



Detekce jádra rovinného polygonu



Václav Pruner

Obsah

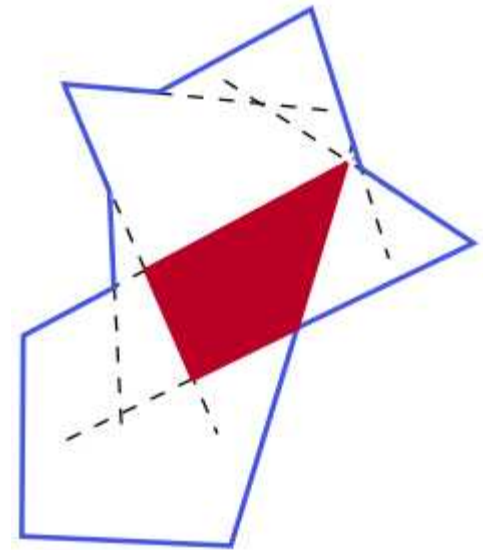
- Motivace
- Jádro polygonu
- Algoritmus
- Příklad
- Složitost

□ Problémy viditelnosti

- Robot, vybavený snímacím zařízením se zorným polem 360° , se „probudí“ v neznámé místnosti tvaru polygonu a má za úkol dostat se na místo, odkud uvidí celou místnost.

Jádro polygonu

- Množina vnitřních bodů polygonu, ze které jsou všechny body polygonu přímo viditelné (úsečka spojující bod z jádra s libovolným bodem polygonu leží celá v polygonu).
- Průnik levých polorovin určených hranami polygonu (levých ve smyslu průchodu hran proti směru hodinových ručiček).



Algoritmus (Lee, Preparata)

□ Vstup

- Polygon P o alespoň 4 vrcholech
- Posloupnost vrcholů (a hran) - uspořádání proti směru hodinových ručiček

□ Základní idea

- Vytváření konvexních polygonů K_1, \dots, K_{N-1} takových, že

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_{N-1}, K_{N-1} \text{ je jádro}$$

Algoritmus - základní pojmy

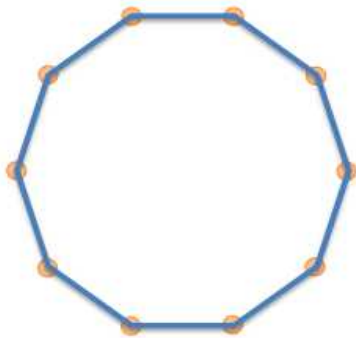
5/42

Detekce jádra rovinného polygonu

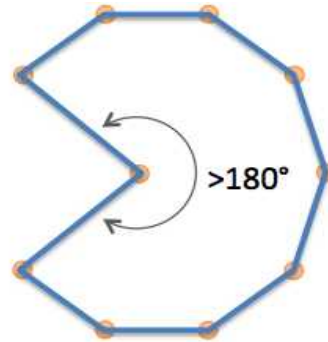
Václav Pruner

□ Dva typy vrcholů polygonu P

- Reflexní vrchol - vnitřní úhel větší než 180°
- Konvexní vrchol - vnitřní úhel menší nebo roven 180°



No reflex vertices.



One reflex vertex.

[<http://hansmuller-webkit.blogspot.cz/2013/01/getting-to-point-reflex-vertices.html>]

Algoritmus - základní pojmy

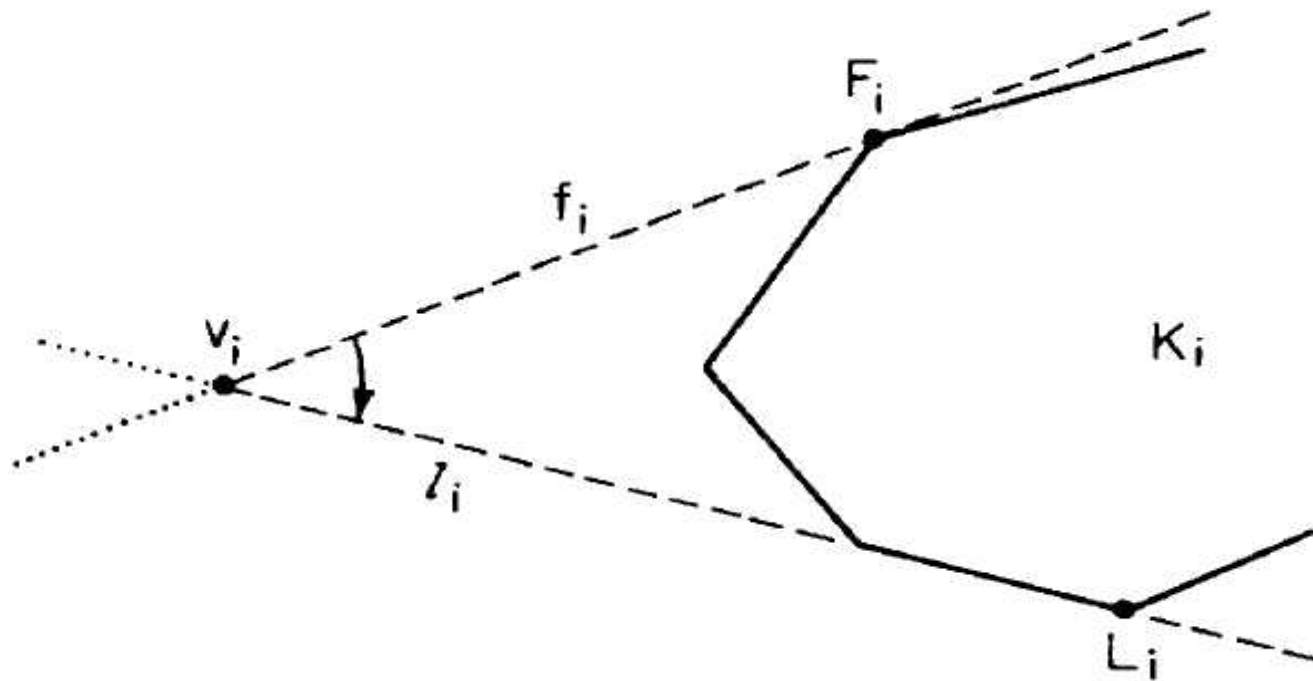
- Dva význačné vrcholy $K_i - F_i, L_i$
- Polopřímky podpory f_i, l_i
 - Procházejí vrcholem v_i
 - S K_i jeden společný bod tak, že celé K_i leží na jejich jedné straně
 - Úhel daný f_i, l_i menší než 180° (po směru hod. ruč.)
 - Vzdálenější ze společných bodů $f_i (l_i)$ a K_i je bod $F_i (L_i)$

Algoritmus - základní pojmy

7/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



[PREP]

Algoritmus - inicializace

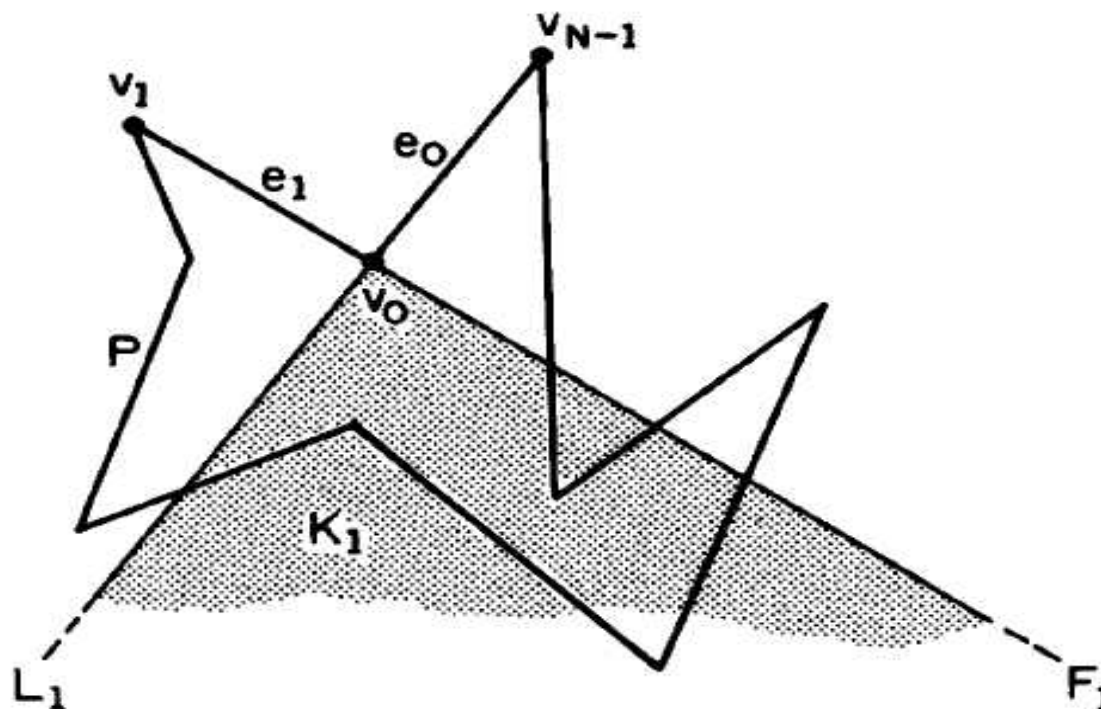
- Začátek v reflexním vrcholu v_0
- K_1 - průsečík levých polorovin daných orientovanými hranami $e_0 = (v_{N-1}, v_0)$ a $e_1 = (v_0, v_1)$
- L_1 - bod v nekonečnu určený hranou e_0
- F_1 - bod v nekonečnu určený hranou e_1

Algoritmus - inicializace

9/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



[PREP]

Algoritmus - obecný krok

- Procházení vrcholů proti směru hodinových ručiček
- V závislosti na typu vrcholu v_i (reflexní, konvexní) a vzájemné poloze e_{i+1} a význačných bodů F_i, L_i
úprava K

Algoritmus - obecný krok

- 1. v_i je reflexní
- 1.1 F_i vpravo od e_{i+1}
 - Hledání průsečíku w_1 přímky e_{i+1} a K_i od vrcholu F_i proti směru hodinových ručiček
 - Pokud w_1 neexistuje, polygon nemá jádro

