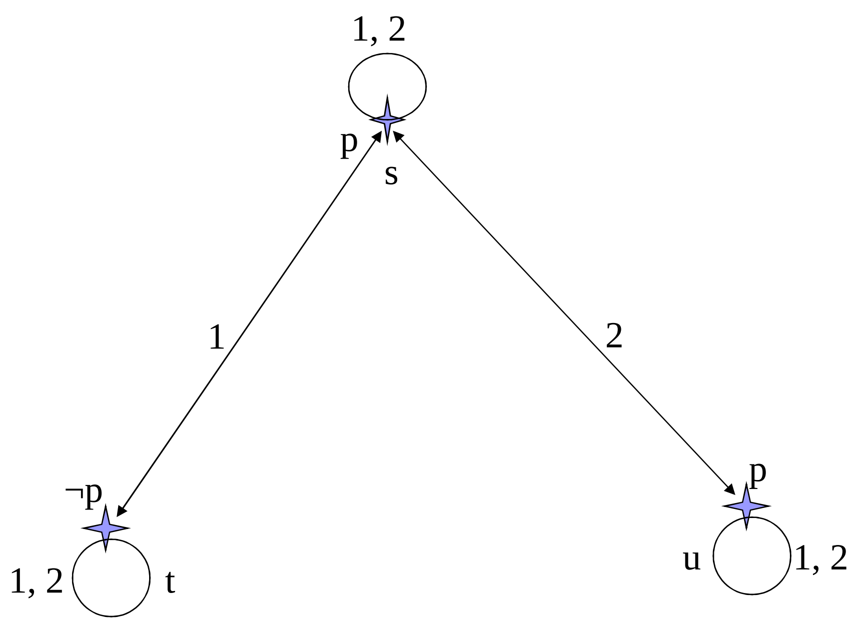
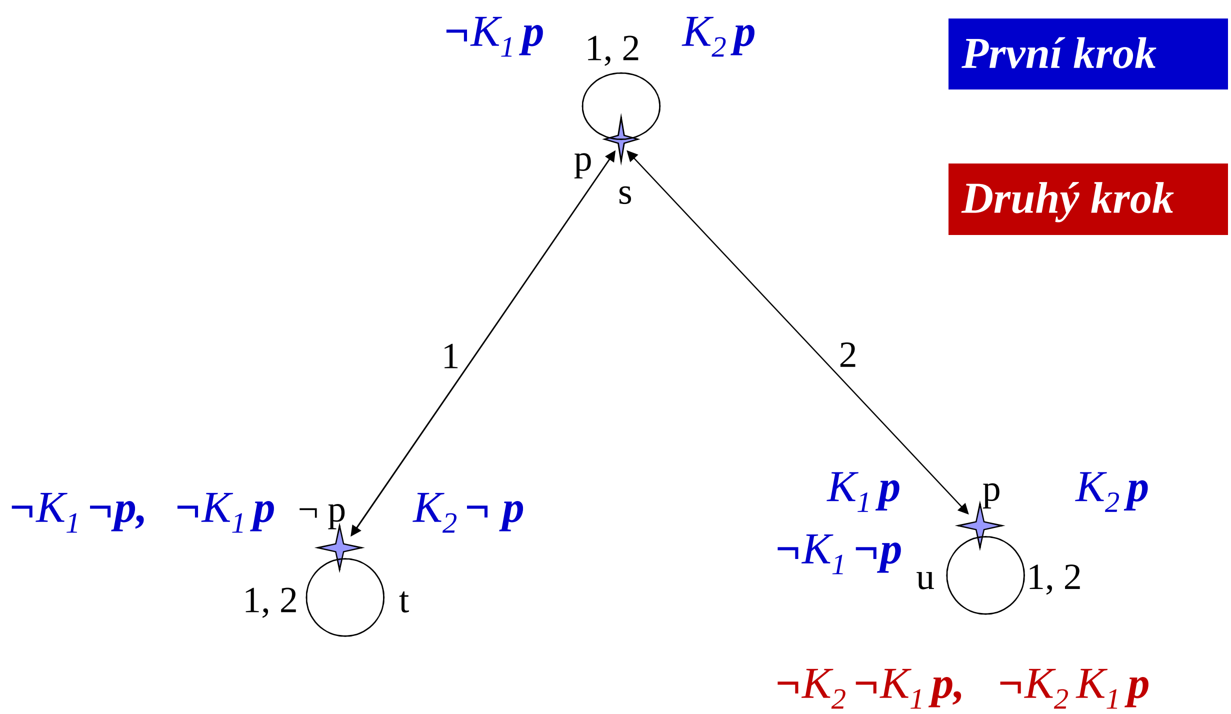
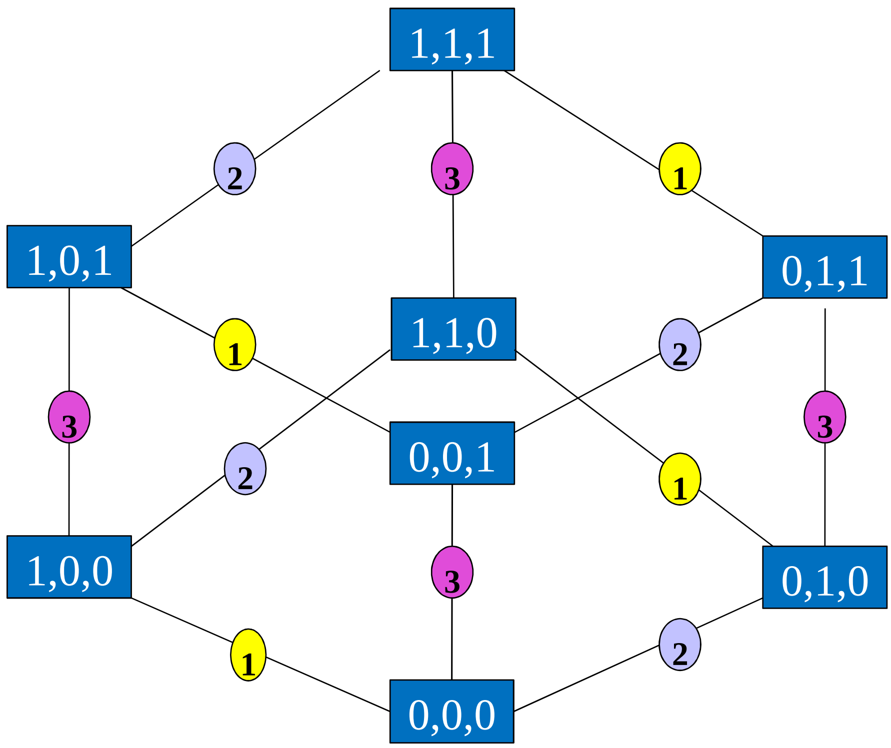
Znalosti v multi-agentních systémech



