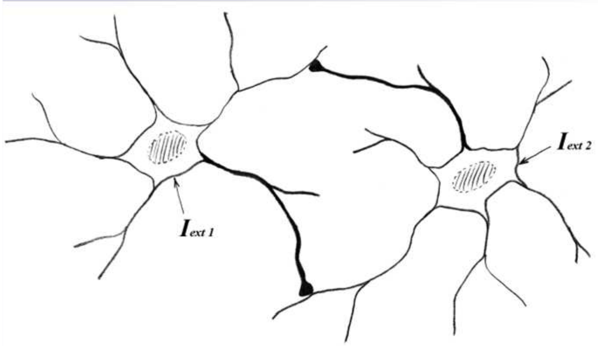
Neuronové sítě



Autoři použitých zdrojů Marcel Jiřina, Dan Novák, Jean-Christophe Prévotet, Petr Berka a další

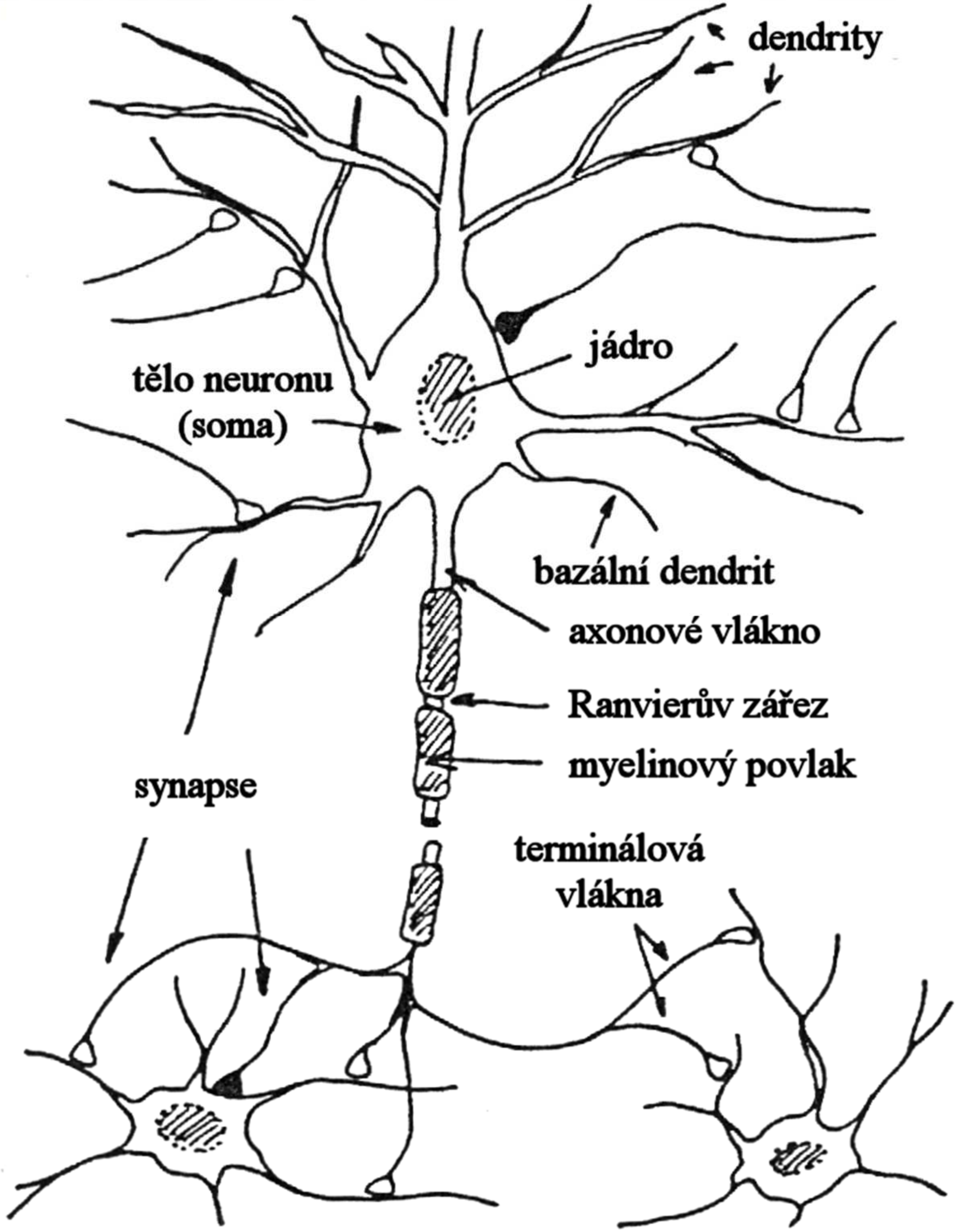
Neuronové sítě

Jsou inspirovány poznatky o neuronech a nervových sítích živých organizmů
a jejich schopnostmi:

- extrahovat a reprezentovat závislosti v datech, které nejsou zřejmé
- řešit silně nelineární úlohy
- učit se
- zevšeobecňovat

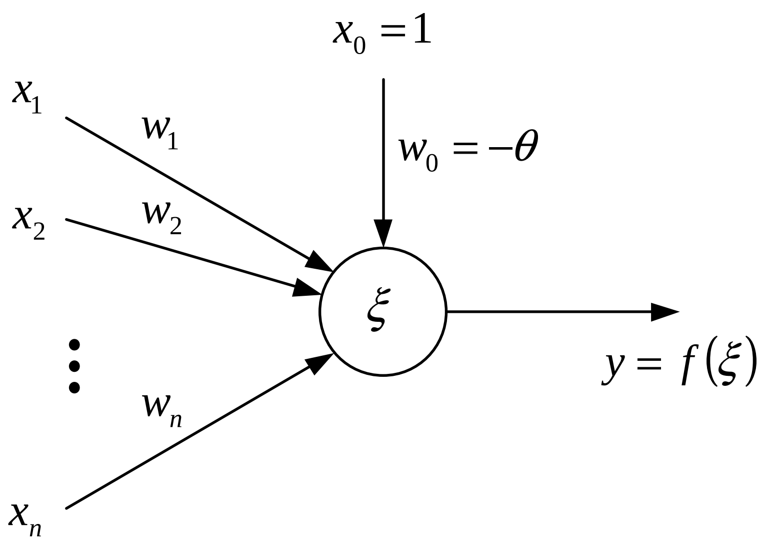
Využití pro klasifikaci, regresi a predikci časových řad

Biologická inspirace



Model neuronu

- *neuron* jako základní výpočetní jednotka neuronových sítí



x_0 označuje požadovanou hodnotu

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \theta = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i$$

$$f(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda \xi}}$$

Model neuronu

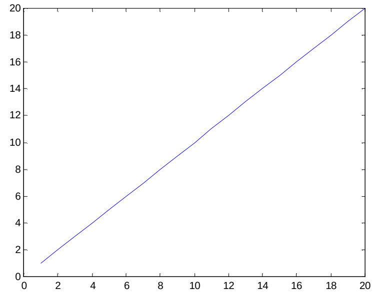
- obsahuje několik vstupů, které jsou ohodnoceny vahami a jeden výstup
- v neuronu pobíhají dva procesy:
  - výpočet (post-synaptického) **potenciálu**

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \theta = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i$$