Algoritmus - obecný krok

□ 1.1.a

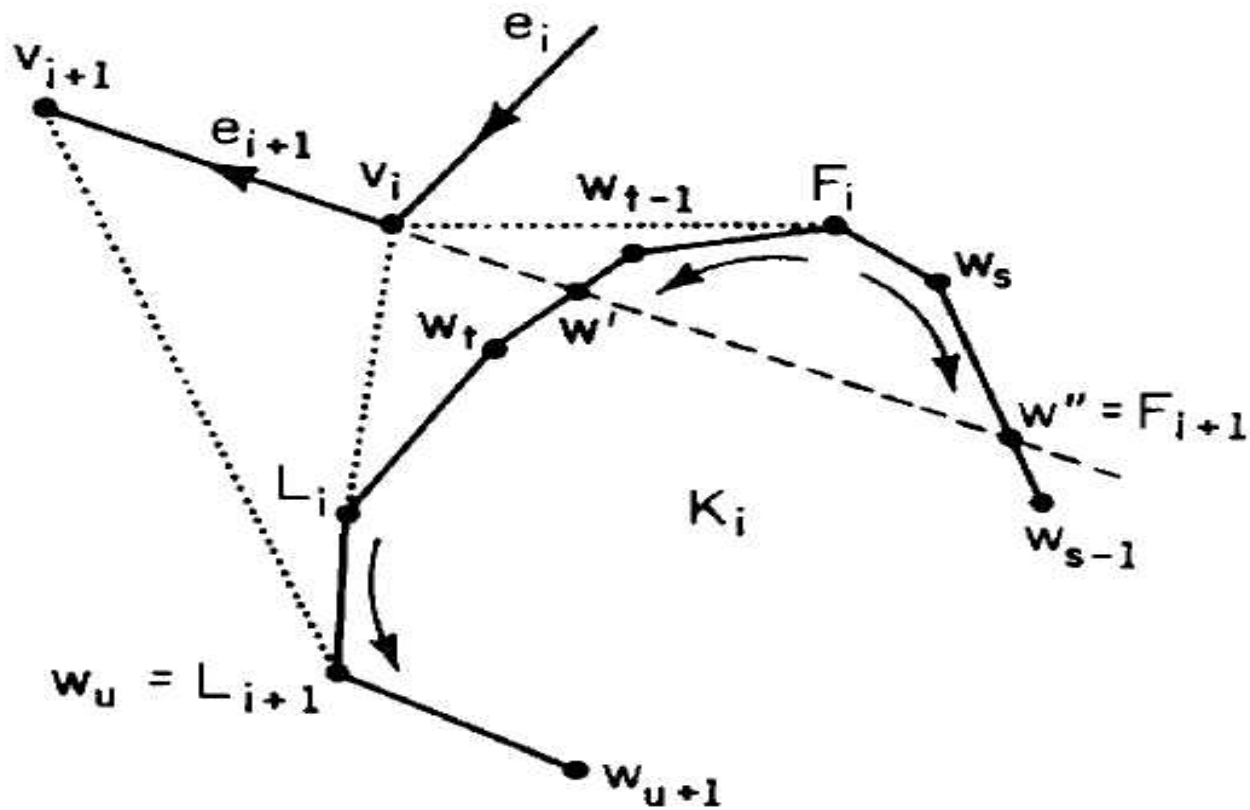
- Existuje průsečík w_2 přímky e_{i+1} a K_i hledaný od vrcholu F_i po směru hodinových ručiček
- Odseknutím oblasti mezi w_1 a w_2 z K_i vznikne K_{i+1}

Algoritmus - obecný krok

13/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



[PREP]

Algoritmus - obecný krok

□ 1.1.b

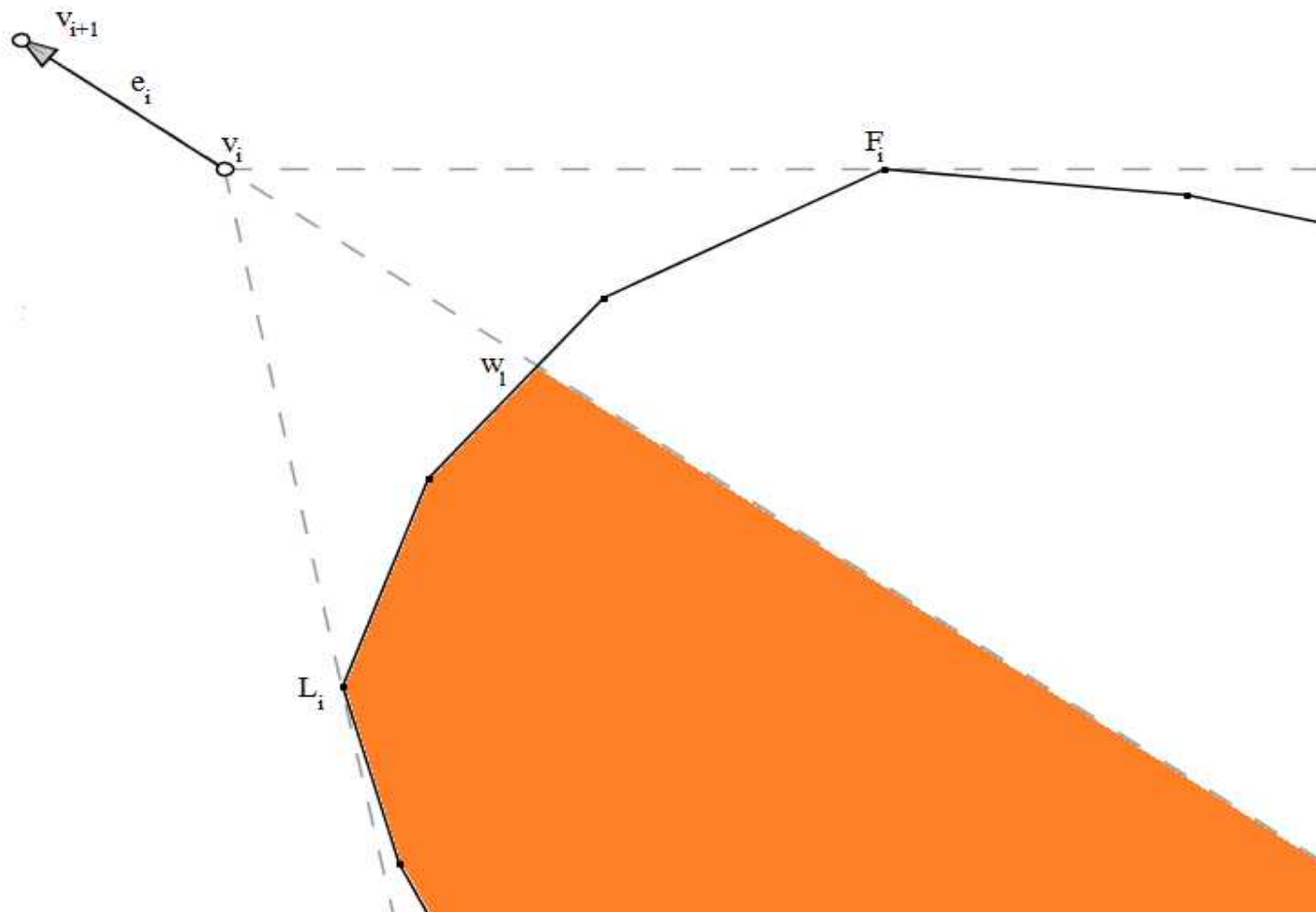
- Neexistuje průsečík w_2 přímky e_{i+1} a K_i hledaný od vrcholu F_i po směru hodinových ručiček
- e_{i+1} sevřena hraničními polopřímkami K_i
- Odstřižením části K_i ležící před w_1 vznikne K_{i+1}

Algoritmus - obecný krok

15/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



Algoritmus - obecný krok

□ 1.1.c

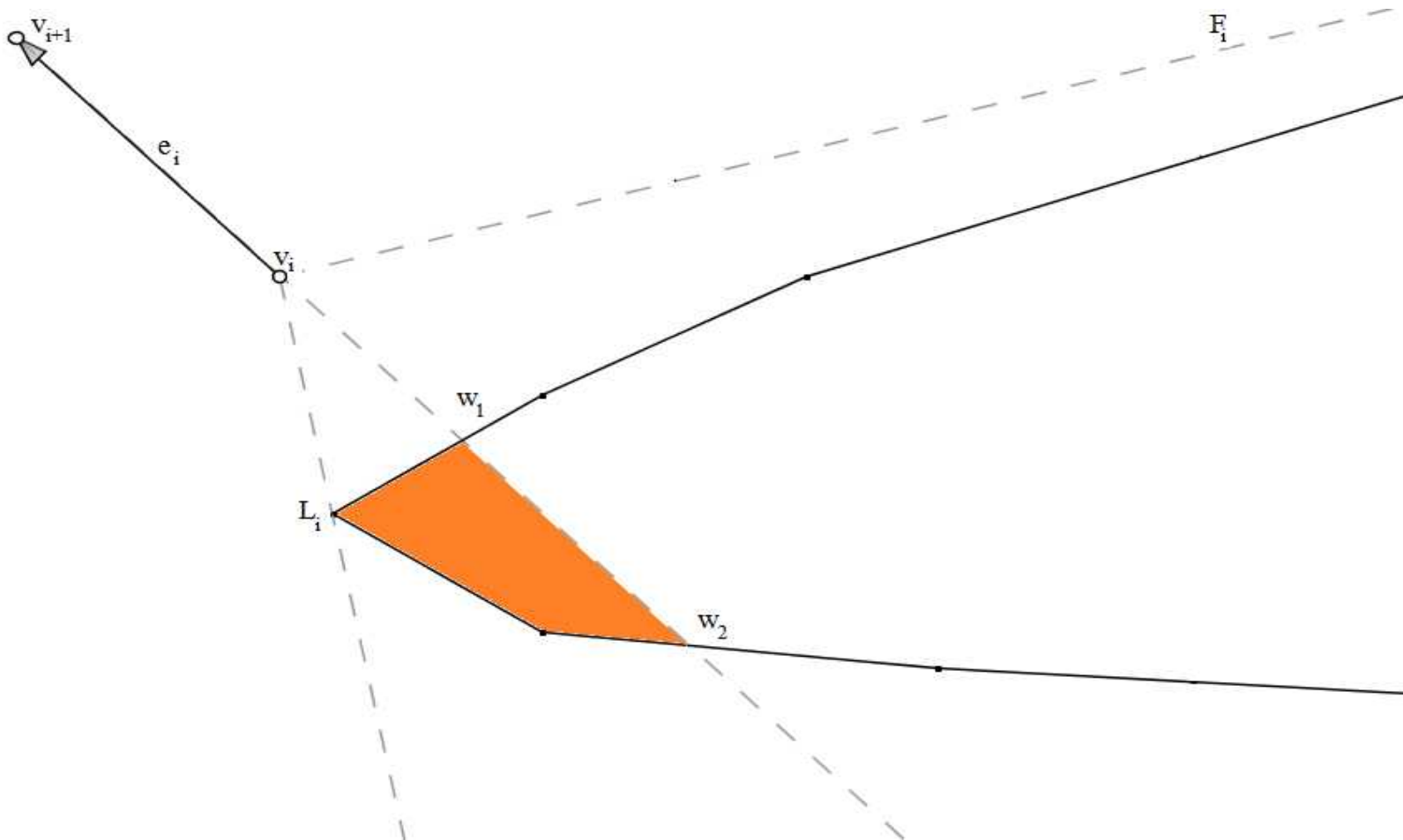
- Nenastane-li 1.1.a ani 1.1.b
- Od konce K_i se hledá průsečík w_2 přímky e_{i+1} a K_i
- K_{i+1} je tvořena oblastí mezi w_1 a w_2