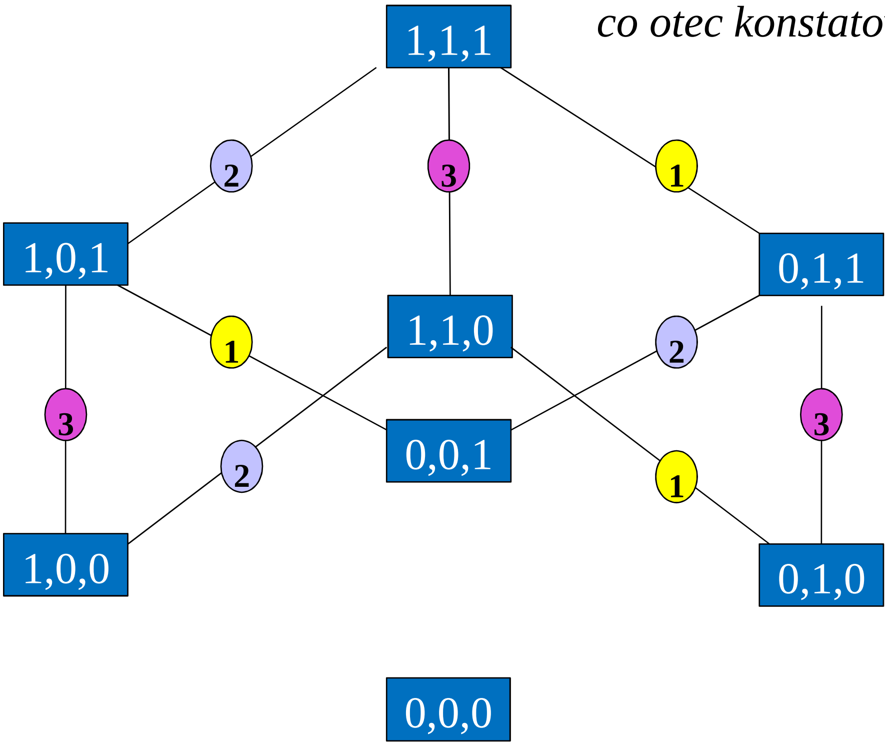


Pozor! Formule $\neg K_1 \neg p$ a $\neg K_1 p$ **nevyjadřují totéž**:
srovnej jejich platnost ve stavech **t** a **u.**

Kripkeho struktura pro 3 ušmudlané děti



Kripkeho struktura pro 3 ušmudlané děti** poté, co otec konstatoval **p



Příklad. Karetní hra 1

Karetní hra pro **3** hráče, jejichž sada karet obsahuje právě **4 ESA** a **4 DESÍTKY**. Každý „vidí“ jen karty svých spoluhráčů a ne ty svoje. Postupně hlásí, zda umí určit své karty - vyhrává první „znalý“!