  - výpočet **hodnoty výstupu** pomocí aktivační funkce, nejčastěji tzv. sigmoidy

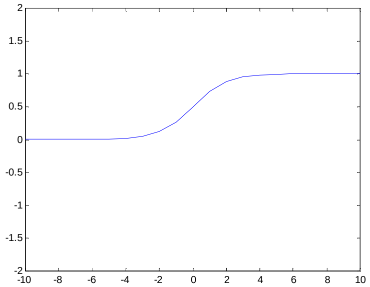
$$f(\xi) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\lambda\xi}}$$

Příklady aktivačních funkcí



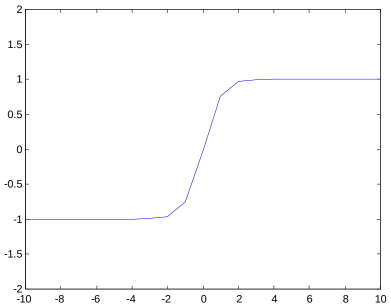
Lineární

$$y = x$$



Logistická (sigmoida)

$$y = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$



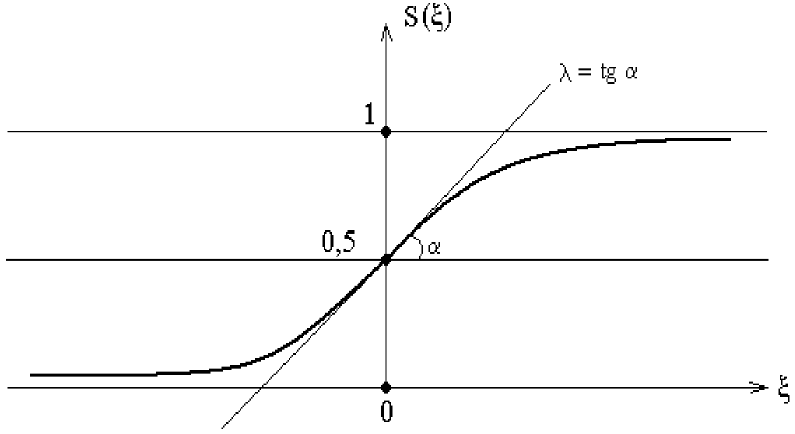
Hyperbolický tangens

$$y = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

Sigmoidní přenosová funkce:

$$S(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda\xi)}$$

$$z = S\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \Theta\right)$$



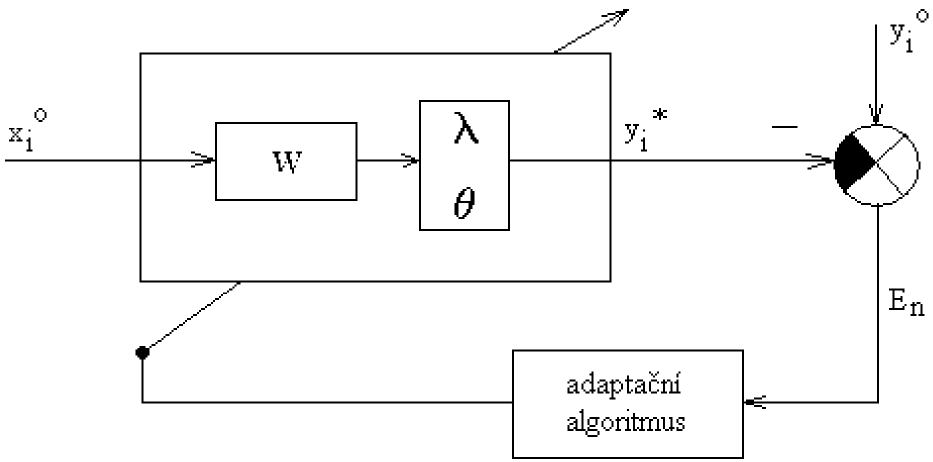
Přenos neuronové sítě je určen:

topologií sítě – počet vrstev a jejich neuronů
parametry sítě

Parametry neuronové sítě:

- váhové koeficienty vazeb neuronů $w_{jk} \in \langle 0, 1 \rangle$
- prahové hodnoty Θ
- parametry přenosové funkce *S* λ

Procedura učení – optimalizační gradientní algoritmus Back-Propagation (BP)



Strategie optimalizace pro ***K*** trénovacích příkladů [$\boldsymbol{x}_j$, y_j] , kde $\boldsymbol{x}_j$ je vstup o *m* dimenzích

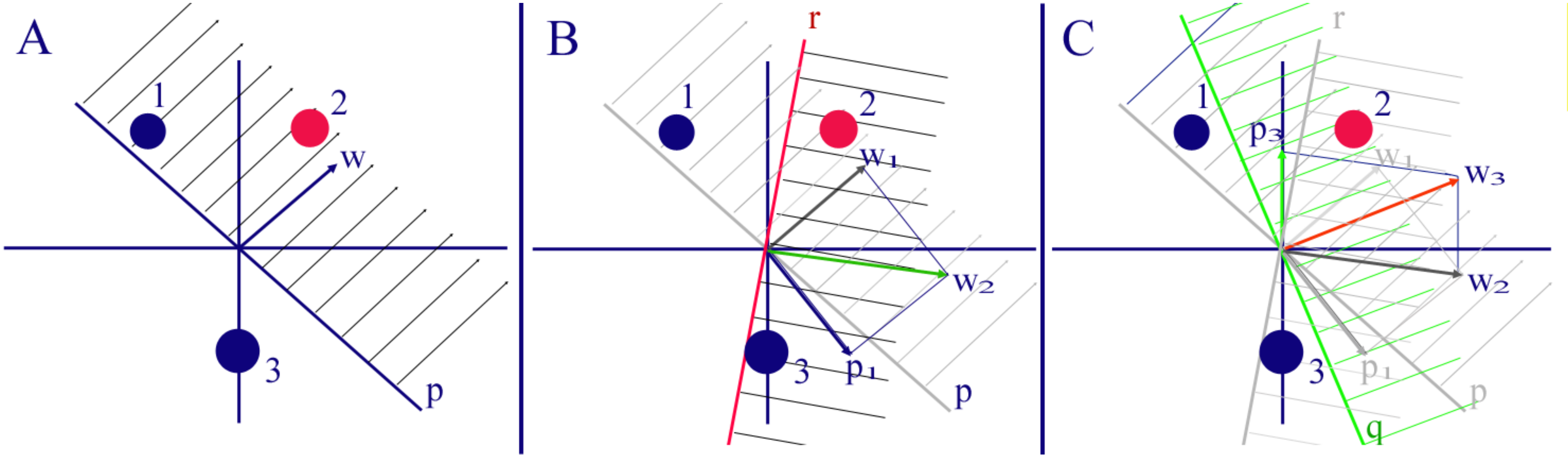
$$E_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K} \left(y_j^0 - y_j^* \right)^2 \rightarrow \min$$

kde y_j^* je výstup perc.

