Některá tvrzení dokazatelná v modální logice

Nepovinné čtení pro ty, kteří věří jen vlastnímu úsudku

laboratory Gerstner

V Kripkeho strukturách jsme ověřili, že validní jsou

2. **Distribuční axiom** (označovaný někdy jako **K**) $(K_i A \wedge K_i (A \rightarrow B)) \rightarrow K_i B$
3. **Axiom znalostí (Axiom pravdy)** (ozn. jako **T**) $K_i A \rightarrow A$
4. **Axiom pozitivní introspekce** (ozn. jako **4**) $K_i A \rightarrow K_i K_i A$
5. **Axiom negativní introspekce** (ozn.jako **5**) $\neg K_i A \rightarrow K_i \neg K_i A$
6. **Axiom konzistence** (ozn.jako **D**) $\neg K_i\, false$

+ Pravidlo generalizace znalostí

- Distribuční axiom **K** a **pravidlo generalizace znalostí** jsme ověřili bez jakýchkoli předpokladů o relacích K_i,
- validnost axiomu znalostí **T** plyne z reflexivity,
- validnost axiomu pozitivní introspekce **4** plyne z tranzitivity,
- a validnost axiomu negativní introspekce **5** plyne ze symetrie a tranzitivity relací K_i.

Výroková logika a některé její tautologie (dokazatelné formule)

Použijeme **formální systém výrokové logiky** se 3 axiomy **P-Ax1** až **P-Ax3** a pravidlem **MP modus ponens**

P-Ax1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

P-Ax2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$

P-Ax3: $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

MP modus ponens:

$$\frac{\varphi,\ (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Tento formální systém je **korektní a úplný** (dokazatelné je právě to, co je platné ve všech strukturách).

Je v něm možné dokázat řadu vlastností výrokových spojek, např.

P-T1: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \tau))$

Formální (axiomatický) systém K_n

Axiomy:

A1. Všechny tautologie výrokové logiky

A2. $(K_i \alpha \wedge K_i (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow K_i (\beta)$

Odvozovací pravidla:

R1. Z α formulí $\alpha \rightarrow \beta$ odvoďte β (modus ponens)

R2. Z formule α odvoď $K_i \alpha$ (pravidlo zobecnění znalosti)

V $\mathbf{K_n}$ lze dokázat například tvrzení $K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i \alpha$ (viz dále).

Značení **pro dokazatelnost:** $\mathbf{K_n} \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i \alpha$

Věta:

Systém K_n představuje korektní a úplný syntaktický popis všech formulí validních v množině $\mathcal{M}_n(\Phi)$ Kripkeho struktur.

Platí tvrzení (označme jej Mod_T1): $\mathbf{K}_n$, $(\varphi \to \psi) \vdash K_i\, \varphi \to K_i\, \psi$, tj. v axiomatickém systému K_n z platnosti $(\varphi \to \psi)$ plyne platnost $K_i\, \varphi \to K_i\, \psi$

1. $(\varphi \to \psi)$ [výchozí formule]
2. $K_i(\varphi \to \psi)$ [R2]
3. $K_i\varphi \to (K_i(\varphi \to \psi) \to K_i\psi)$ [K2]
4. $(K_i\varphi \to (K_i(\varphi \to \psi) \to K_i\psi)) \to (K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi))$
   [P-T1: $(\varphi \to (\psi \to \tau)) \to (\psi \to (\varphi \to \tau))$]
5. $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$ [MP 4 a 3]
6. $(K_i\varphi \to K_i\psi)$ [MP 5 a 2]

Důsledek: Jsou-li dvě výrokové φ , ψ formule ekvivalentní (tj. $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ je tautologie, značeno $\varphi \equiv \psi$), pak $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\, \varphi \equiv K_i\, \psi$

Mod_T2:
$\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta$

Důkaz je rozdělen do dvou kroků **Mod_T2a** a **Mod_T2b**, které odpovídají definici ekvivalence $\equiv$:

Mod_T2a: $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta$

Mod_T2b: $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta \to K_i\,(\alpha \wedge \beta)$

Mod_T2a: $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta$

1. $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\alpha$ [viz přednáška]
2. $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\beta$ [obdobně, viz přednáška]
3. $(K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\alpha) \to ((K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\beta) \to (K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta)))$
   [$(\rho \to \varphi) \to ((\rho \to \psi) \to (\rho \to (\varphi \wedge \psi)))$ výroková tautologie]
4. $(K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\beta) \to (K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i\,(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta)$ [MP: 4,2]

Mod_T2b:
$\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta \to K_i\,(\alpha \wedge \beta)$

1. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ [výroková tautologie]
2. $K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [R2:6]
3. $K_i\alpha \to (K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [Ax2]
4. $K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 8]
5. $(K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 9,7]
6. $(K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to (K_i\beta \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))))$ [P_Ax1]
7. $K_i\beta \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 11,10]
8. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ [výroková úprava 12]
9. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 13]
10. $K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)$ [Ax2]
11. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta))$
    $\to (((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to ((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [P_Ax3]
12. $(K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)) \to ((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [P_Ax1]
13. $((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 17,15]
14. $(((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to ((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 16,18]
15. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)$ [MP: 19,14]

Lze dokázat řadu dalších vztahů, např.:

Mod_T3: **K2 + T(Ax3) |-** $\neg K_i\, \mathit{false}$ čili

K2 + T(Ax3) |- Ax6

1. $K_i\, \mathit{false} \to \mathit{false}$ [Ax3]
2. $\neg\, \mathit{false} \to (\neg K_i\, \mathit{false})$ [ekv. úprava 1]
3. $\neg K_i\, \mathit{false}$ [použití výrokové tautologie na 2]

Mod_T4: K2 + T |- $\neg K_i\,(\alpha \wedge \neg K_i\,\alpha)$

1. $K_i \neg K_i\,\alpha \to \neg K_i\,\alpha$ [T, axiom pravdy]
2. $\neg K_i \neg K_i\,\alpha \vee \neg K_i\,\alpha$ [výrok. Tautologie – přepis fle na řádku1]
3. $\neg (K_i \neg K_i\,\alpha \wedge K_i\,\alpha)$ [výrok. Tautologie – přepis 2]
4. $\neg K_i\,(\neg K_i\,\alpha \wedge \alpha)$ [tvrzení **Mod_T2** o ekvivalenci konjunkce pro formuli 3]

Mod_T5: $(K_n + Ax6) \vdash \neg (K_i \alpha \wedge K_i \neg \alpha)$.

Důkaz používá již dokázaná tvrzení!

1. $(K_i \alpha \wedge K_i \neg \alpha) \equiv K_i(\alpha \wedge \neg \alpha)$ **[Mod_T2]**
2. $\neg K_i(\mathit{false})$ [Ax6]
3. $\mathit{false} \equiv (\alpha \wedge \neg \alpha)$ [výroková tautologie: P_A1]
4. $\neg K_i(\alpha \wedge \neg \alpha)$ [dosazením ekv.3 do 2]
5. $\neg (K_i \alpha \wedge K_i \neg \alpha) \equiv \neg K_i(\alpha \wedge \neg \alpha)$ [vlastnost negace a řádek 1]
6. $\neg(K_i \alpha \wedge K_i \neg \alpha)$ [Modus ponens a řádek 5]

Mod_T6a: $K_n \vdash K_i \neg (p \rightarrow K_i p) \equiv K_i (p \wedge \neg K_i p)$

***Důsledek* Mod_T1:** Jsou-li dvě výrokové φ , ψ formule ekvivalentní, značeno $\varphi \equiv \psi$), pak $K_n \vdash K_i \varphi \equiv K_i \psi$

Mod_T6b: $K_n \vdash K_i \neg (p \rightarrow K_i p) \equiv (K_i p \wedge K_i (\neg K_i p))$

***Důsledek* Mod_T6** a **Mod_T2.**

Mod_T7: V $(K_n + Ax3)$ nemůže být dokazatelné $K_i \neg (p \rightarrow K_i p)$

Kdyby $K_i \neg (p \rightarrow K_i p)$ bylo dokazatelné, bylo by podle **Mod_T6 b** dokazatelné i $K_i p \wedge K_i (\neg K_i p)$. Předpokládejme, že tomu tak je:

1. $K_i p \wedge K_i (\neg K_i p)$ [předpoklad]
2. $K_i p$ [řádek 1 a vlastnost konjunkce $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$]
3. $K_i (\neg K_i p)$ [řádek 1 a vlastnost konjunkce $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$]
4. $K_i (\neg K_i p) \rightarrow \neg K_i p$ **[Ax3]**
5. $\neg K_i p$ [řádky 4, 3 a Modus ponens]
6. ***false*** [definice ***false*** a řádky 2 a 5]

Vzhledem k tomu, že systém axiomů $(K_n + Ax3)$ není sporný, nemůže v něm být dokazatelná formule false. Tedy nemůže platit předpoklad, že je v něm dokazatelná formule $K_i \neg (p \rightarrow K_i p)$.