Algoritmus - obecný krok

17/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



Algoritmus - obecný krok

□ 1.1.d aktualizace L a F

- $F_{i+1} = w_2$ nebo $F_{i+1} =$ bod v nekonečnu daný přímkou e_{i+1}
- L_{i+1}
 - Procházení K_i proti směru hodinových ručiček z L_i dokud není nalezen vrchol w_u takový, že w_{u+1} leží nalevo od polopřímky dané vrcholy v_{i+1} a w_u , jinak se z L_i stane L_{i+1}

Algoritmus - obecný krok

□ 1.2 F_i vlevo od e_{i+1}

- K se nezmění

- L_{i+1} jako v 1.1.d

- F_{i+1}

– Procházení K_i proti směru hodinových ručiček z F_i dokud není

nalezen vrchol w_u takový, že w_{u+1} leží napravo od

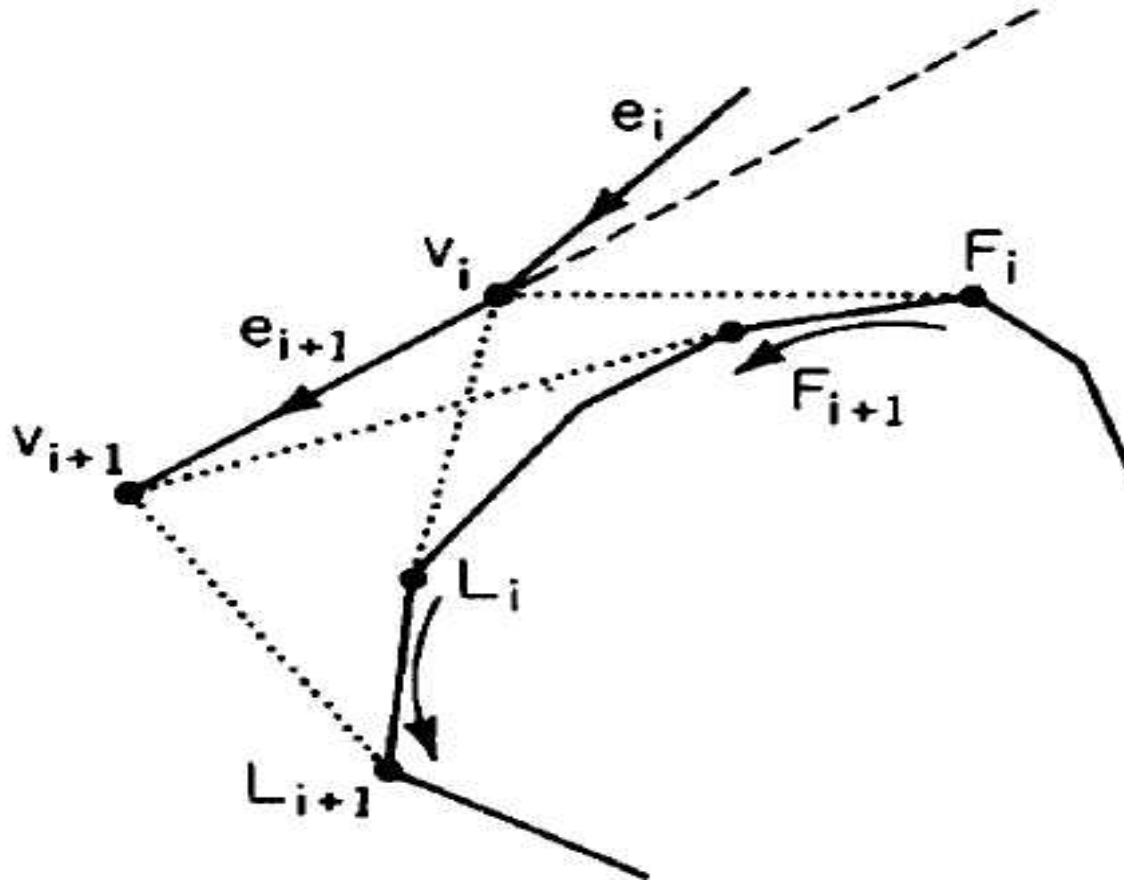
polopřímky dané vrcholy v_{i+1} a w_u

Algoritmus - obecný krok

20/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



[PREP]

Algoritmus - obecný krok

- 2. v_i je konvexní
- 2.1 L_i vpravo od e_{i+1}
 - Hledání průsečíku w_1 přímky e_{i+1} a K_i od vrcholu L_i po směru hodinových ručiček
 - Pokud w_1 neexistuje, polygon nemá jádro

Algoritmus - obecný krok

□ 2.1.a

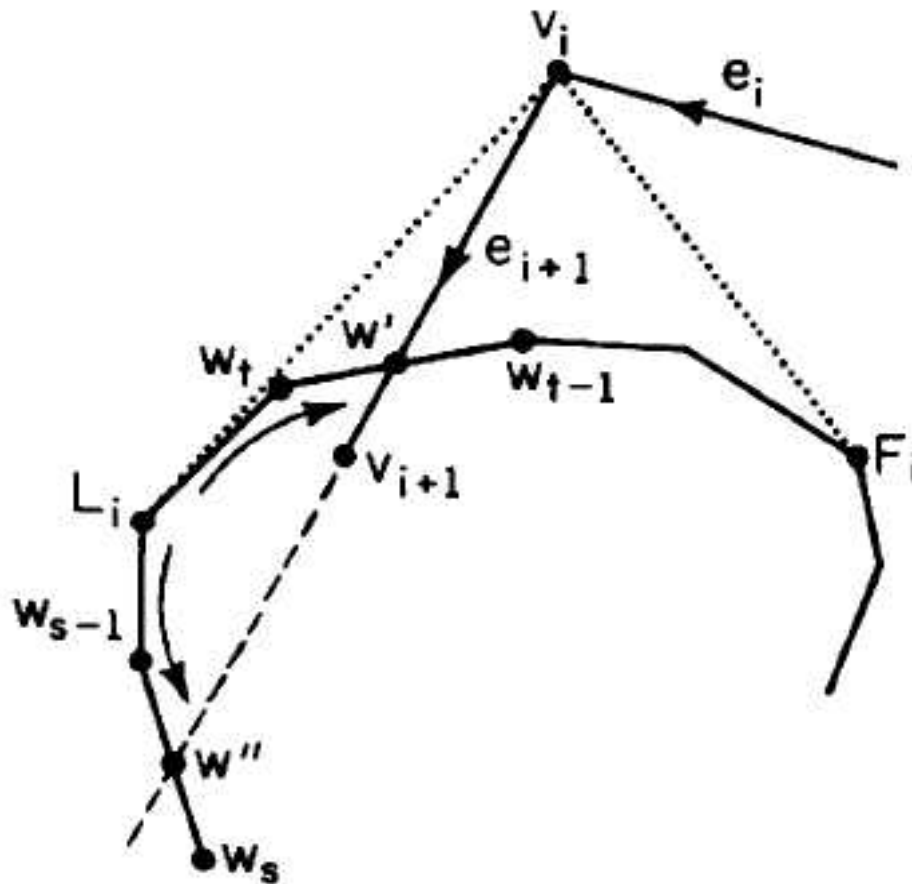
- Existuje průsečík w_2 přímky e_{i+1} a K_i hledaný od vrcholu L_i proti směru hodinových ručiček
- Odseknutím oblasti mezi w_1 a w_2 z K_i vznikne K_{i+1}

Algoritmus - obecný krok

23/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



[PREP]