Adaptace váhy $$w(t+1) = \mathrm{w(t)} + \mu \frac{\partial \mathrm{E_n}}{\partial \mathrm{w(t)}} \qquad \mu \in \langle 0,1 \rangle$$

Pro perceptron je $y^* = \sum_{j=1}^{m} (w_j x_j)$ a tedy $$\frac{\partial \mathrm{E_n}}{\partial \mathrm{w(t)}} = \sum_{j=1}^{K} \left(y_j^0 - y_j^* \right) (-x_j)$$

Při inkrementální (stochastické) aproximaci $$w(t+1) = \mathrm{w(t)} - \mu.(y_i - y_i^*).x_i$$

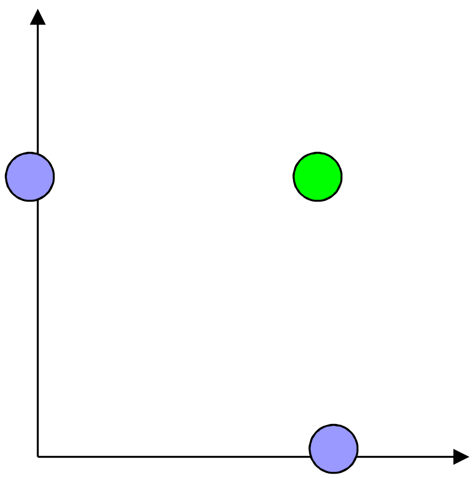


3 fáze učení jednoduchého perceptronu - **A**: je zvolen náhodně vektor vah $\mathbf{w_1}$ a k němu určena kolmá rozhodovací hranice (**p**), zjišťujeme výstup pro bod 1 - leží v oblasti s výstupem 1, i když má ležet v oblasti s výstupem 0 → **B**: odečteme vektor bodu 1 od vektoru vah $\mathbf{w_1}$ a získáme nový vektor vah $\mathbf{w_2}$ a k němu příslušnou rozhodovací hranici znázorněnou přímkou **r**, bod 2 je umístěn správně, bodu 3 přiřadí síť hodnotu 1 i když má dostat výstup 0 → **C**: odečteme vektor bodu 3 od vektoru vah $\mathbf{w_2}$ a získáme nový vektor vah $\mathbf{w_3}$ → nyní je již problém vyřešen - všem bodům je přiřazena odpovídající hodnota výstupu, řešením problému je tedy vektor vah $\mathbf{w_3}$ s příslušnou rozhodovací hranicí **q**.

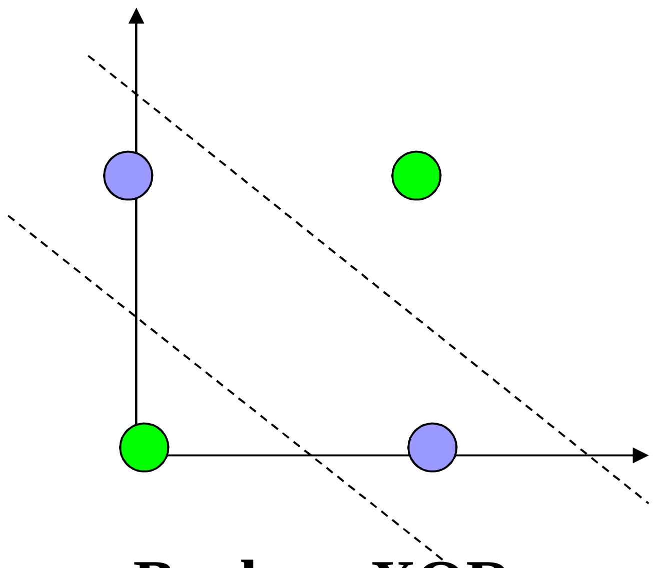
Perceptron Limitations

A single layer perceptron can only learn linearly separable problems.

- Boolean AND function is linearly separable,
- whereas Boolean XOR function (and the parity problem in general) is not.



Boolean AND



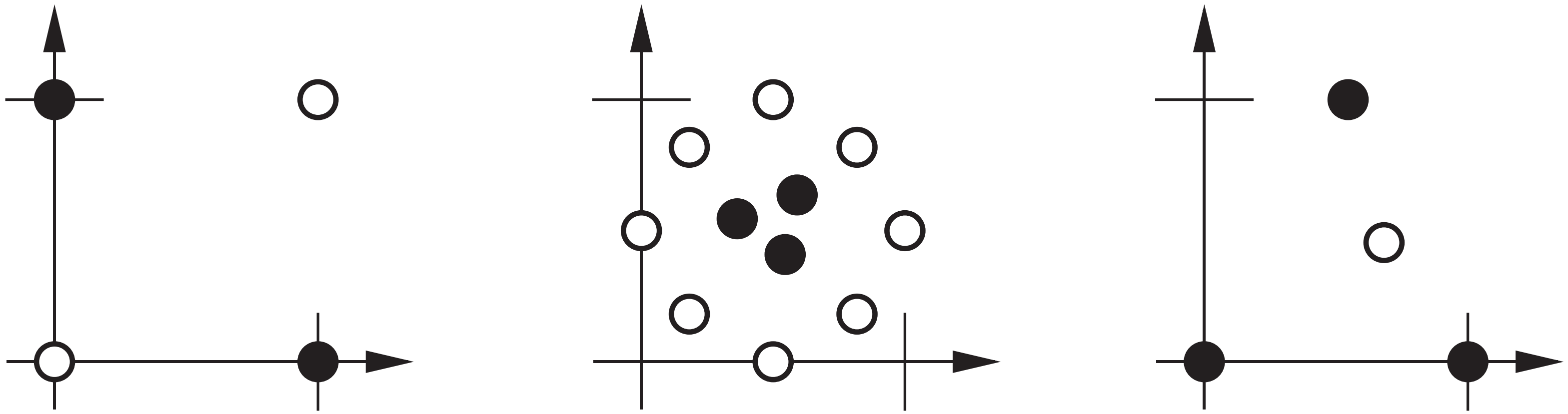
Boolean XOR

Perceptron Limitations

Linear Decision Boundary

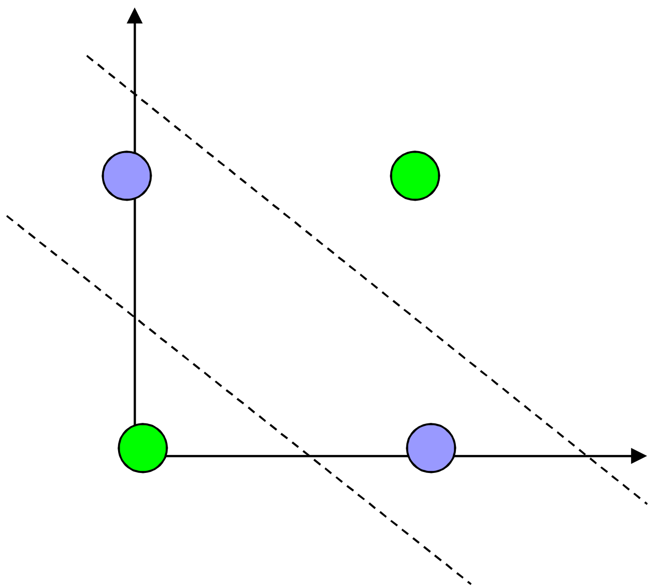
$$_1\mathbf{w}^T\mathbf{p} + b = 0$$

Linearly Inseparable Problems



Perceptron Limitations

- XOR problem: What if we use more layers of neurons in a perceptron?
  - Each neuron implementing one decision boundary and the next layer combining the two?

