# Znalosti v multi-agentních systémech

Olga Štěpánková

laboratory Gerstner

---

Filozofové a logici se nejdřív soustředili na studium vlastností znalostí a odvozování v případě jediného individua.

Ale jádrem každé analýzy běžných situací, jakými jsou

konverzace
obchodní vyjednávání
protokol řízený událostmi v distribuovaném prostředí

je interakce mezi (více) agenty

Naši agenti mohou být vyjednávači, komunikující roboti, vodiče, paměti nebo složité počítačové systémy



---

- Agent ve skupině musí brát v úvahu fakta, která jsou pravdivá v okolním světě,
- ale také znalosti ostatních agentů ve skupině.

**Příklad.** Kohout a pan Brouček.

*Dean neví, jestli Nixon ví, že Dean ví, že Nixon ví, že McCord se vloupal do O´Brienovy kanceláře ve Watergate.*

Většina lidí se rychle ztrácí v takto zahnízděné skupině znalostí, jedná-li se o „cizí“ prostředí.



---

**Příklad.**

Běžně se setkáváme se situací, kdy každý ve skupině ví určitý fakt.

*Každý řidič ví, že **červená je „stůj“ a zelená „volno“.** Tento fakt sám nestačí, abychom se na silnici cítili bezpečněji! **Proč?***

***Odbočování vlevo.***

*Potřebujeme si být jisti, že každý zná příslušné pravidlo a dodržuje ho.* V některých aplikacích nestačí ani tato „dvoustupňová“ znalost.



---

Jsou situace, kdy je třeba uvažovat stav, *v němž současně **každý ví nějaký fakt F,***

*každý ví, že **každý ví F,***

*každý ví, že každý ví, že **každý ví** F atd.*

V tako vém případě říkáme, že skupina má **společnou znalost *F.***

Společná znalost

- je nutná k porozumění lidské řeči či pro smysluplnou diskusi,
- je podmínkou k dosažení dohody,
- k racionálnímu rozhodování, …



---

**Ušmudlané děti.**

Výchozí stav *n* dětí si společně hraje. Po určité době se *k* dětí ušmudlá na místě, které nemohou vidět, například na čele.

Přichází otec a říká: ***„Jeden z vás má špínu na čele“.***

{to je fakt známý každému dítěti, je-li $k > 1$}

Otec se opakovaně ptá ***„Ví někdo z vás, zda má špínu na čele ?“***

Mohou děti dospět k nějakému závěru?

Nechť ***k*** dětí je ušmudlaných.

Označíme otcovo tvrzení „*nejméně jeden z vás má špínu na čele*“ písmenem ***p.*** Pokud $k > 1$, může se zdát, že otec tímto tvrzením neposkytl žádnou informaci.

Kdyby otec neřekl ***p***, žádné dítě nemůže dospět k nějaké odpovědi na dotaz ***„Ví někdo z vás, zda má špínu na čele ?“***

Indukcí podle *k* se dá dokázat, že bez ohledu na situaci tj. na aktuální počet ušmudlaných dětí, všechny děti odpoví NE na všech prvních $q < k$ otázek.

TEDY: ***k - 1*** krát všechny děti odpoví NE, v ***k***-tém kole všechny ušmudlané děti odpoví ANO.



**Ušmudlané děti.**

Výchozí stav *n* dětí si společně hraje, po určité době se *k* dětí ušmudlá na místě, které nemohou vidět, například na čele.

Přichází otec a říká: ***„Jeden z vás má špínu na čele“.***

{to je teď fakt známý každému dítěti, je-li $k > 1$}

Otec se opakovaně ptá ***„Ví někdo z vás, zda má špínu na čele ?“***

**Analýza**: Je-li $k > 1$, pak už dříve než otec řekne ***p***, každý ví ***p***, ale není vždy pravda, že každý ví, že každý ví ***p*** .

**První pokus** o důkaz indukcí podle *k*.



## Model znalostí

Kripkeho model možných světů.