Algoritmus - obecný krok

□ 2.1.b

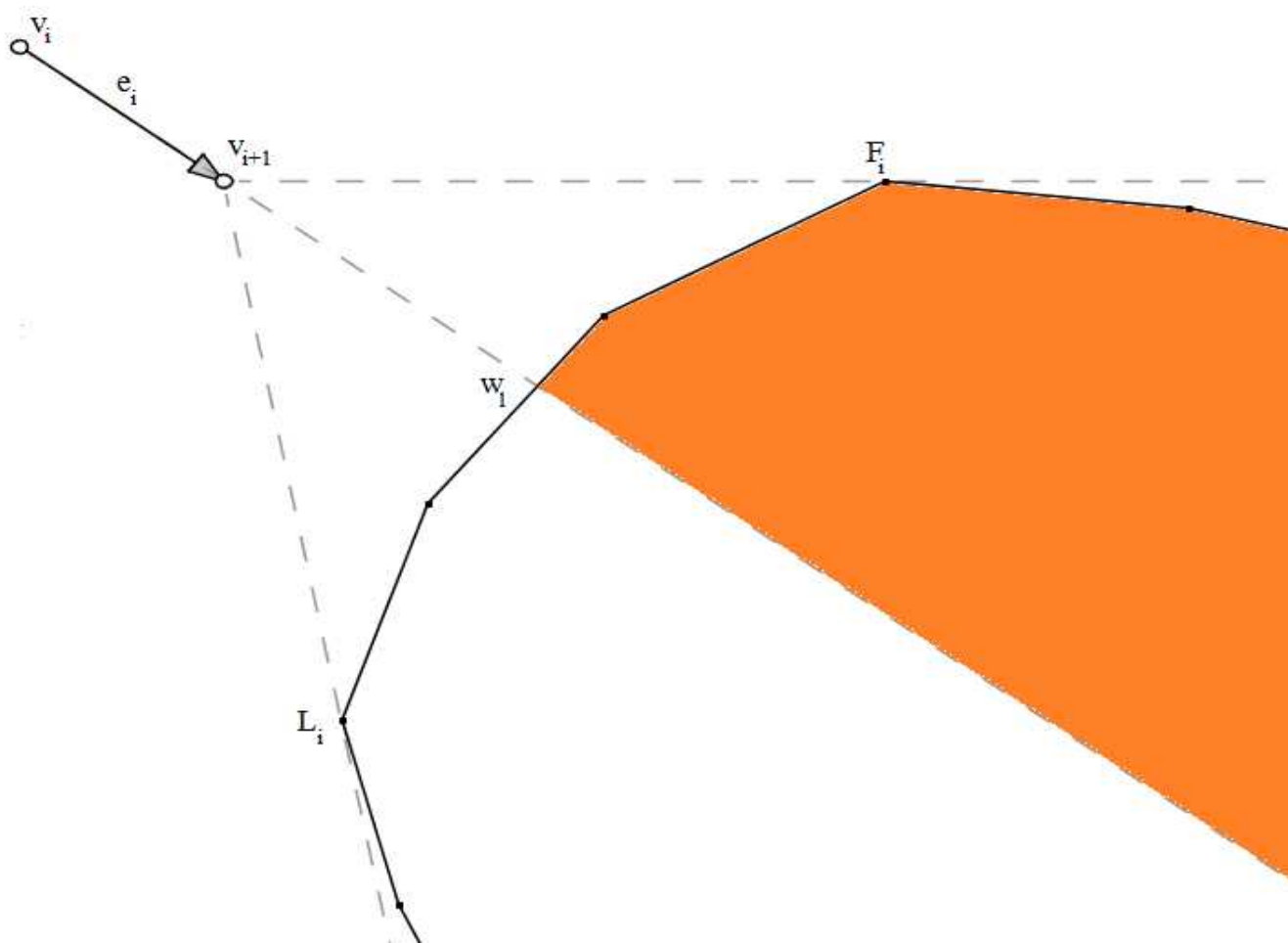
- Neexistuje průsečík w_2 přímky e_{i+1} a K_i hledaný od vrcholu L_i proti směru hodinových ručiček
- e_{i+1} sevřena hraničními polopřímkami K_i
- Odstřižením části K_i ležící za w_1 vznikne K_{i+1}

Algoritmus - obecný krok

25/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



Algoritmus - obecný krok

□ 2.1.c

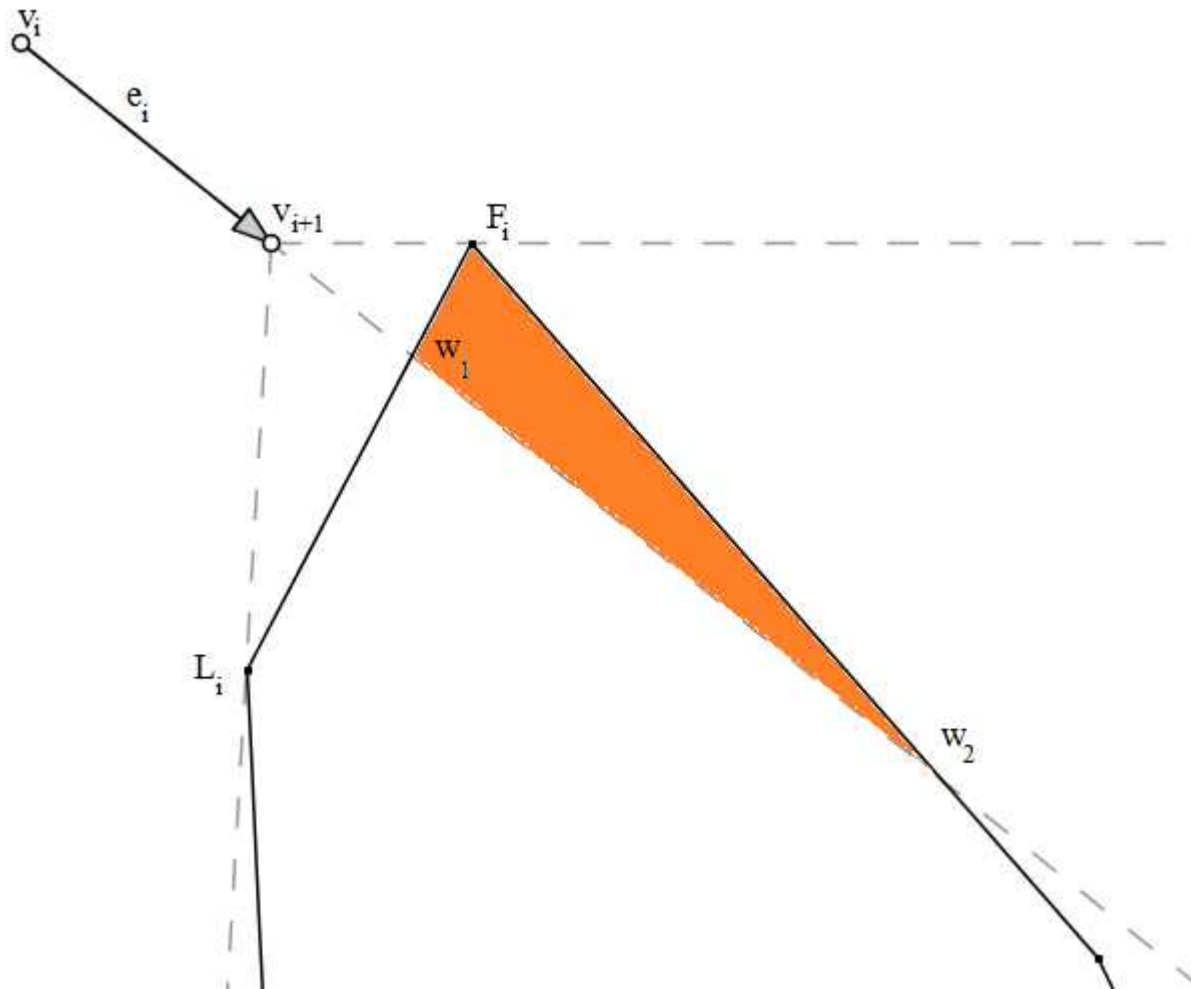
- Nenastane-li 2.1.a ani 2.1.b
- Od začátku K_i se hledá průsečík w_2 přímky e_{i+1} a K_i
- K_{i+1} je tvořena oblastí mezi w_1 a w_2

Algoritmus - obecný krok

27/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



Algoritmus - obecný krok

□ 2.1.d aktualizace L a F

- e_{i+1} protíná K_i ve dvou bodech w_1 a w_2
 - v_{i+1} náleží úsečce $v_i w_1 - F_{i+1}$ jako v 1.2
 - v_{i+1} nenáleží úsečce $v_i w_1 - z w_1$ se stává F_{i+1}
 - v_{i+1} náleží úsečce $v_i w_2 - z w_2$ se stává L_{i+1}
 - v_{i+1} nenáleží úsečce $v_i w_2 - L_{i+1}$ jako v 1.1.d, ale K_i se prochází od w_2 (ne od L_i)

Algoritmus - obecný krok

□ 2.1.d aktualizace L a F

- e_{i+1} protíná K_i v jednom bodě w_1
 - v_{i+1} náleží úsečce $v_i w_1$ - F_{i+1} jako v 1.2
 - v_{i+1} nenáleží úsečce $v_i w_1$ - z w_1 se stává F_{i+1}
 - L_{i+1} bod v nekonečnu daný přímkou e_{i+1}

Algoritmus - obecný krok

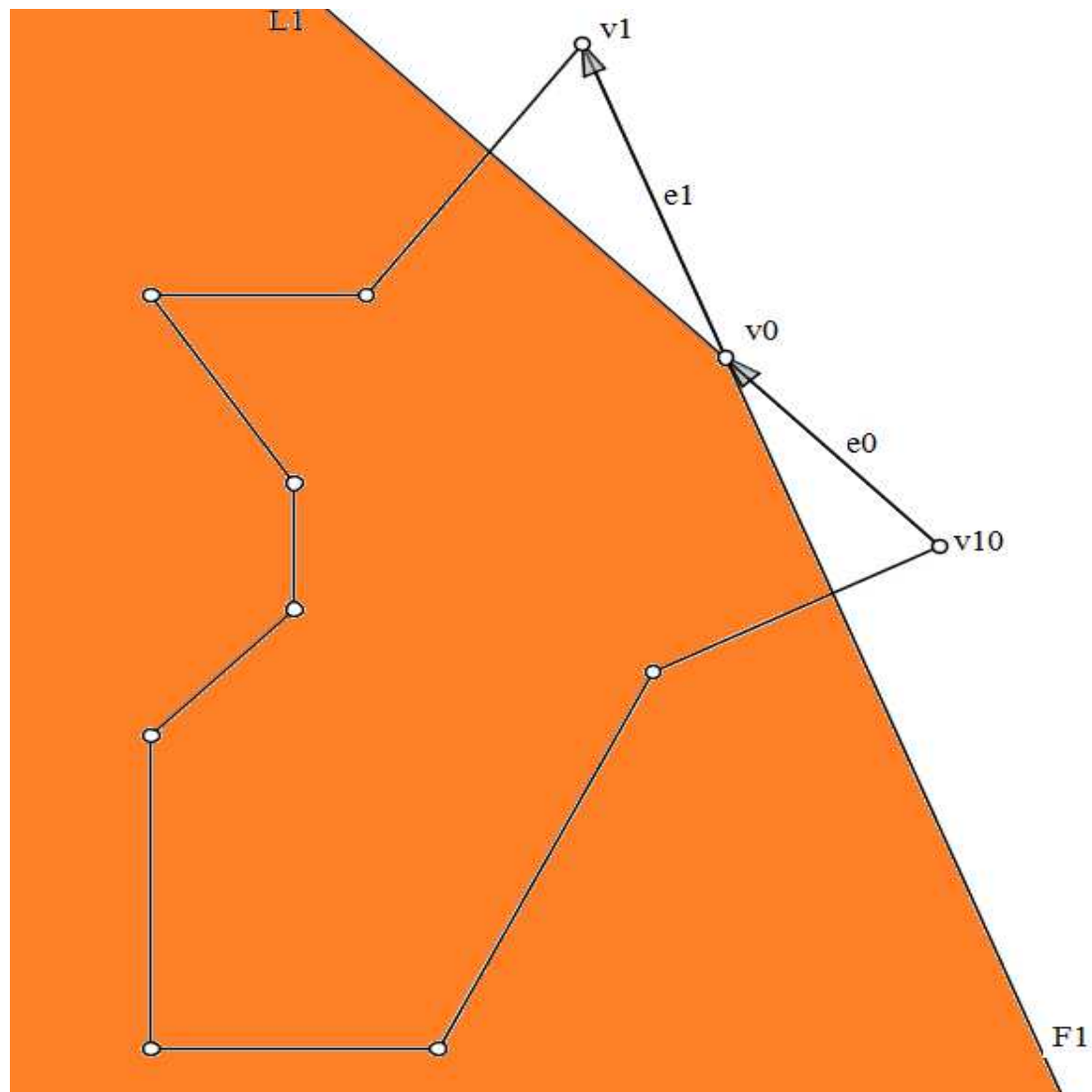
- 2.2 L_i vlevo od e_{i+1}
 - K se nezmění
 - L_{i+1} jako v 1.1.d
 - F_{i+1} jako v 1.2