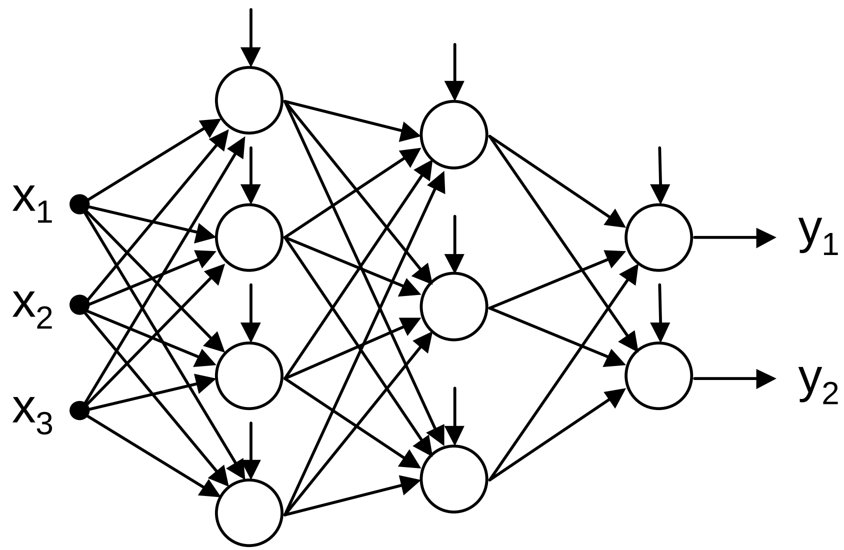


What could be the learning rule for each neuron?

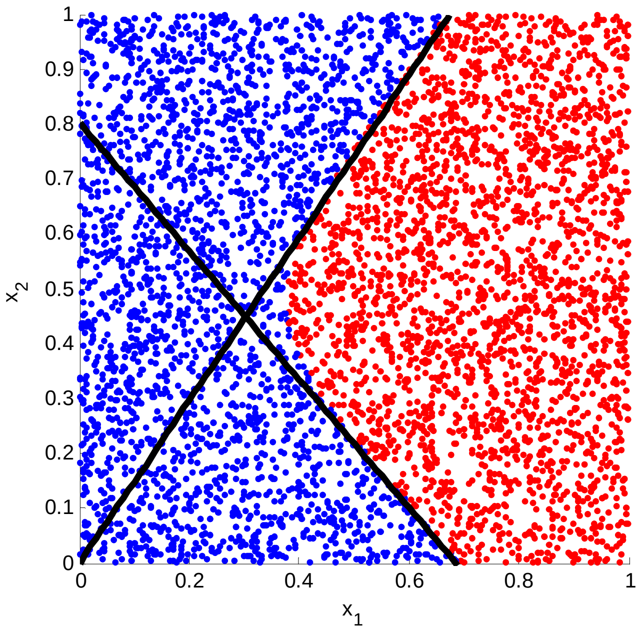
Multilayer networks and the backpropagation learning algorithm

Struktura sítě

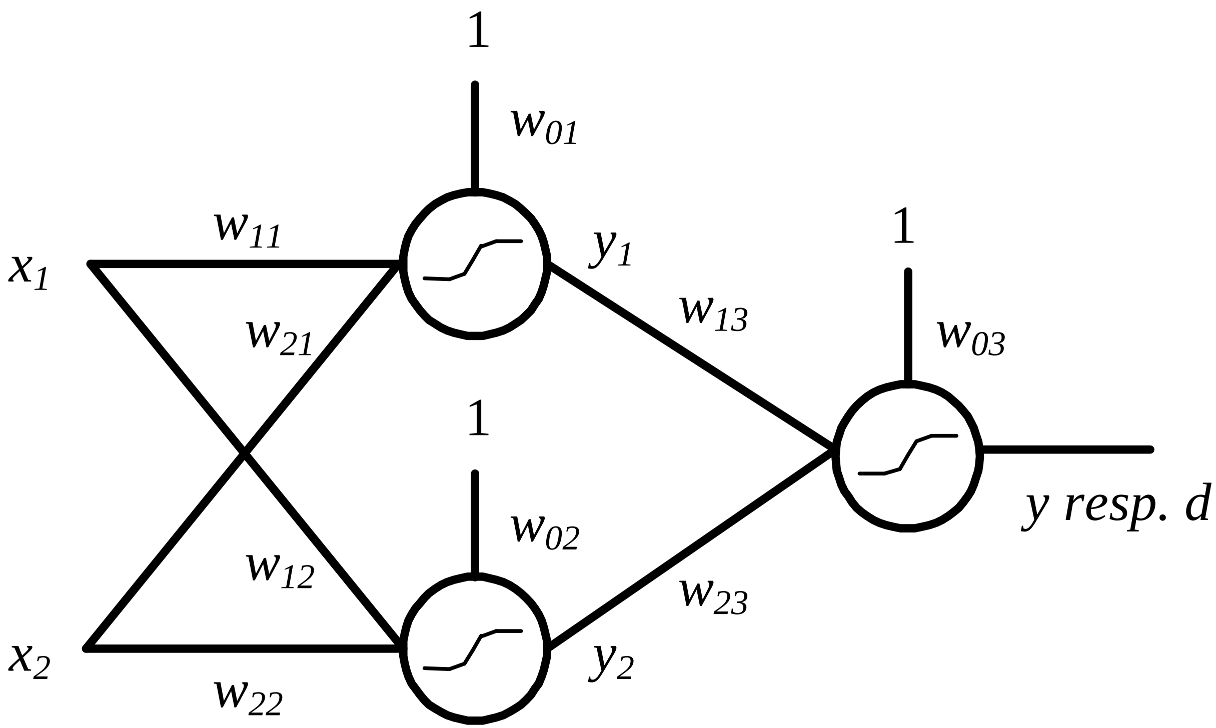
- Pro větší výpočetní sílu se neurony uspořádávají do sítí neuronů. Nejčastěji se používá síť s 1 skrytou vrstvou.
- Příklad sítě s 3-rozměrným vstupem [x_1, x_2, x_3], 2-rozměrným výstupem [y_1, y_2] a 2 skrytými vrstvami



