Dokazatelnost

a některé vlastnosti znalostí

(v sémantice možných světů)

V Kripkeho strukturách jsme ověřili, že validní jsou

2. **Distribuční axiom** (označovaný někdy jako **K**) $(K_i A \wedge K_i (A \to B)) \to K_i B$
   Pravidlo generalizace znalostí
3. **Axiom znalostí (Axiom pravdy)** (ozn. jako **T**) $K_i A \to A$
4. **Axiom pozitivní introspekce** (ozn. jako **4**) $K_i A \to K_i K_i A$
5. **Axiom negativní introspekce** (ozn.jako **5**) $\neg K_i A \to K_i \neg K_i A$
6. **Axiom konzistence** (ozn.jako **D**) $\neg K_i \, false$

•Distribuční axiom **K** a **pravidlo generalizace znalostí** jsme ověřili bez jakýchkoli předpokladů o relacích K_i,

•validnost axiomu znalostí **T** plyne z reflexivity,

•validnost axiomu pozitivní introspekce **4** plyne z tranzitivity,

•a validnost axiomu negativní introspekce **5** plyne ze symetrie a tranzitivity relací K_i.

Výroková logika: formální systém
a některé její tautologie(dokazatelné formule)

Prop-Ax1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Prop-Ax2: $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

Prop-Ax3: $(\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Modus ponens:

$$\frac{\varphi,\ (\varphi \to \psi)}{\psi}$$

Prop-T1: $(\varphi \to (\psi \to \tau)) \to (\psi \to (\varphi \to \tau))$

laboratory Gerstner

Formální (axiomatický) systém K_n

Axiomy: **A1.** Všechny tautologie výrokové logiky

A2. $(K_i \alpha \wedge K_i(\alpha \to \beta)) \to K_i(\beta)$

Odvozovací pravidla:

R1. Z α formulí $\alpha \to \beta$ odvoďte β (modus ponens)

R2. Z formule α odvoď $K_i \alpha$ (pravidlo zobecnění znalosti)

V $\mathbf{K}_n$ lze dokázat například tvrzení $K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha$ (viz dále).

Značení **pro dokazatelnost:** $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha$

Věta:

Systém K_n představuje korektní a úplný syntaktický popis všech formulí validních v množině $\mathcal{M}_n(\Phi)$ Kripkeho struktur.

laboratory Gerstner

Platí M-T1: $\mathbf{K}_n$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ |- $K_i\, \varphi \rightarrow K_i\, \psi$

Důkaz *viz přednáška*

Důsledek: Jsou-li dvě výrokové φ , ψ formule ekvivalentní (tj. $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ je tautologie, značeno $\varphi \equiv \psi$), pak $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\, \varphi \equiv K_i\, \psi$

Ukážeme, že platí následující vztahy:

a) $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \equiv K_i\, \boldsymbol{\alpha} \wedge K_i\, \boldsymbol{\beta}$

implikace „$\rightarrow$“, *viz přednáška*

implikace „$\leftarrow$“, *viz dále*

b) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A6})$ |- $\neg\, (K_i\, \boldsymbol{\alpha} \wedge K_i \neg\, \boldsymbol{\alpha})$ (*viz dále*)

c) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ |- A6 (*viz přednáška*)

d) $\mathbf{K}_n$ |- $K_i \neg\, (\boldsymbol{p} \rightarrow K_i\, \boldsymbol{p}) \equiv K_i\, (\boldsymbol{p} \wedge \neg\, K_i\, \boldsymbol{p}) \equiv (K_i\, \boldsymbol{p} \wedge K_i\, (\neg\, K_i\, \boldsymbol{p}))$

e) V $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ nemůže být dokazatelné $K_i \neg\, (\boldsymbol{p} \rightarrow K_i\, \boldsymbol{p})$

1. $\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha$ [viz přednáška]
2. $\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta$ [obdobně, viz přednáška]
3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha) \to ((K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)))$
   [$(\rho \to \varphi) \to ((\rho \to \psi) \to (\rho \to (\varphi \wedge \psi)))$ výroková tautologie]
4. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)$ [MP: 4,2]

$\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\alpha \wedge K_i\beta$

1. $\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha$ [viz přednáška]
2. $\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta$ [obdobně, viz přednáška]
3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha) \to ((K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)))$
4. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)$ [MP: 4,2]

6. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ [výroková tautologie]
7. $K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [R2:6]
8. $K_i\alpha \to (K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [A2]
9. $K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 8]
10. $(K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 9,7]
11. $(K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to (K_i\beta \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))))$ [Výr.Ax1]
12. $K_i\beta \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 11,10]
13. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ [výroková úprava 12]
14. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 13]
15. $K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)$ [A2]
16. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta))$
    $\to (((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [Výr. Ax3]
17. $(K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)) \to ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [V.Ax1]
18. $((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 17,15]
19. $(((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 16,18]
20. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)$ [MP: 19,14]

Následující vztahy lze dokázat (viz *níže*):

b) (K_n + A6) |- $\neg (K_i \boldsymbol{\alpha} \wedge K_i \neg \boldsymbol{\alpha})$.

Z předchozího tvrzení víme, že

1. $(K_i \boldsymbol{\alpha} \wedge K_i \neg \boldsymbol{\alpha}) \equiv K_i(\boldsymbol{\alpha} \wedge \neg \boldsymbol{\alpha})$
2. $\neg K_i(\mathit{false})$ [A6]
3. $\mathit{false} \equiv (\boldsymbol{\alpha} \wedge \neg \boldsymbol{\alpha})$ [tautologie: A1]
4. $\neg K_i(\boldsymbol{\alpha} \wedge \neg \boldsymbol{\alpha})$ [dosazením ekv.3 do 2]
5. $\neg(K_i \boldsymbol{\alpha} \wedge K_i \neg \boldsymbol{\alpha}) \equiv \neg K_i(\boldsymbol{\alpha} \wedge \neg \boldsymbol{\alpha})$ [taut. přepis ř. 1]
6. $\neg(K_i \boldsymbol{\alpha} \wedge K_i \neg \boldsymbol{\alpha})$ [Modus ponens a 5]

Jednoduché důsledky axiomu A3 (T) $K_i \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$:

c1) K2, T(A3) |- $\neg K_i \mathit{\mathbf{false}}$

1. $K_i \mathit{\mathbf{false}} \rightarrow \mathit{\mathbf{false}}$ [A3]
2. $\neg \mathit{\mathbf{false}} \rightarrow (\neg K_i \mathit{\mathbf{false}})$ [ekv. úprava 1]
3. $\neg K_i \mathit{\mathbf{false}}$ [použití výrokové tautologie na 2]

c2) K2, T |- $\neg K_i \boldsymbol{\alpha} \vee \neg K_i \neg K_i \boldsymbol{\alpha}$

[taut. úprava axiomu T $K_i \neg K_i \boldsymbol{\alpha} \rightarrow \neg K_i \boldsymbol{\alpha}$]

c3) K2, T |- $\neg K_i(\boldsymbol{\alpha} \wedge \neg K_i \boldsymbol{\alpha})$

1. $K_i \neg K_i \boldsymbol{\alpha} \rightarrow \neg K_i \boldsymbol{\alpha}$ [A3, axiom pravdy]
2. $\neg K_i \neg K_i \boldsymbol{\alpha} \vee \neg K_i \boldsymbol{\alpha}$ [výrok. Tautologie – přepis ř.1], *viz* a1
3. $\neg (K_i \neg K_i \boldsymbol{\alpha} \wedge K_i \boldsymbol{\alpha})$ [výrok. Tautologie – přepis ř.2]
4. $\neg K_i(\neg K_i \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha})$ [tvrzení o ekvivalenci a) pro formuli 3], *viz* a2

Už víme, že platí tato tvrzení:

a) $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta$

b) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A6}) \vdash \neg\,(K_i\,\alpha \wedge K_i \neg\,\alpha\,)$

c) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3}) \vdash \mathrm{A6}$

Ostatní tvrzení jsou jejich jednoduchými důsledky:

d) $\mathbf{K}_n \vdash K_i \neg\,(p \rightarrow K_i\,p) \equiv K_i\,(p \wedge \neg K_i\,p) \equiv (K_i\,p \wedge K_i\,(\neg K_i\,p))$

[stačí využít ekvivalenci a)]

e) V $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ nemůže být dokazatelné $K_i \neg\,(p \rightarrow K_i\,p)$

