitů  $\approx 16,7$  milionu možností; **exponent** – 8 bitů, tj. 256 možností



- double** – 64 bitů (8 bajtů)
  - $s$  – 1 bit znaménko (+ nebo –)
  - mantisa** – 52 bitů  $\approx 4,5$  biliardy možností (4 503 599 627 370 495)
  - exponent** – 11 bitů, tj. 2048 možností
- Čím větší exponent, tím větší „mezery“ mezi sousedními aproximacemi čísel
- bias** umožňuje reprezentovat exponent vždy jako kladné číslo

*Lze zvolit, např.  $\text{bias} = 2^{eb-1} - 1$ , kde  $eb$  je počet bitů exponentu*

<http://www.root.cz/clanky/norma-ieee-754-a-pribuzni-formaty-plovouci-radove-tecky>



# Příklad reprezentace **float** hodnot dle IEEE 754

### IEEE 754 Converter (JavaScript), V0.22

	Sign	Exponent	Mantissa
<b>Value:</b>	-1	2 <sup>8</sup>	1.0029296875
<b>Encoded as:</b>	1	135	24576
<b>Binary:</b>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
You entered	<input type="text" value="-256.75"/>		
Value actually stored in float:	<input type="text" value="-256.75"/> <span style="float: right; border: 1px solid #ccc; padding: 2px 5px;">+1</span>		
Error due to conversion:	<input type="text" value="0.00"/> <span style="float: right; border: 1px solid #ccc; padding: 2px 5px;">-1</span>		
Binary Representation	<input type="text" value="11000011100000000110000000000000"/>		
Hexadecimal Representation	<input type="text" value="0xc3806000"/>		

---

### IEEE 754 Converter (JavaScript), V0.22

	Sign	Exponent	Mantissa
<b>Value:</b>	-1	2 <sup>8</sup>	1.0028905868530273
<b>Encoded as:</b>	1	135	24248
<b>Binary:</b>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
You entered	<input type="text" value="-256.74"/>		
Value actually stored in float:	<input type="text" value="-256.739990234375"/> <span style="float: right; border: 1px solid #ccc; padding: 2px 5px;">+1</span>		
Error due to conversion:	<input type="text" value="0.000009765625"/> <span style="float: right; border: 1px solid #ccc; padding: 2px 5px;">-1</span>		
Binary Representation	<input type="text" value="11000011100000000101111010111000"/>		
Hexadecimal Representation	<input type="text" value="0xc3805eb8"/>		

- Chyba reprezentace -256.75 vs -256.74
- **Infinity** (0x7f800000), **-Infinity** (0xff800000), a **NaN** (0x7fffffff)

<https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html>



# Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



## Přiřazovací operátor a příkaz

- Slouží pro nastavení hodnoty proměnné

*Uložení číselné hodnoty do paměti, kterou proměnná reprezentuje IEEE 754,*

- Tvar přiřazovacího operátoru

$$\langle \text{proměnná} \rangle = \langle \text{výraz} \rangle$$

*Výraz je literál, proměnná, volání funkce, ...*

- Zkrácený zápis

$$\langle \text{proměnná} \rangle \langle \text{operátor} \rangle = \langle \text{výraz} \rangle$$

- Přiřazení je výraz

- Asociativní zprava

- Přiřazovací příkaz – výraz zakončený středníkem ;

```
int x; //definice promenne x      int x, y; //definice
int y; //definice promenne y      promennych x a y
```

```
x = 6;
y = x = x + 6;
```

```
x = 10;
y = 7;

y += x + 10;
```



## Typové konverze

- Typová konverze je operace převedení hodnoty nějakého typu na hodnotu typu jiného
- Typová konverze může být
  - **implicitní** – vyvolá se automaticky
  - **explicitní** – je nutné v programu explicitně uvést
- Konverze typu **int** na **double** je implicitní

*Hodnota typu int může být použita ve výrazu, kde se očekává hodnota typu double, dojde k automatickému převodu na hodnotu typu double.*

### Příklad

```
double x;  
int i = 1;
```

```
x = i; // hodnota 1 typu int se automaticky převede  
      // na hodnotu 1.0 typu double
```

- Implicitní konverze je bezpečná



## Explicitní typové konverze

- Převod hodnoty typu **double** na **int** je třeba **explicitně** předeepsat
- Dojde k „odseknutí“ necelé části hodnoty int

### Příklad

```
double x = 1.2; // definice proměnné typu double
int i; // definice proměnné typu int
int i = (int)x; // hodnota 1.2 typu double se převede
// na hodnotu 1 typu int
```