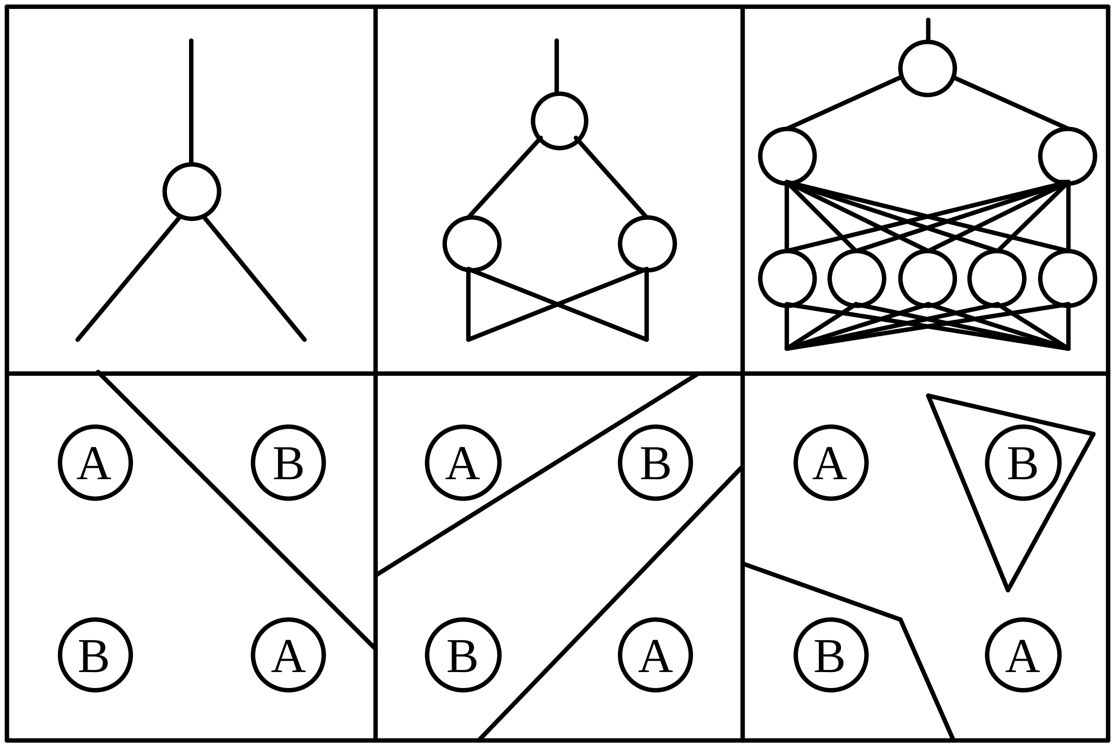
Vícevrstvá perceptonová síť



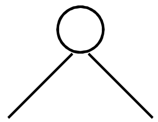
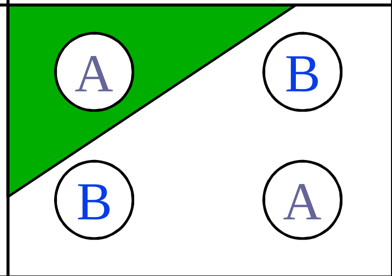
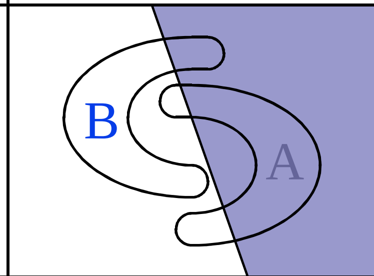
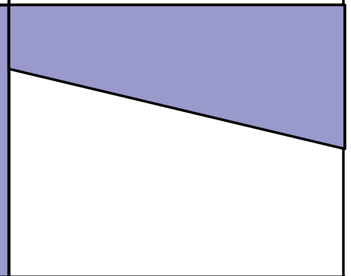
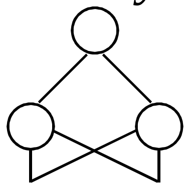
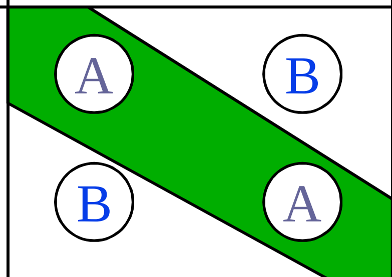
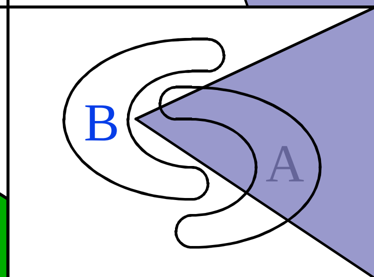
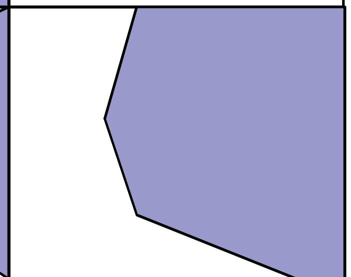
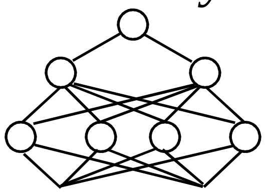
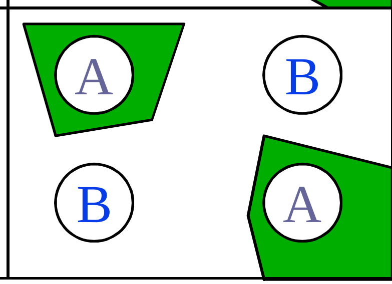
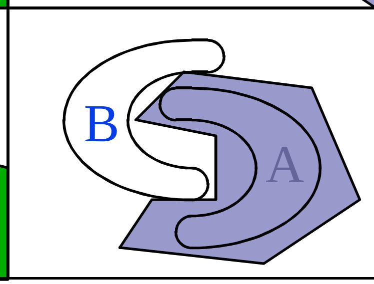
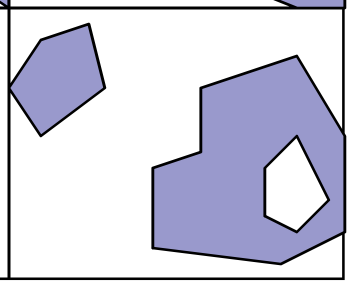
Vícevrstvá perceptonová síť



Vícevrstvá perceptonová síť



Different non linearly separable problems

Structure	Types of Decision Regions	Exclusive-OR Problem	Classes with Meshed regions	Most General Region Shapes
Single-Layer 	Half Plane Bounded By Hyperplane			
Two-Layer 	Convex Open Or Closed Regions			
Three-Layer 	Abitrary (Complexity Limited by No. of Nodes)			

Vícevrstvá perceptonová síť

- Věta (Kolmogorovova, 1957) Nechť $n > 1$ je přirozené číslo a f je spojitá reálná funkce. Potom lze tuto funkci reprezentovat vztahem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \varphi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_{ij}(x_i) \right)$$

kde φ_j a ψ_{ij} jsou spojité funkce jedné proměnné.

- libovolnou rozumnou, tj. spojitou, funkci lze zapsat (reprezentovat) s pomocí do sebe vnořených funkcí jediné proměnné.

Kolmogorovův teorém

- Přitom pro danou funkci f jsou specifické pouze funkce Ψ_i, zatímco funkce Φ_i jsou pro dané *n* a f nezávislé. Hecht-Nielsen ukázal, že tuto univerzální vlastnost funkcí Φ_{pq} lze využít též pro reprezentaci funkcí s hodnotami v prostoru vyšších rozměrů.
- Kolmogorovův teorém doplňovali v pozdějších letech někteří další autoři, např. Lorenz, který dokázal, že je možno vystačit pouze s jedinou funkcí Ψ *a* D.A. Sprecher, který našel podmínky pro to, aby funkce Ψ_q měly tvar $\lambda_p\Phi_p$, kde λ_p jsou konstanty.
- Aplikace Kolmogorovova teorému na problematiku neuronových sítí vede k poznatku, že k tomu, aby bylo transformační funkcí *T* neuronové sítě možno aproximovat libovolnou funkci f postačí, aby příslušná **neuronová síť měla alespoň tři vrstvy o odpovídajících počtech neuronů (výkonných prvků) v jednotlivých vrstvác**h.
- Funkci *T* lze tedy implementovat jako transformační funkci neuronové sítě, která má nejméně tři vrstvy s dopřednou vzájemnou vazbou, nepočítaje v to vstupní, distribuční vrstvu.