Příklad

31/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner

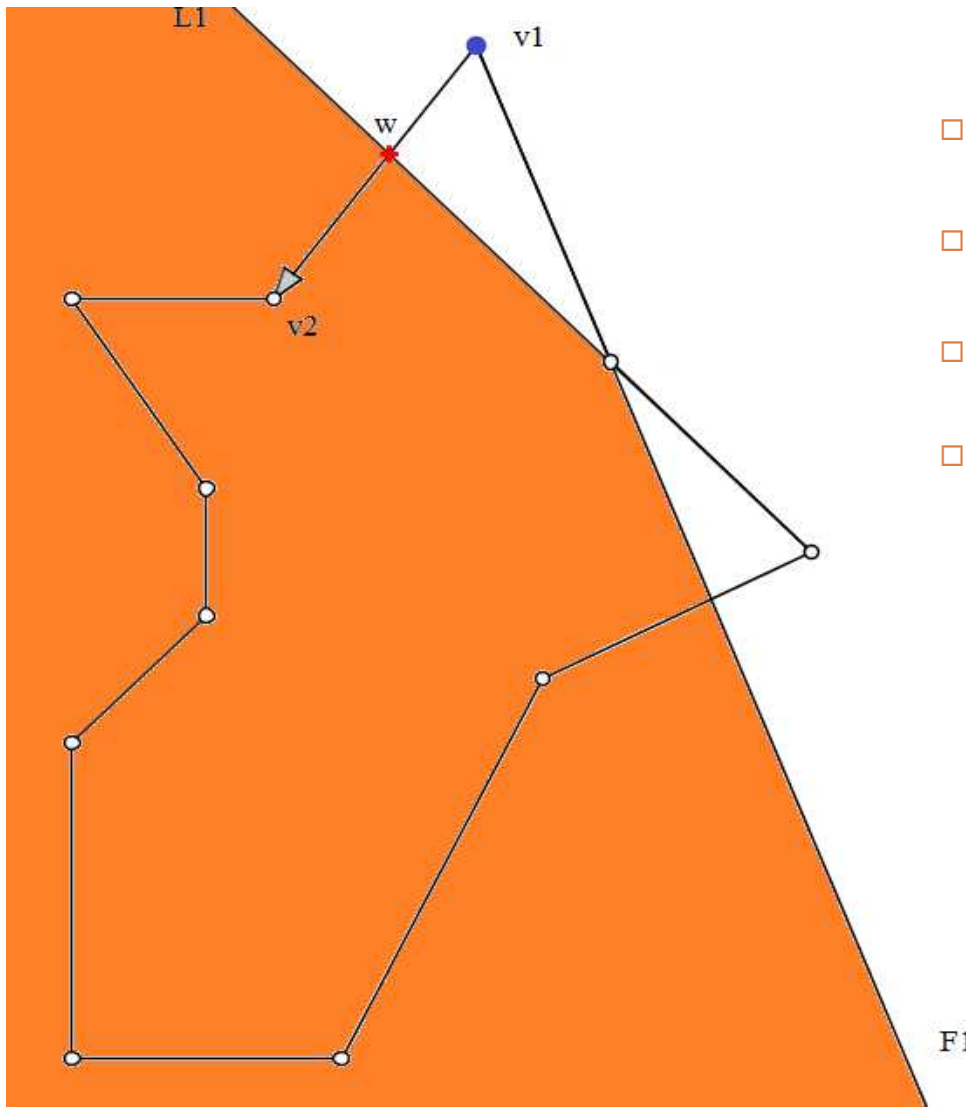


Příklad

32/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



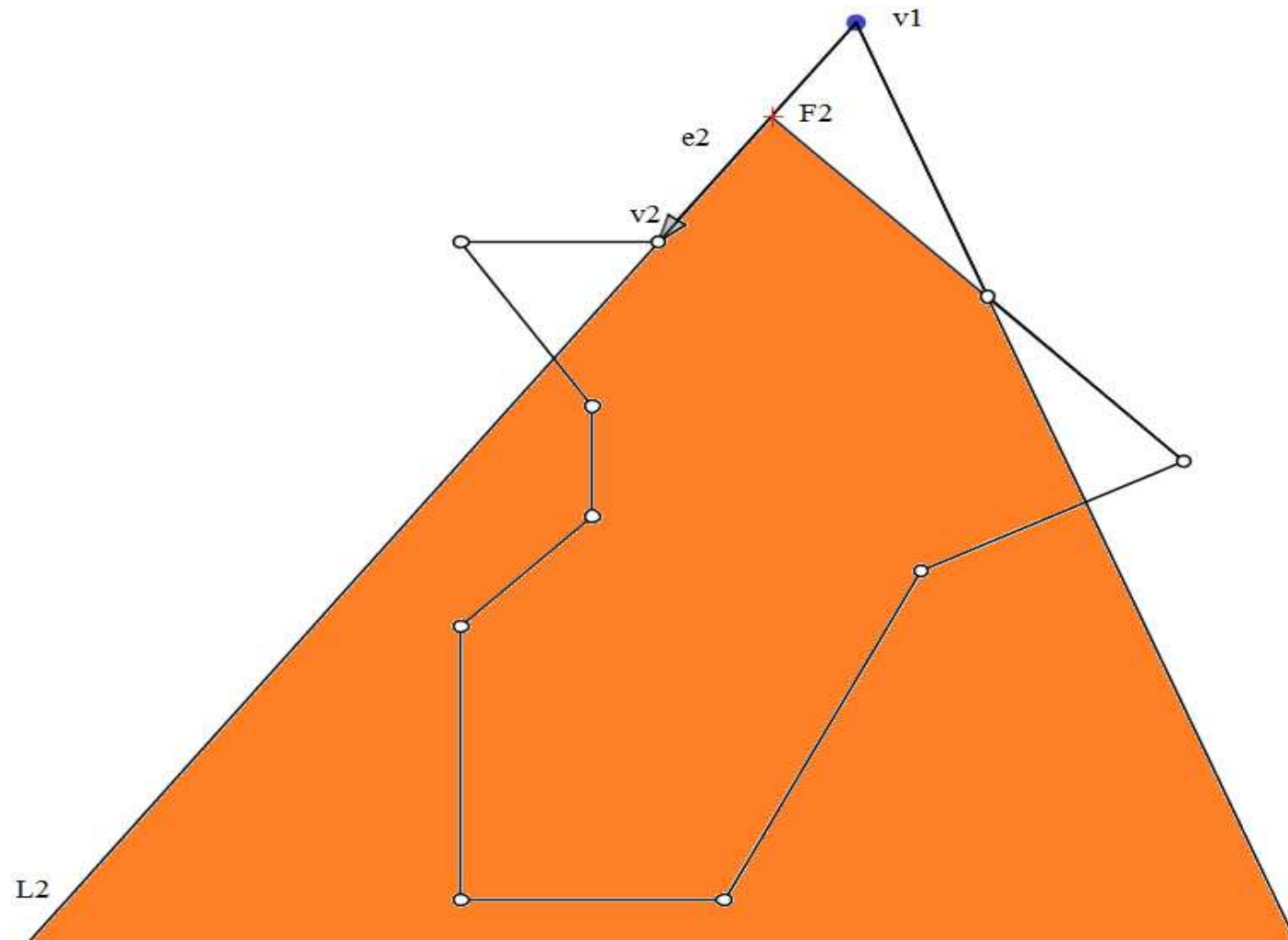
- v_1 konvexní
- L_1 vpravo od e_2 – pravidlo 2.1
- e_2 sevřená hranicemi K_1 – pr. 2.1.b
- pr. 2.1.d
 - v_2 není na úsečce $v_1, w_1 \Rightarrow F_2 := w_1$
 - L_2 bod v nekonečnu daný e_2