Idea:
*Kromě skutečného stavu světa existuje jistý počet možných stavů - „možné světy“.*

Informace o skutečném světě, které agent má, nemusí být dostatečné (vyčerpávající). Agent v takovém případě není schopen říci, který z možných světů popisuje skutečný stav.

**Definice.** Říkáme, že *agent zná fakt* ***p*** , jestliže ***p*** je pravdivé ve všech stavech, které agent pokládá za možné (vzhledem k informacím, které má).



**Příklad.**

**Agent1** se prochází ulicemi Ústí nad Labem, kde je slunný den, ale nemá informaci o počasí v Humpolci.

Tedy ve všech světech, které **Agent1** pokládá za možné, je v Ústí nad Labem slunný den.

Na druhé straně, protože **Agent1** neví jaké počasí je v Humpolci, v některých z jeho možných světů v Humpolci prší a v jiných je v Humpolci slunný den.

**Agent1** tedy ví, že v Ústí nad Labem je slunný den, ale neví, je-li slunný den také v Humpolci.



Intuitivně:

**Čím méně je možných světů** (těch, které agent považuje za možné), tím je menší jeho nejistota a **tím více toho agent ví**.

Jestliže **Agent1** získá ze spolehlivého zdroje informaci, že v Humpolci je slunný den, pak již nemusí dále uvažovat jako možné ty světy, ve kterých v Humpolci prší (je zataženo, mlha a podobně).



Abychom mohli tyto myšlenky vyjádřit přesně, potřebujeme jazyk, který by dovolil vyjádřit pojmy týkající se znalostí jednoznačným způsobem.

Použijeme **jazyk výrokové modální logiky.**

Předpokládejme, že máme skupinu ***n*** agentů, které pojmenujeme $1, 2, \ldots, n$. Tito agenti chtějí uvažovat o světě, který se dá popsat neprázdnou množinou prvotních (primitivních) výroků **Φ**, které budeme označovat

$p, p', q, q', \ldots$

Prvotní výroky vyjadřují základní fakta o světě, například „*v Humpolci prší*“, „*Mařenka je ušmudlaná*“.

Abychom mohli vyjádřit tvrzení

*„Karel ví , že prší v Humpolci“*

rozšíříme jazyk o modální operátory

$$K_1, K_2, \ldots, K_n$$

každý pro jednoho agenta.

Výraz $K_i p$ čteme *„ agent **i** ví **p**“*.

K jazyku patří také základní výrokové spojky $\neg$ (*negace*) a $\wedge$ (konjunkce: často označovaná také *symbolem* **&**), z nichž se dají ostatní spojky definovat.



**Formule.**

$p \in \mathbf{\Phi} \;\Rightarrow\; p \in \textbf{\textit{Formule}}$

$A, B \in \textbf{\textit{Formule}} \;\Rightarrow\; \neg A, (A \wedge B) \in \textbf{\textit{Formule}}$

$A \in \textbf{\textit{Formule}}$ a $1 \le i \le n \;\Rightarrow\; K_i A \in \textbf{\textit{Formule}}$

**Standardní zkratky z výrokové logiky**

$A \vee B$ *za* $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

$A \rightarrow B$ *za* $\neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B$ *za* $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

*true za* $p \vee \neg p$ *false za* $\neg$*true*

{***p*** je pevně zvolená prvotní formule }



**Příklad.**

a) $K_1 K_2 p \wedge \neg K_2 K_1 K_2 p$

**Agent1** ví, že **Agent2** ví ***p*** , ale **Agent2** neví, že **Agent1** ví, že **Agent2** ví ***p*** .

**Poirot** ví, že **Mrs.A** ví ***kde má Mr.B léky*** , ale **Mrs.A** neví, že **Poirot** ví, že **Mrs.A** ví ***kde má Mr.B léky.***

b) **Možnost** chápeme jako duální ke znalosti.