Typy neuronových sítí

- Existuje celá řada neuronových sítí, např.
  - Vícevrstvá perceptonová síť (MLP)
  - Hopfieldova síť
  - Kohonenovy samoorganizující se mapy
  - Síť RBF
  - ...
- Každý typ se hodí pro jinou třídu úloh
- Základními úlohami neuronových sítí jsou **klasifikace** a **regrese** (aproximace)
- Podle přítomnosti „učitele“ můžeme neuronové sítě dělit na sítě s učitelem a bez učitele

Proces učení neuronových sítí

- Pro učení (trénování NS) je třeba mít dostatek reprezentativních příkladů
- Trénovací, výběrová, testovací množina
- Na začátku učení bývají váhy nejčastěji nastaveny na náhodná čísla
- Proces učení se snaží minimalizovat odchylku (chybu) mezi skutečným (aktuálním) a požadovaným výstupem
- Každá neuronová síť má jiný algoritmus učení, vesměs jsou to ale iterační procesy

Backpropagation algoritmus

- Inicializuj váhy sítě malými náhod. čísly (např. z intervalu (-0,05 , 0,05))
- Dokud není splněno kriterium pro zastavení

Pro každý příklad [$\boldsymbol{x}$,y] z trénovacích dat

1. Spočítej výstup out_u pro každý neuron u v síti
2. Pro každý neuron v ve výstupní vrstvě spočítej chybu

   $Err_v = out_v \cdot (1 - out_v) \cdot (y_v - out_v)$
3. Pro každý neuron s ve skryté vrstvě spočítej chybu

   $Err_s = out_s \cdot (1 - out_s) \cdot \sum_{v \in vystup} \left(w_{s,v} \cdot Err_v\right)$
4. Pro každou vazbu vedoucí od neuronu j do neuronu k modifikuj váhu vazby

   $w_{j,k} = w_{j,k} + \Delta w_{j,k}$, kde $\Delta w_{j,k} = \eta \; Err_k \, x_{j,k}$

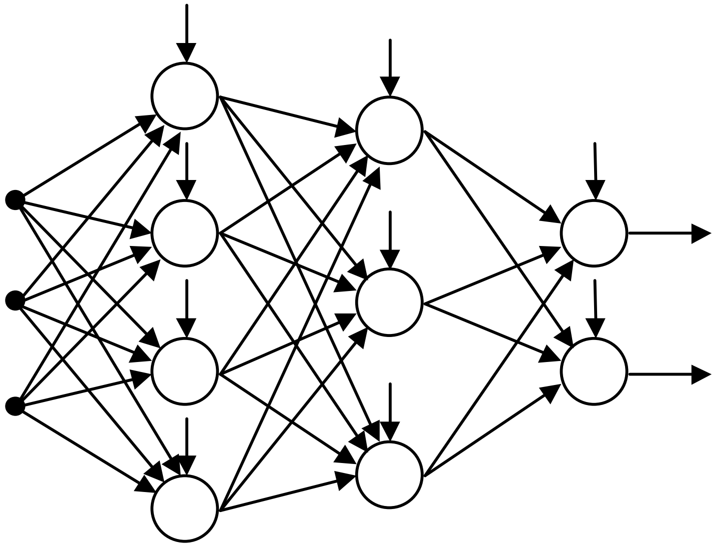
Návrh neuronové sítě

- Pro řešení každé úlohy musí být navržena jedinečná neuronová síť
- Otázka vhodného výběru sítě
- Výběr struktury sítě, tj. počet vstupů, výstupů, vrstev, skrytých neuronů, typ aktivačních funkcí, atd.
- Výběr trénovacího algoritmu
- Problém *over-sizing*, *over-learning (over-fitting)*

Vícevrstvá perceptonová síť

- Nejrozšířenější a nejpoužívanější síť
- Jak pro klasifikaci tak pro regresi (a tedy i predikci časových řad)
- Síť s učitelem
- Aktivační funkcí je nejčastěji sigmoida
- Otázka výběru počtu vrstev a počtu neuronů
- Kromě základního algoritmu *backpropagation* existuje řada sofistikovaných metod učení, např. metoda sdružených gradientů, Levenbergova-Marquardtova metoda atd.

Vícevrstvá perceptonová síť



- K nevýhodám sítě patří obtížné řešení problému lokálních minim a poměrně dlouhá doba učení
- Zlepšení pomocí momentu, šumu, dalších neuronů

Vícevrstvá perceptonová síť

- Metody zlepšující chování sítě
  - Velikost parametru učení
  - Moment
  - Šum
  - Přidání neuronů

Síť RBF

- Radial Basis Function (RBF), síť radiálních jednotek
- Pevný počet vrstev
- Dva typy neuronů: radiální a perceptronového typu (nejčastěji lineární)
- Váhy v první vrstvě jsou nastavovány pevně na začátku učení, ve druhé vrstvě podobně jako u vícevrstvé perceptronové sítě nebo přímo regresí

Síť RBF

- Postsynaptický potenciál

$$\xi = \frac{\left\| \vec{x} - \vec{c} \right\|}{b}$$

- Aktivační funkce

$$\Phi(\xi) = e^{-\xi^2}$$

- Adaptace vah

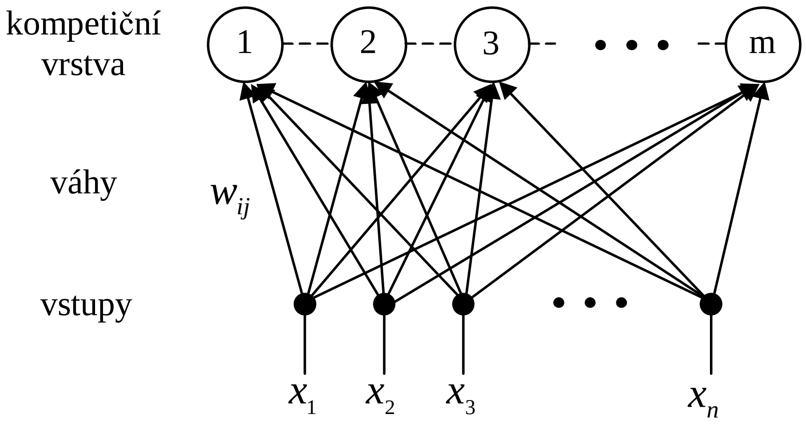
$$y_k = w_{0k} + \sum_{j=1}^{h} w_{jk} \Phi_j(\xi) = \sum_{j=0}^{h} w_{jk} \Phi_j(\xi)$$

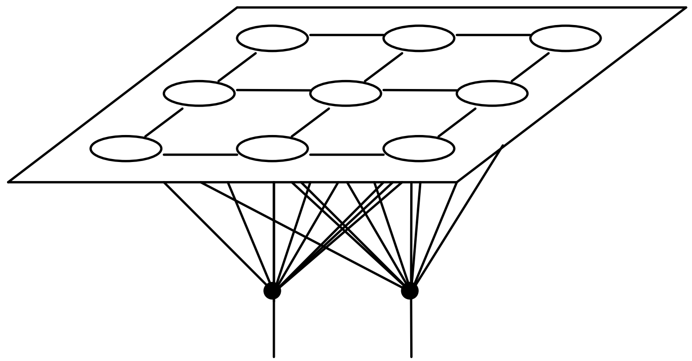
Kohonenova síť

- Kohonenova síť (SOM, SOFM)
- Bez učitele, provádí proto pouze analýzu vstupních dat, přesněji druh shlukové analýzy
- Obsahuje jedinou vrstvu radiálních neuronů, které mohou být uspořádaný to tzv. mřížky
- Síť je možné rozšířit tak, aby byla schopna klasifikace (Learning Vector Quantization – LVQ)