Důkazy následujících vztahů se opírají o výrokovou tautologii:

P-T2 :$(\alpha 1 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 2 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 1 \vee \alpha 2) \rightarrow \beta))$

Mod_T8a: $K_n , K_i (p \rightarrow K_i p) \vdash K_i p \vee K_i \neg p$

1. $K_i p \vee \neg K_i p$ — výroková tautologie $\alpha \vee \neg \alpha$
2. $K_i p \rightarrow K_i p \vee K_i \neg p$ — výroková tautologie $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
3. $p \rightarrow K_i p$ — **Ax 3** a předpoklad $K_i (p \rightarrow K_i p)$
4. $(p \rightarrow K_i p) \rightarrow (\neg K_i p \rightarrow \neg p)$ — výroková tautologie
5. $\neg K_i p \rightarrow \neg p$ — Modus Ponens na řádky 3 a 4
6. $\neg K_i p \rightarrow K_i \neg K_i p$ — **Ax 5**
7. $K_i \neg K_i p \rightarrow K_i \neg p$ — **Mod_T1** pro řádku 5
8. $\neg K_i p \rightarrow K_i \neg p$ — transitivita implikace pro řádky 5 a 6
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \vee \alpha \rightarrow \gamma \vee \beta)$ — výroková tautologie
10. $\neg K_i p \rightarrow K_i p \vee K_i \neg p$ — Modus Ponens na řádky 8 a 9 pro γ rovno $K_i p$
11. — P-T2
12. $(K_i p \vee \neg K_i p) \rightarrow (K_i p \vee K_i \neg p)$ — Modus Ponens na řádky 11, 2 a 10
13. $(K_i p \vee K_i \neg p)$ — Modus Ponens na řádky 12 a 1

Důkazy následujících vztahů se opírají o výrokovou tautologii:

P-T2 :$(\alpha 1 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 2 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 1 \vee \alpha 2) \rightarrow \beta))$

Mod_T8a: $\mathbf{K}_n$, $K_i(\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$ |- $K_i p \vee K_i \neg p$

1. $K_i p \vee \neg K_i p$ — výroková tautologie $\alpha \vee \neg \alpha$
2. $K_i p \rightarrow K_i p \vee K_i \neg p$ — výroková tautologie $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
3. $\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p}$ — **Ax 3** a předpoklad $K_i(\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$
4. $(\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p}) \rightarrow (\neg K_i p \rightarrow \neg p)$ — výroková tautologie
5. $\neg K_i p \rightarrow \neg p$ — Modus Ponens na řádky 3 a 4
6. $\neg K_i p \rightarrow K_i \neg K_i p$ — **Ax 5**
7. $K_i \neg K_i p \rightarrow K_i \neg p$ — **Mod_T1** pro řádku 5
8. $\neg K_i p \rightarrow K_i \neg p$ — transitivita implikace pro řádky 5 a 6
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \vee \alpha \rightarrow \gamma \vee \beta)$ — výroková tautologie
10. $\neg K_i p \rightarrow K_i p \vee K_i \neg p$ — Modus Ponens na řádky 8 a 9 pro γ rovno $K_i p$
11. P-T2
12. $(K_i p \vee \neg K_i p) \rightarrow (K_i p \vee K_i \neg p)$ — Modus Ponens na řádky 11, 2 a 10
13. $(K_i p \vee K_i \neg p)$ — Modus Ponens na řádky 12 a 1

13 / 8 VZ 2009

Mod_T8b: $\mathbf{K}_n$,$(K_i p \vee K_i \neg p)$ |- $K_i(\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$

1. $K_i \mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$ — výrokový axiom
2. $K_i K_i \mathbf{p} \rightarrow K_i(\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$ — **Mod_T1** pro řádku 1
3. $K_i \mathbf{p} \rightarrow K_i K_i \mathbf{p}$ — **Ax3**
4. $K_i \mathbf{p} \rightarrow K_i(\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$ — transitivita implikace pro řádky 3 a 2
5. $\neg \mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$ — **výroková tautologie**
6. $K_i \neg \mathbf{p} \rightarrow K_i(\mathbf{p} \rightarrow K_i \mathbf{p})$ — **Mod_T1** pro řádku 5
7. P-T2
8. $(K_i p \vee K_i \neg p) \rightarrow K_i(p \rightarrow K_i p)$ — Modus ponens 2x pro řádky 7, 1 a 6
9. $K_i(p \rightarrow K_i p)$ — Modus ponens pro ř.8 a předpoklad

14 / 8 VZ 2009

Platí (jsou dokazatelné) i následující formule:

(i) $(C_G A \wedge C_G(A \rightarrow B)) \rightarrow C_G B$

(ii) $C_G A \rightarrow A$

(iii) $C_G A \rightarrow C_G C_G A$

(iv) $\neg C_G A \rightarrow C_G \neg C_G A$

Předpoklady o relacích K_i jsou stejné, jako při odvození odpovídajících axiomů.

VZ 2009

Axiom o pevném bodu.

Nechť p je výrok „alespoň jeden z vás má zablácené čelo“.

Připomeňme, že ve hře zablácených dětí, se z p stala všeobecná znalost v okamžiku, kdy otec řekl p a všechny děti věděly dvě věci: že platí p a že jsou v takové situaci.

Axiom.

$$\models C_G A \leftrightarrow E_G(A \wedge C_G A)$$

{ $C_G A$ je pevným bodem funkce $f(x) = E_G(A \wedge x)$ }

VZ 2009