Máme **4 ESA** a **4 DESÍTKY**, tedy každý z hráčů **1,2,3** může mít buď **DD, DE** nebo **EE.**

Kolo a)

1. Hráč3 vidí, že 1EE a 2DD.
2. Hráč1 i hráč2 ohlásili, že nemohou určit své karty
3. Může hráč3 vyhrát?

Ano, stačí zvážit všechny 3 možnosti a vyloučit ty nemožné!

Kolo b)

1. Jste **hráč1** a vidíte, že 2DD a 3DE.
2. Hráč1, hráč2 i hráč3 v prvním kole ohlásili, že nemohou určit své karty.
3. Může hráč1 v příštím tahu vyhrát?

Kolo c)

1. Jste **hráč2** a vidíte, že 1DE a 3DE.
2. Hráč1, hráč2 i hráč3 v prvním kole ohlásili, že nemohou určit své karty.
3. Hráč1 ani v dalším kole nemůže určit své karty.
4. Víte už, jaké karty držíte?

Máme **4 ESA** a **4 DESÍTKY**, tedy každý z hráčů **1,2,3** může mít buď **DD, DE** nebo **EE.**

$\Phi = \{1\mathbf{DD}, 1\mathbf{DE}, 1\mathbf{EE}, 2\mathbf{DD}, 2\mathbf{DE}, 2\mathbf{EE}, \ldots\}$

$S = \{ (\text{DD-DD-EE}), (\text{DD-DE-DE}), (\text{DD-DE-EE}), \ldots\}$

$\pi((\text{DD-DD-EE}))(2\mathbf{DD} \,\&\, 3\mathbf{EE}) = \mathit{true}$

$\pi((\text{DD-DD-EE}))(3\text{DD}) = \mathit{false}$ ...

$M = (S, \pi, K_1, K_2, K_3)$

Jak se vyjádří, že agent 2 neví jaké on sám má karty?

Např. $K_2(2\mathbf{DD} \vee 2\mathbf{DE} \vee 2\mathbf{EE}) \,\&\, \neg K_2\,\mathbf{DD} \,\&\, \neg K_2\,\mathbf{DE} \,\&\, \neg K_2\,\mathbf{EE}$

Příklad. Karetní hra 2

G = { 1, 2 } hrají dva hráči 1 a 2

c = { A, B, C} tři karty A, B, C

Φ = { 1A, 1B, 1C, 2A, 2B, 2C}

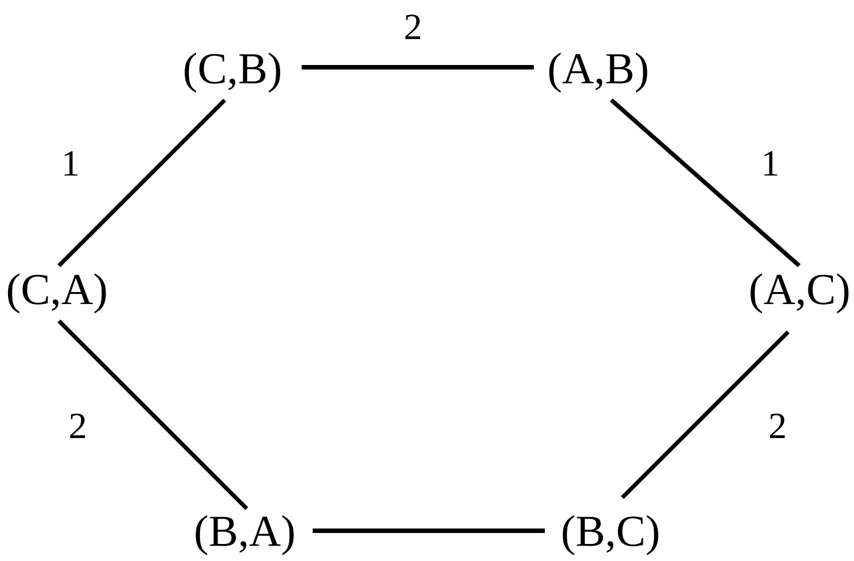
první hráč drží kartu A…

S = { (A,B), (A,C), (B, A), (B, C), (C, A), (C, B) }

množina stavů: první hráč drží A, druhý B, ...

$\pi((A, B))(1A) = \mathit{true}$ $\pi((A, B))(1B) = \mathit{false}$ ...