Kohonenova síť

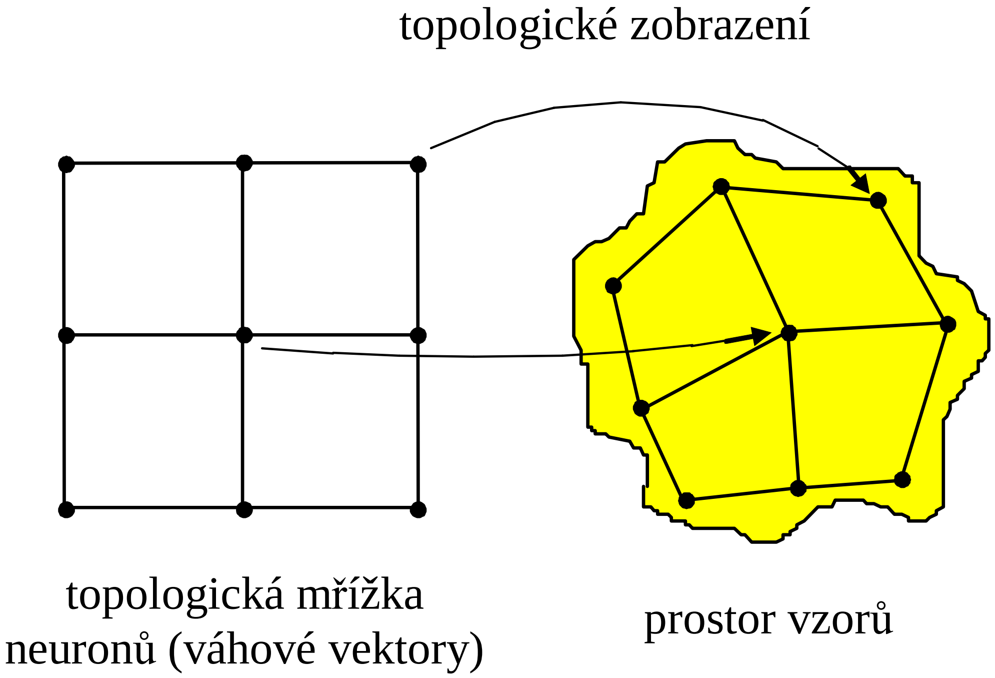
- Struktura Kohonenovy sítě





$$d_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - w_{ij}\right)^2$$

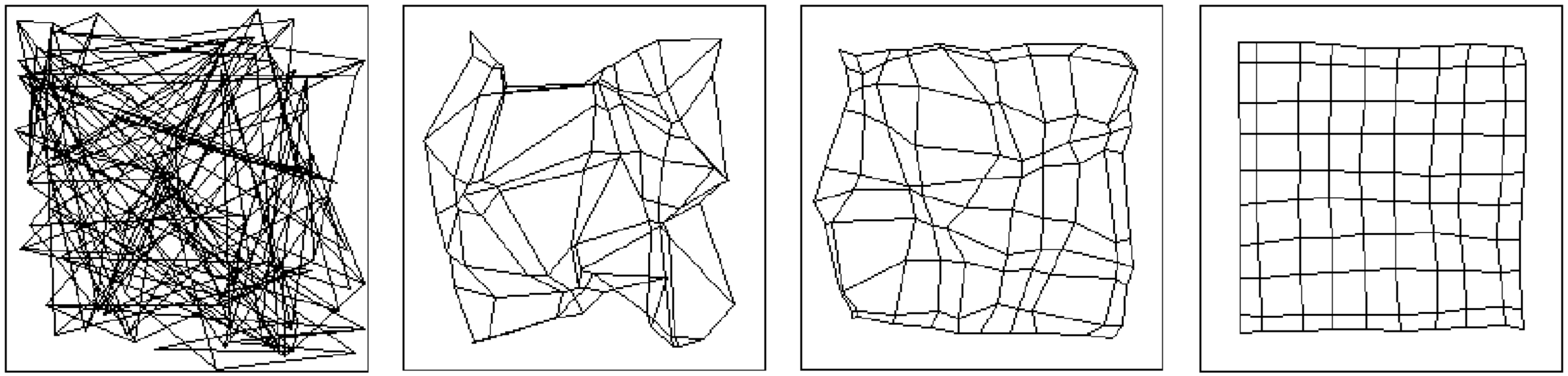
$$d_{j^*} = \min_j \left(d_j\right)$$



topologické zobrazení
topologická mřížka
neuronů (váhové vektory)
prostor vzorů

Kohonenova síť

- Proces učení (adaptace vah)



Kohonenova síť

- Vzdálenosti vzoru k neuronům

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - w_{ij} \right)^2$$

- Výběr nejbližšího neuronu

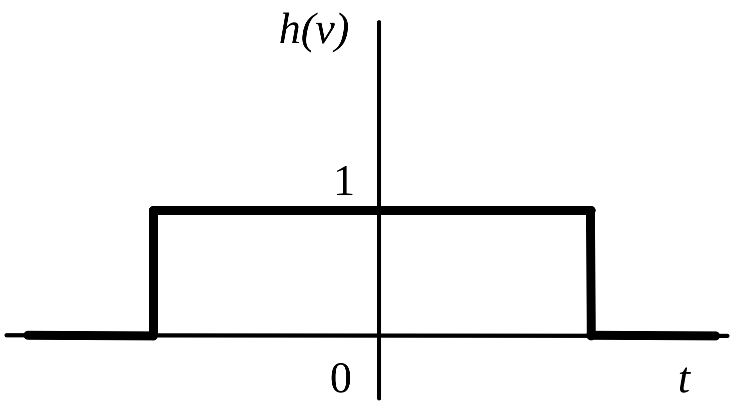
$$d_{j^*} = \min_j \left(d_j \right)$$

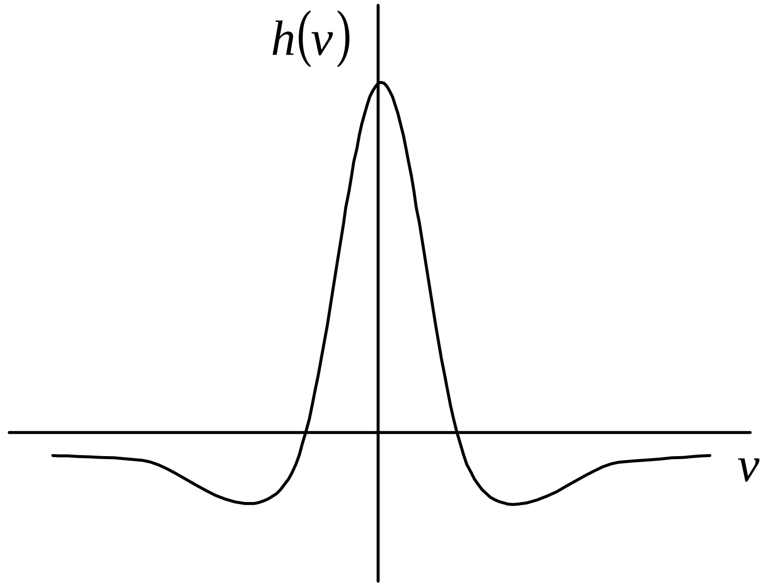
- Adaptace vah

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta(t) h(v,t) \left(x_i(t) - w_{ij}(t) \right)$$