Příklad

33/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner

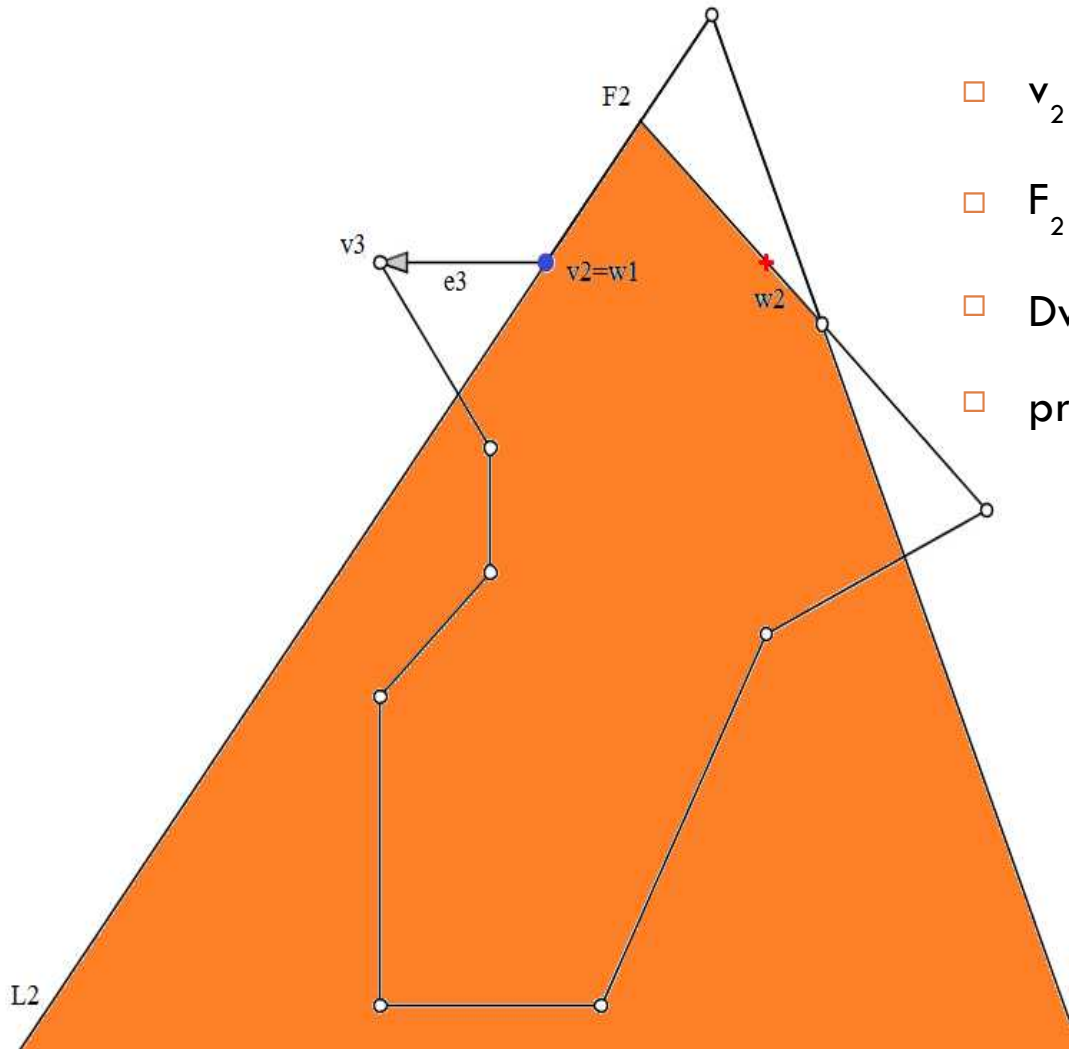


Příklad

34/42

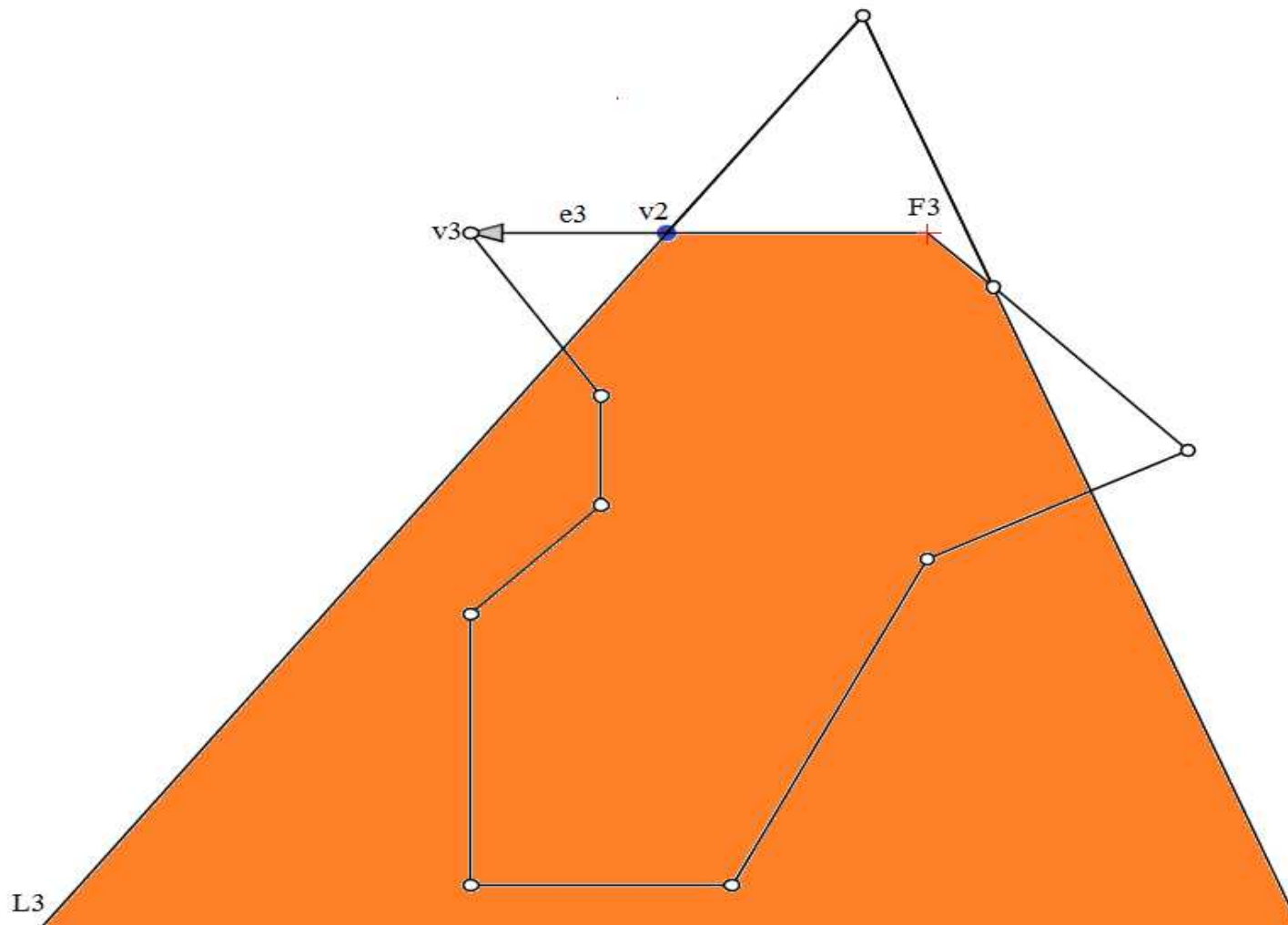
Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



- v_2 reflexní
- F_2 vpravo od e_3 – pr. 1.1
- Dva průsečíky dle pr. 1.1.a
- pr 1.1.d
 - $F_2 := w_2$
 - $L_3 := L_2$