$M = (S, \pi, K_1, K_2)$



$$K_1 = \{[(A,B),(A,C)],[(B,A),(B,C)],[(C,B),(C,A)]\}$$

$$K_2 = \{[(C,A),(B,A)],[(A,B),(C,B)],[(A,C),(B,C)]\}$$

Tento příklad ukazuje, že je potřebné do struktury zařadit i stavy, které agent nepovažuje za možné.

Například ve stavu (A,B) *agent1* ví, že stav (B,C) není možný. (*Agent1* velmi dobře ví, že drží v ruce kartu A.)

Nicméně *agent1* považuje za možné, že *agent2* považuje za možný stav (B,C), musíme proto tento stav zařadit do Kripkeho struktury. To je v grafu znázorněno tím, že z uzlu (A,B) nevede do uzlu (B,C) žádná hrana ohodnocená číslem *1*.

Přitom taková hrana vede z uzlu (A,B) do uzlu (A,C), ze kterého dále vede hrana do uzlu (B,C) ohodnocená číslem *2*.

Zatím jsme se podrobněji nezabývali jazykem, který jsme použili v tomto příkladu. Protože se zajímáme uvažováním o tom, který agent drží kterou kartu, je vhodné za množinu prvotních výroků vzít množinu {*1A, 2A, 1B, 2B*, …}, jejíž prvky interpretujeme výroky „*agent1 drží kartu A*“, „*agent2 drží kartu A*“ atd.

Při této interpretaci prvotních výroků definujeme funkci π zřejmým způsobem.

Je-li M Kripkeho struktura popisující tuto karetní hru, potom například platí

$$(M,(A,B)) \models 1A \wedge 2B$$

Snadno se ověří

$$(M,(A,B)) \models K_1(2B \vee 2C)$$

$$(M,(B,C)) \models K_2(2C) \wedge K_2(1A \vee 1B)$$

$$(M,(A,B)) \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$$

$$(M,(A,B)) \models C_G(1B \rightarrow (2A \vee 2C))$$

$$(M,(A,B)) \models D_G(1A \wedge 2B)$$

Příklad 3 o 3 mudrcích

Král měl 5 klobouků stejného tvaru a velikosti: 3 z nich byly červené a 2 bílé. Král je ukázal mudrcům a každému z nich nasadil jeden tak, aby mudrc neviděl jeho barvu, ale viděl barvy klobouků těch ostatních.

Pak se začal postupně ptát 1. a 2. mudrce:

- Víte jakou barvu má váš klobouk?
- Oba odvětili NE.
- Třetí mudrc pak řekl „Já už vím!"

Víte také?

Nechť $\boldsymbol{M} = (S, \pi, \ldots K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n)$ je libovolná Kripkeho struktura a $\boldsymbol{s} \in S$ libovolný její stav. Ověřte, že pro libovolné formule $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí

i. $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{s}) \models (K_i \boldsymbol{A} \;\&\; K_i (\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B})) \rightarrow K_i \boldsymbol{B}$
ii. $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{s}) \models K_i \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$
iii. $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{s}) \models K_i \boldsymbol{A} \rightarrow K_i K_i \boldsymbol{A}$
iv. $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{s}) \models \neg K_i \boldsymbol{A} \rightarrow K_i (\neg K_i \boldsymbol{A})$

Lemma.

$$(i)\ (M,s) \models E_G^k A \quad \Leftrightarrow \quad (M,t) \models A \quad \text{pro každé } t, \ G-\text{dosažitelné v } k \text{ krocích}$$

$$(ii)\ (M,s) \models C_G A \quad \Leftrightarrow \quad (M,t) \models A \quad \text{pro každé } t, \ G-\text{dosažitelné z } s.$$

Důkaz.

(i) se dokáže indukcí podle k, (ii) plyne z (i).

Obě tato tvrzení platí pro libovolné relace přípustnosti K_i (nemusí jít jen o ekvivalence, neboť důkaz nevyužívá žádnou speciální vlastnost relací přípustnosti).

Anna a Bob

- **A**nna a **B**ob vědí, že organizátor vybere z osudí nějaké přirozené číslo ***n***, které napíše na čelo jednomu z nich a druhému napíše číslo „sousední“, tj. buď ***n*+1** nebo ***n*-1**. **Ani A**nna ani **B**ob neznají své číslo - vidí jen to partnerovo.
- Nakreslete odpovídající Kripkeho strukturu.
- Nechť **A** má na čele napsáno **3** a **B** zase **4**. Nakreslete odpovídající Kripkeho strukturu.
- Je společnou vlastností obou hráčů, že bylo vybráno číslo menší než 100?