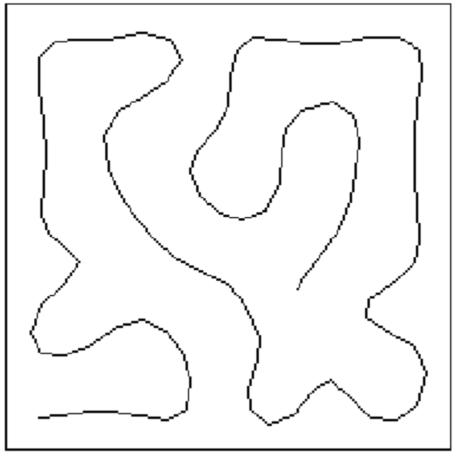
Kohonenova síť

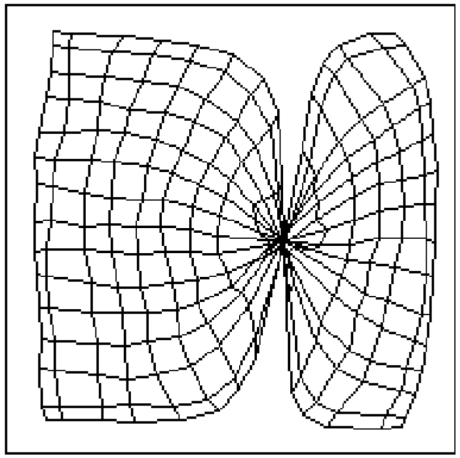
- Adaptační funkce

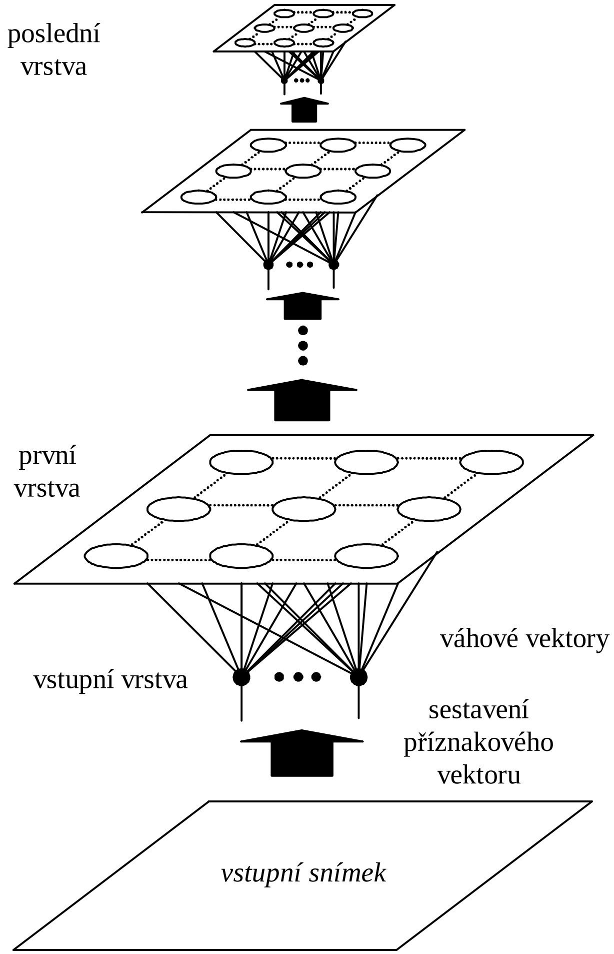




Kohonenova síť





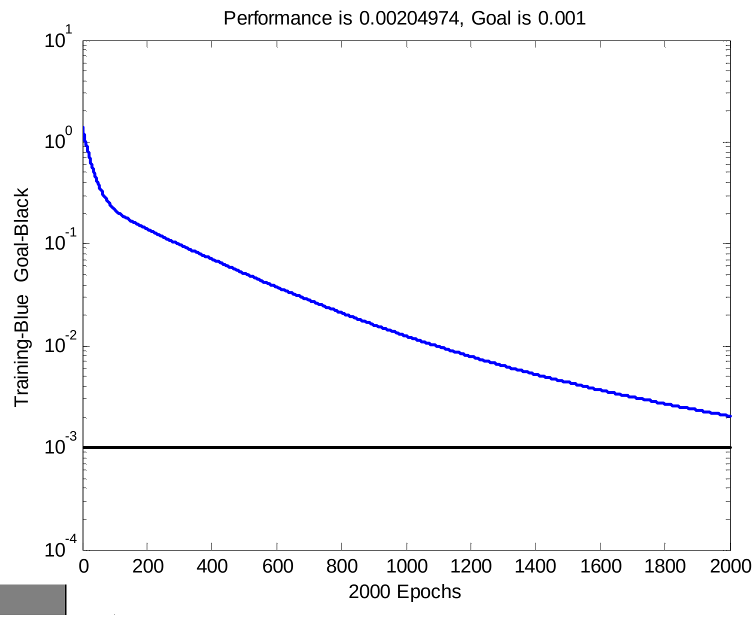


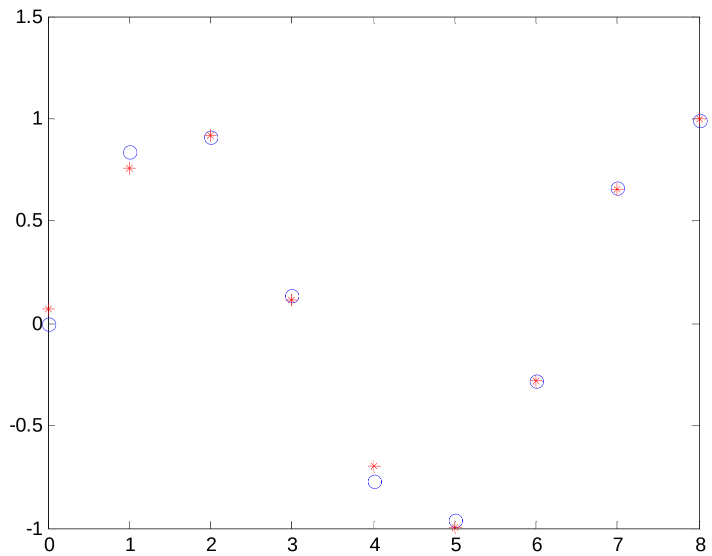
Hopfieldova síť

- Navržena J. Hopfieldem v roce 1982
- Autoasociativní paměť
- Pracuje s bipolárními (binárními) hodotami vstupů/výstupů
- Spojitá varianta Hopfieldovy sítě se používá pro řešení optimalizačních problémů

Softwarové prostředky pro NS

- Matlab Neural Network Toolbox
- Statistica Neural Networks





History of Artificial Neural Networks (ANNs)

- Pre-1940: von Hemholtz, Mach, Pavlov, etc.
  - General theories of learning, vision, conditioning
  - No specific mathematical models of neuron operation
- **1940s: Hebb, McCulloch and Pitts**
  - Hebb: Explained mechanism for learning in biological neurons
  - McCulloch and Pitts: First neural model
- **1950s: Rosenblatt, Widrow and Hoff**
  - First practical networks (Perceptron and Adaline) and corresponding learning rules
- **1960s: Minsky and Papert**
  - Demonstrated limitations of existing neural networks
  - New learning algorithms not forthcoming, **most research suspended**
- 1970s: Amari, Anderson, Fukushima, Grossberg, Kohonen
  - Progress continues, although at a slower pace
- 1980s: **Grossberg, Hopfield, Kohonen, Rumelhart, etc.**
  - Important new developments cause a **resurgence in the field** (Backpropagation algorithm)

Literatura

- *české učebnice*
- Mařík V., Štěpánková O., Lažanský J. a kol.: *Umělá inteligence 4*. Academia, Praha, 2003.
- Šíma J., Neruda R.: *Teoretické otázky neuronových sítí*. Matfyzpress, Praha, 1996.

- *zahraniční učebnice*
- Bishop C. M.: *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, NewYork, 1995.
- Fausett, L.: *Fundamentals of Neural Networks*. Prentice Hall, New York, 1994.
- Hassoun M. H.: *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1995.
- Haykin, S.: *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Macmillan Publishing, New York, 1994.
- Rojas R.: Neural Networks: A Systematic Introduction. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 1996.