Příklad

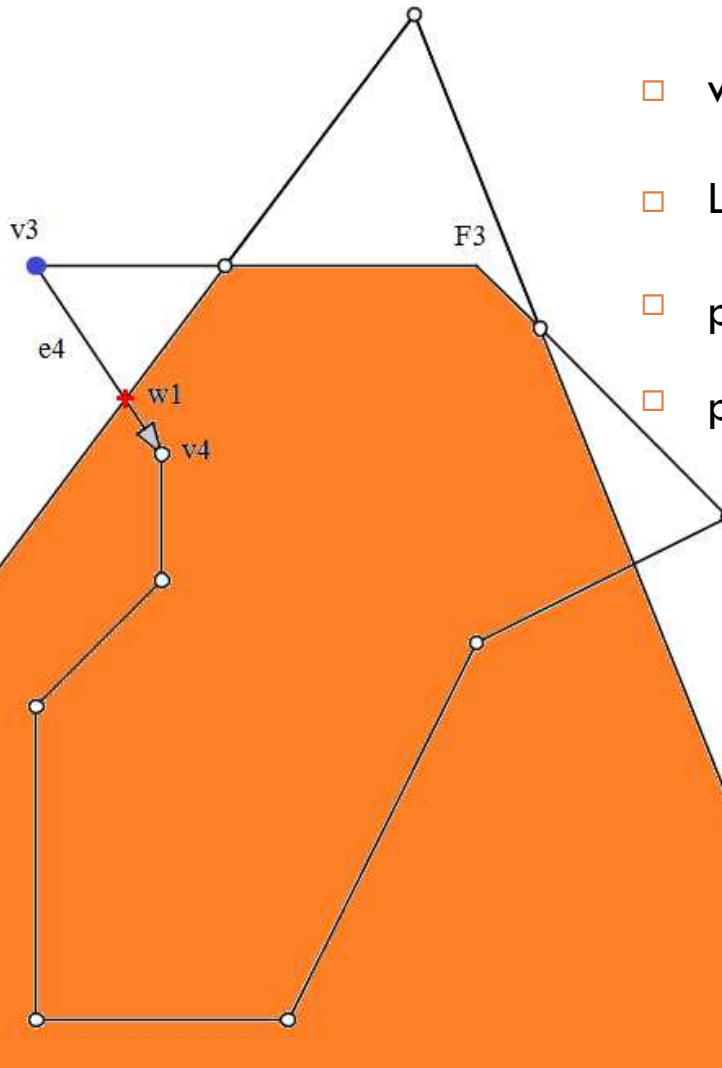


Příklad

36/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



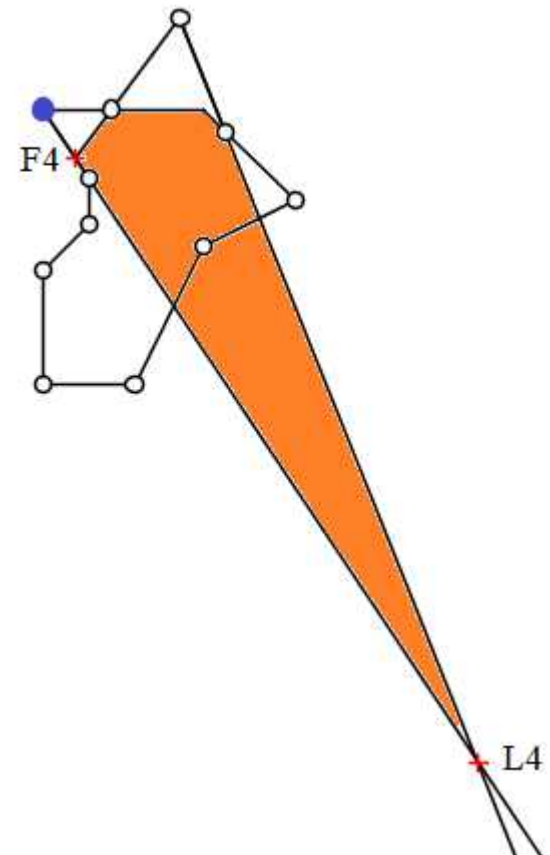
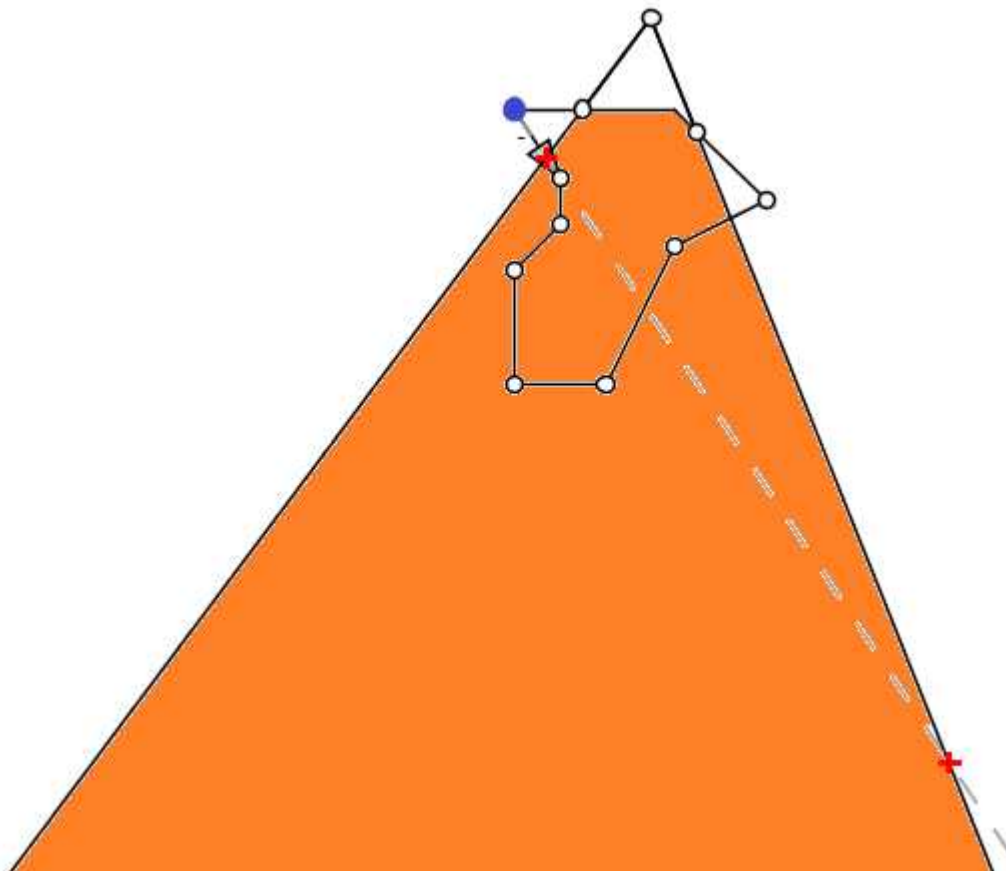
- v_3 konvexní
- L_3 vpravo od od e_4 – pravidlo 2.1
- pr. 2.1.c
- pr 2.1.d
- v_4 není na úsečce $v_1, w_1 \Rightarrow F_4 := w_1$
- v_4 je na úsečce $v_1, w_2 \Rightarrow L_4 := w_2$

Příklad

37/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner

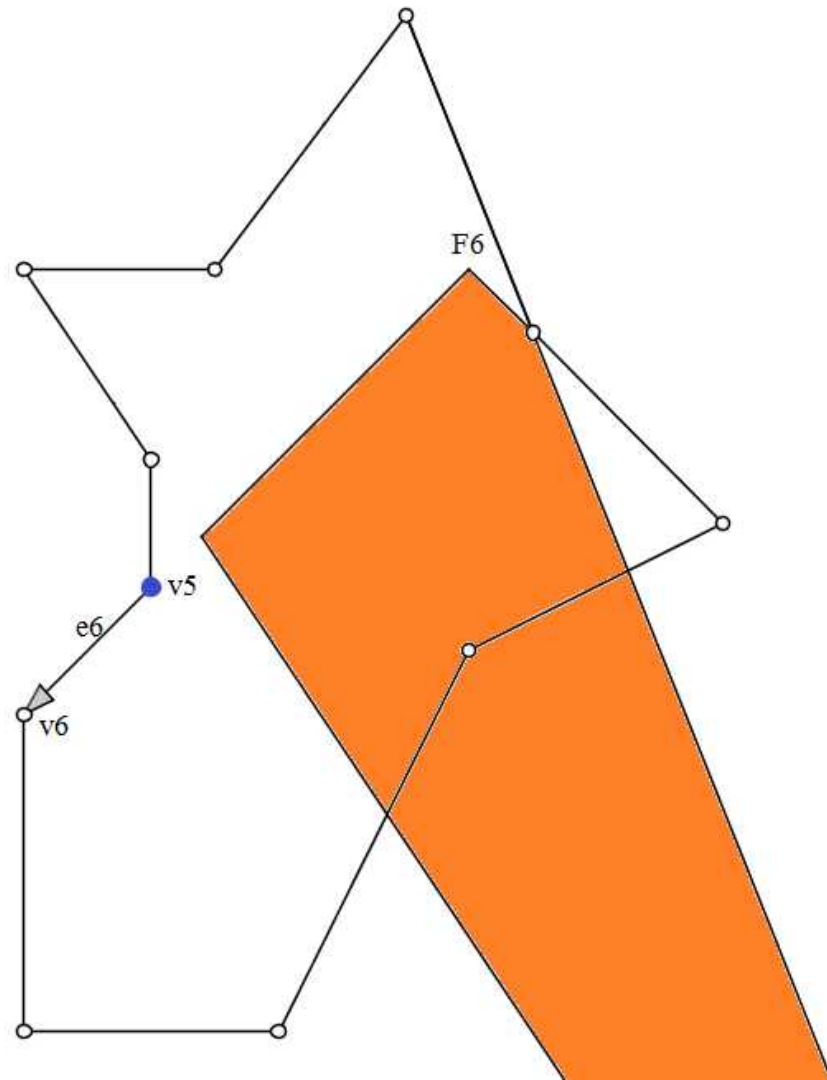
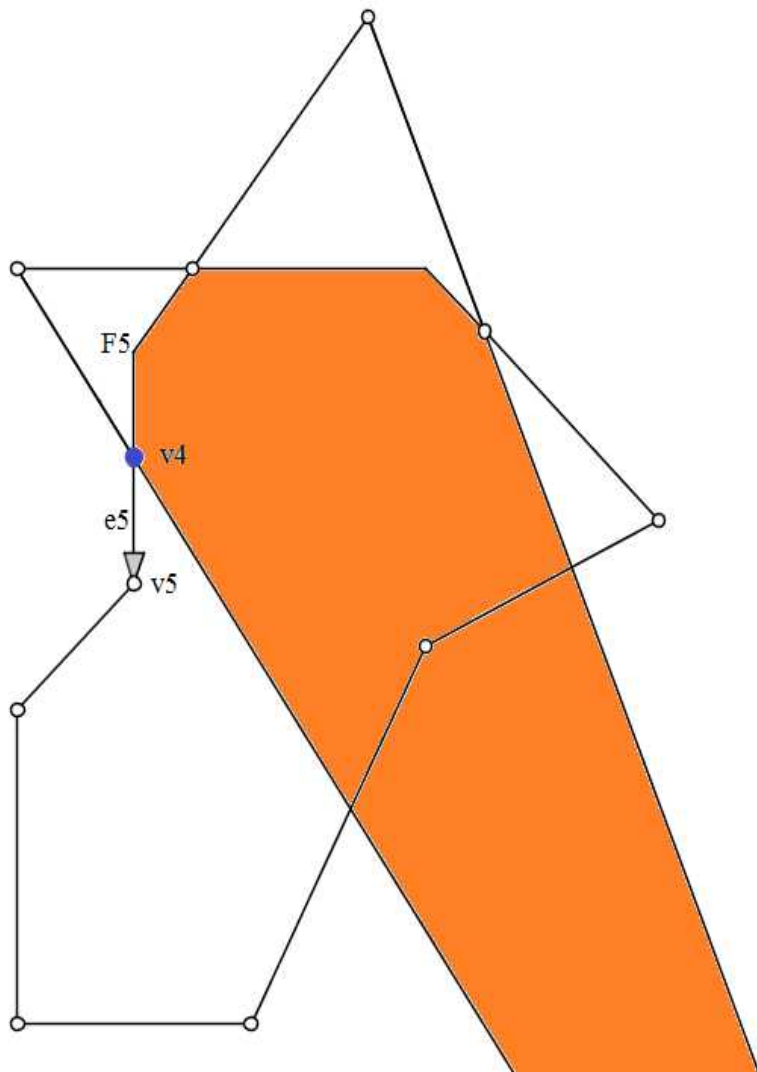