- Explicitní konverze je potenciálně nebezpečná

### Příklady

```
double d = 1e30; // i je -2147483648
int i = (int)d; // to je asi -2e9 místo 1e30

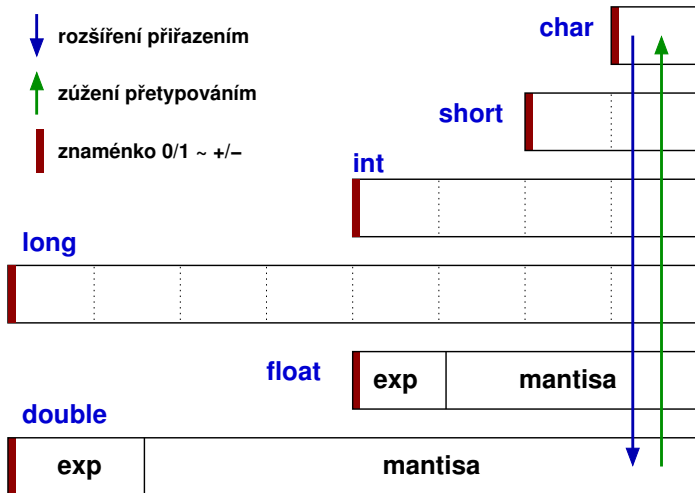
long l = 5000000000L; // i je 705032704
int i = (int)l; // (oříznuté 4 bajty)

lec07/demo-type_conversion.c
```



## Konverze primitivních číselných typů

- Primitivní datové typy jsou vzájemně nekompatibilní, ale jejich hodnoty lze převádět





# Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



# Matematické funkce

- `<math.h>` – základní funkce pro práci s „reálnými“ čísly
  - Výpočet odmocniny ne celého čísla  $x$   
`double sqrt(double x);, float sqrtf(float x);`  
*V C funkce nepřetěžujeme, proto jsou jména odlišena*
  - `double pow(double x, double y);` – výpočet obecné mocniny
  - `double atan2(double y, double x);` – výpočet  $\arctan y/x$  s určením kvadrantu
  - Symbolické konstanty – `M_PI`, `M_PI_2`, `M_PI_4`, atd.
    - `#define M_PI 3.14159265358979323846`
    - `#define M_PI_2 1.57079632679489661923`
    - `#define M_PI_4 0.78539816339744830962`
  - `isfinite()`, `isnan()`, `isless()`, ... – makra pro porovnání reálných čísel.
  - `round()`, `ceil()`, `floor()` – zaokrouhlování, převod na celá čísla
- `<complex.h>` – funkce pro počítání s komplexními čísly *ISO C99*
- `<fenv.h>` – funkce pro řízení zaokrouhlování a reprezentaci dle IEEE 754.

man math



# Část III

## Část 3 – Zadání 6. domácího úkolu (HW06)



## Zadání 6. domácího úkolu HW06

### Téma: Maticové počty

Povinné zadání: **2b**; Volitelné zadání: **3b**; Bonusové zadání: **3b**

- **Motivace:** Získání zkušenosti s dvojrozměrným polem.
- **Cíl:** Osvojit si práci s polem variabilní délky a předávání ukazatelů
- **Zadání:** <https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b0b36prp/hw/hw06>
  - Načtení vstupních hodnot dvou matic a znaku operace ('\*' – násobení).
  - **Volitelné zadání** rozšiřuje úlohu o další operace s maticemi sčítání ('+') a odčítání ('-'), které mohou být zapsány ve výrazu.
  - **Bonusové zadání** pak řeší zpracování celého výrazu, ve kterém jsou však jednotlivé matice uvedeny jako symboly, které jsou nejdříve definovány načtením hodnot matic ze standardního vstupu

Využití struct a dynamické alokace může být výhodnou, není však nutné.

- **Termín odevzdání:** 24.11.2018, 23:59:59 PST
- **Bonusová úloha:** 1.12.2018, 23:59:59 PST

*PST – Pacific Standard Time*



# Shrnutí přednášky



# Diskutovaná témata

- Struktury, způsoby definování, inicializace a paměťové reprezentace
- Uniony
- Přesnost výpočtu
- Vnitřní paměťová reprezentace celočíselných i neceločíselných číselných typů
- Knihovna `math.h`
- Příště: Standarní knihovny C. Rekurze.



# Diskutovaná témata

- Struktury, způsoby definování, inicializace a paměťové reprezentace
- Uniony
- Přesnost výpočtu
- Vnitřní paměťová reprezentace celočíselných i neceločíselných číselných typů
- Knihovna `math.h`
  
- **Příště: Standarní knihovny C. Rekurze.**