[Kdyby byla formule $K_i \neg\,(p \rightarrow K_i\,p)$ dokazatelná, muselo by podle d) být v $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ dokazatelné $(K_i\,p \wedge \neg K_i\,p)$, tedy *false* a systém $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ by musel být sporný. To neplatí, tedy formule nemůže být dokazatelná]

Důkazy následujících vztahů se opírají o již dokázané tvrzení:

M-T1: $\mathbf{K}_n, (\varphi \rightarrow \psi) \mid\!- K_i\,\varphi \rightarrow K_i\,\psi$

Mod_T8a: $\mathbf{K}_n$, **Ax3**, **Ax 5**, $K_i\,(p \rightarrow K_i\,p) \mid\!- K_i\,p \vee K_i \neg\,p$

1.	$K_i\,(p \rightarrow K_i\,p)$	předpoklad
2.	$K_i\,(p \rightarrow K_i\,p) \rightarrow (p \rightarrow K_i\,p)$	**Ax 3**
3.	$p \rightarrow K_i\,p$	Modus Ponens na řádky 2 a 3
4.	$(p \rightarrow K_i\,p) \rightarrow (\neg K_i\,p \rightarrow \neg\,p)$	výroková tautologie
5.	$\neg K_i\,p \rightarrow \neg\,p$	Modus Ponens na řádky 3 a 4
6.	$\neg K_i\,p \rightarrow K_i \neg K_i\,p$	**Ax 5**
7.	$K_i \neg K_i\,p \rightarrow K_i \neg\,p$	**M-T1** pro řádku 5
8.	$\neg K_i\,p \rightarrow K_i \neg\,p$	transitivita implikace pro řádky 6 a 7
9.	$\neg\neg K_i\,p \vee K_i \neg\,p$	výroková tautologie (přepis „→“ v řádce 8 pomocí „∨“)
10.	$(K_i\,p \vee K_i \neg\,p)$	úprava řádky 9 s využitím ekvivalence formulí $\neg\neg\,\alpha$ a α

Mod_T8b: K_n , Ax 4 ,$(K_i p \vee K_i \neg p)$ |- $K_i (p \to K_i p)$

1. $K_i p \to (p \to K_i p)$ výrokový axiom
2. $K_i K_i p \to K_i(p \to K_i p)$ **Mod_T1** pro řádku 1
3. $K_i p \to K_i K_i p$ **Ax4**
4. $K_i p \to K_i(p \to K_i p)$ transitivita implikace pro řádky 3 a 2
5. $\neg p \to (p \to K_i p)$ **výroková tautologie**
6. $K_i \neg p \to K_i(p \to K_i p)$ **Mod_T1** pro řádku 5
7. $(\alpha 1 \to \beta) \to ((\alpha 2 \to \beta) \to ((\alpha 1 \vee \alpha 2) \to \beta))$ **výroková tautologie** P-T2

   pro $\alpha 1 = K_i p$, $\alpha 2 = K_i \neg p$, $\beta = K_i (p \to K_i p)$
8. $(K_i p \vee K_i \neg p) \to K_i (p \to K_i p)$ Modus Ponens 2x pro ř. 7, 4 a 6
9. $K_i (p \to K_i p)$ Modus Ponens pro ř.8 a předpoklad

Cvičení. Dokažte, že následující formule jsou validní (platí ve všech Kripkeho strukturách):

$$(i) \quad (C_G A \wedge C_G (A \to B)) \to C_G B$$

$$(ii) \quad C_G A \to A$$

$$(iii) \quad C_G A \to C_G C_G A$$

$$(iv) \quad \neg C_G A \to C_G \neg C_G A$$

Předpoklady o výchozích relacích K_i jsou stejné, jako při odvození odpovídajících axiomů pro znalosti jedinců.

Důkaz využívá charakterizace společné znalosti skupiny G v K.struktuře pomocí G-dosažitelnosti (existence cesty prostř. G hran)

Náhrada bonusové úlohy 1

Vyberte mezi následujícími formulemi ty, které platí v libovolné Kripkeho struktuře:

a) $K_i \alpha \rightarrow \neg K_i \neg \alpha$

b) $K_i (\alpha \vee \neg \alpha)$

c) $(\alpha \rightarrow K_i \neg K_i \neg \alpha)$

d) $\neg K_i \neg (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg K_i \neg \alpha \vee \neg K_i \neg \beta)$