Příklad

38/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner

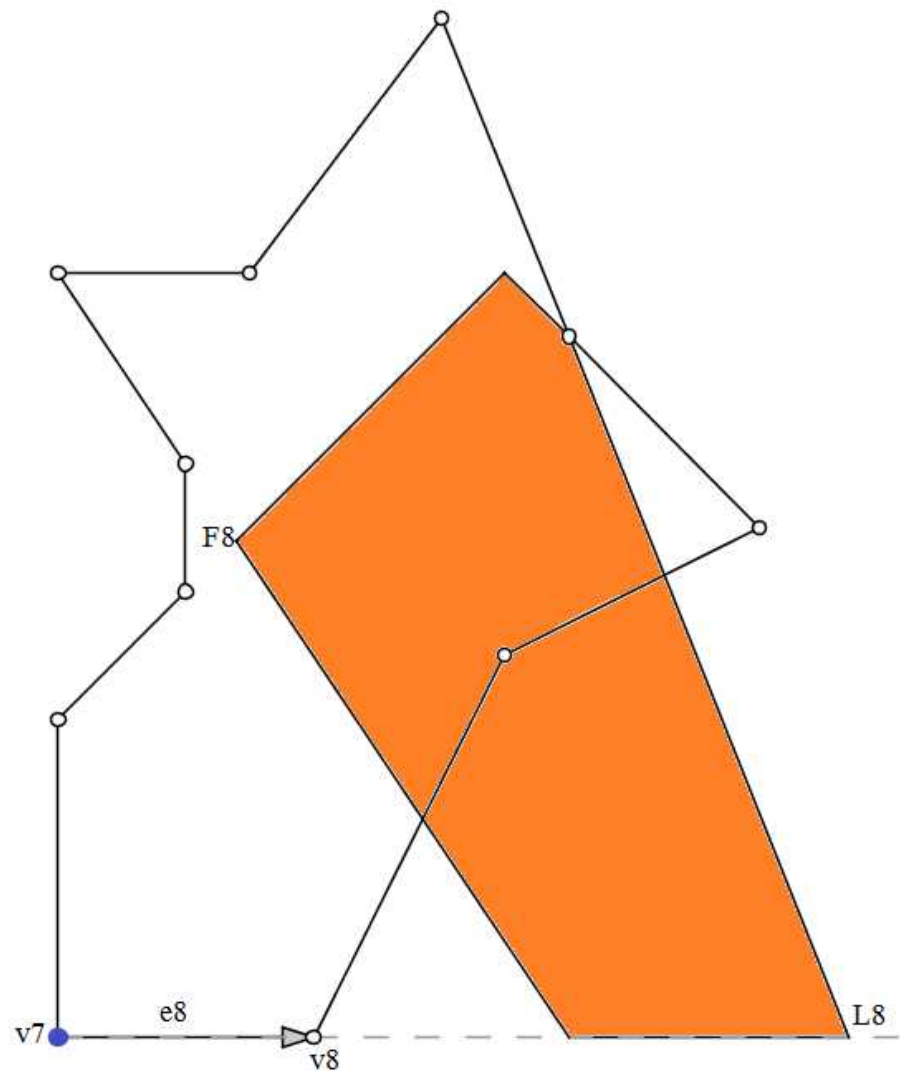
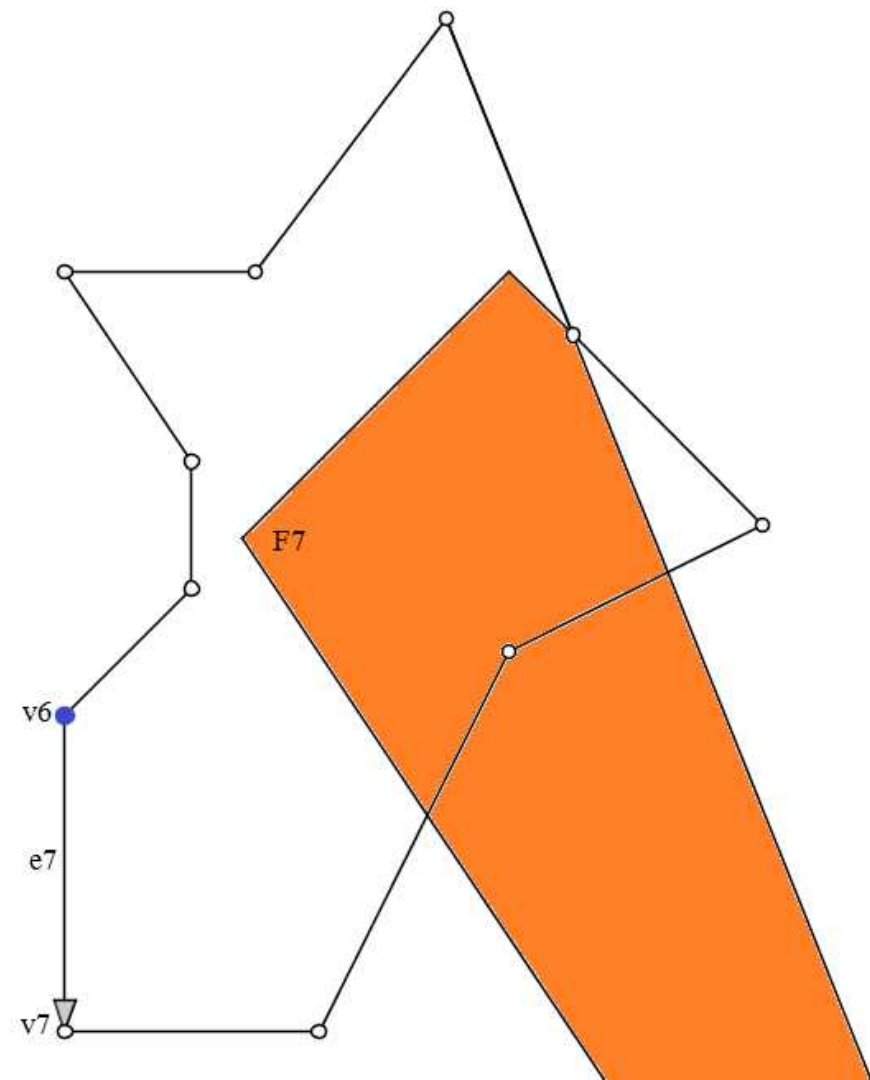


Příklad

39/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner

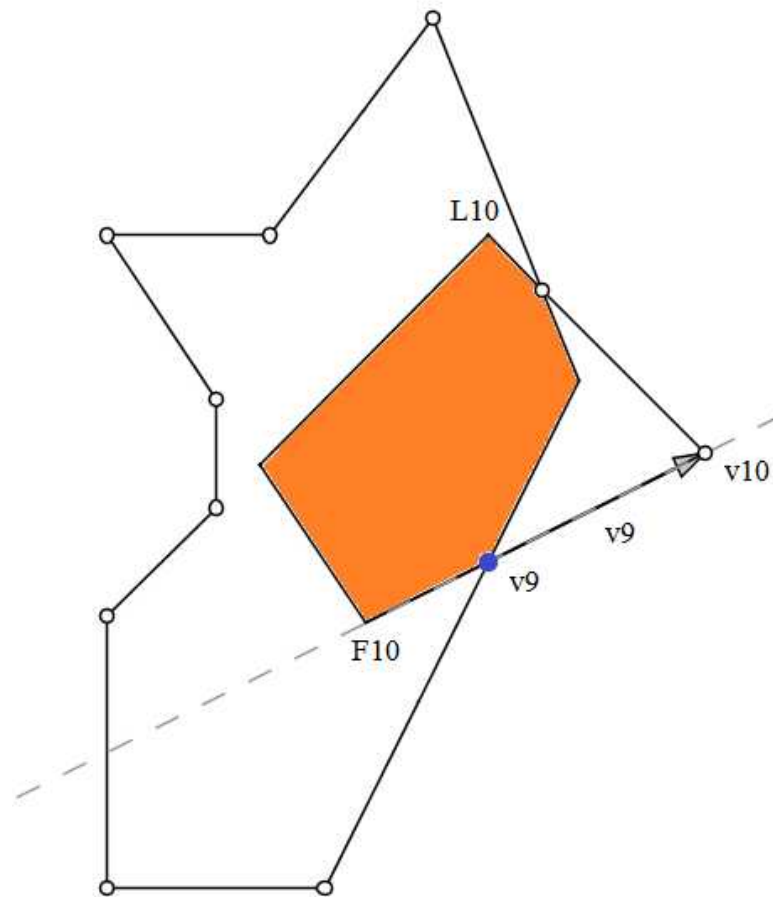
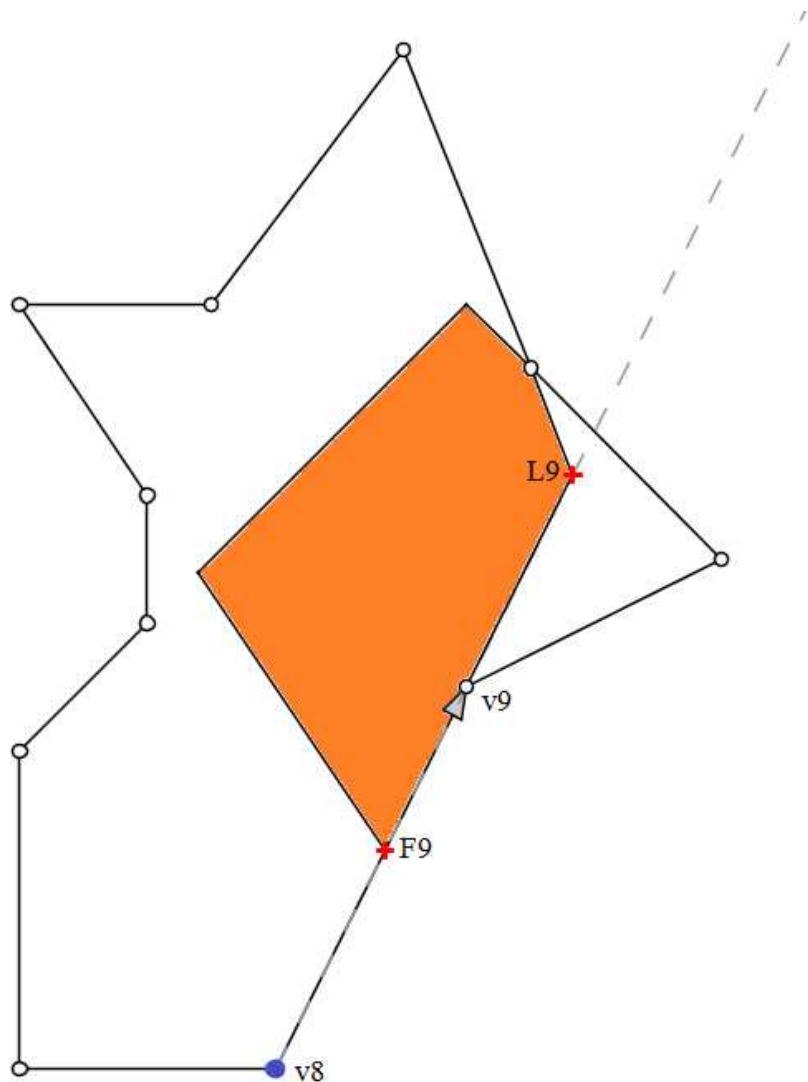


Příklad

40/42

Detekce jádra rovinného polygonu

Václav Pruner



Složitost

- Průnik polorovin - $O(n^2)$
- Lee, Preparata - $O(n)$

Zdroje

- [PREP] PREPARATA, Franco P a Michael Ian SHAMOS. Computational geometry: an introduction. New York: Springer-Verlag, c1985, xiv, 398 s. ISBN 35-409-6131-3.
- LEE, D. T. a F. P. PREPARATA. An Optimal Algorithm for Finding the Kernel of a Polygon. Journal of the ACM. vol. 26, issue 3, s. 415-421. DOI: 10.1145/322139.322142. Dostupné z: <http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=322139.322142>



Děkuji za pozornost.

Dotazy?