Agent1 považuje ***A*** za možné, jestliže Agent 1 **neví** $\neg$ ***A*** , tj.

$$\neg K_1 \neg A$$



Uvažujme tvrzení

*Dean neví zda Nixon ví, že Dean ví, že Nixon ví, že McCord se vloupal do kanceláře O´Briena ve Watergate.*

Označíme-li Deana za agenta 1, Nixona za agenta 2 a $p$ za výrok *„McCord se vloupal do kanceláře O´ Briena ve Watergate“*.

Pak uvedené tvrzení lze zapsat takto

$$\neg K_1 \neg (K_2 K_1 K_2 p) \wedge \neg K_1 \neg (\neg K_2 K_1 K_2 p)$$



**Sémantika (naší) modální logiky.**

Kripkeho sémantika možných světů.

Kripkeho struktura $M$ pro $n$ agentů nad množinou prvotních formulí $\Phi$ je $(n+2)$-tice

$$(S, \boldsymbol{\pi}, K_1, K_2, \ldots, K_n)$$

kde $\boldsymbol{S}$ je **množina** všech možných světů nebo krátce **stavů**, $\boldsymbol{\pi}$ je interpretace stavů, která každému stavu $\boldsymbol{s}$ přiřazuje pravdivostní ohodnocení prvotních formulí z $\Phi$, tedy

$$\boldsymbol{\pi}(s) : \mathbf{\Phi} \rightarrow \{true,\ false\}$$

a $K_i$ jsou binární relace na $\boldsymbol{S}$ .



Na začátku našeho výkladu, budeme předpokládat, že tyto **relace přípustnosti** jsou **ekvivalence**. Potom

$$(s,t) \in K_i \;\Leftrightarrow\; (t,s) \in K_i$$

Znamená-li $(s,t) \in K_i$, že agent $i$ ve stavu $s$ považuje svět $t$ za možný (přípustný), pak ze symetrie a tranzitivity plyne, že agent $i$ má v $s$ i $t$ **stejnou informaci o světě** (stejnou množinu možných světů).

Stavy $s$ a $t$ jsou pro agenta *i* v tomto případě nerozlišitelné! Tento přístup se dá použít u řady aplikací.

**Sémantika možných světů.**

Budeme definovat pojem **(*M, s*) |= *A***, který čteme „formule *A platí ve struktuře M a stavu s*“ nebo „ *A je splněna v (M, s)*“. Postupujeme indukcí podle struktury *A* .

$(i)\quad (M,s) \models p \qquad \textit{právě když} \quad \pi(s)(p) = true \ \{p \in \Phi\}$

$(ii)\quad (M,s) \models \neg A \quad \textit{právě když} \quad (M,s) \not\models A$

$(iii)\quad (M,s) \models A \wedge B$ právě když $(M,s) \models A$ a $(M,s) \models B$

$(iv)\quad (M,s) \models K_i A \quad \textit{právě když} \quad (M,t) \models A$

$\textit{pro všechna } t,\ (s,t) \in K_i$



Kripkeho struktury lze zobrazit jako ohodnocené orientované grafy.

Uzly grafu jsou stavy $s \in S$. Každý uzel ***s*** je ohodnocen množinou prvotních formulí, které v ***s*** platí.

Orientované hrany ohodnocujeme množinami agentů, ohodnocení hrany z uzlu ***s*** do ***t*** obsahuje index ***i*** , jestliže $(s,t) \in K_i$.



**Příklad.**

Nechť $\Phi = \{p\}$ a $n = 2$, tedy náš jazyk má jednu prvotní formuli *p* a existují dva agenti.

Uvažujme Kripkeho strukturu

$$M = (S, \pi, K_1, K_2)$$

kde

(i) $S = \{s, t, u\}$

(ii) ***p*** je pravdivé ve stavech *s* a *u* , ne však v *t* . Tedy

$\pi(s)(\boldsymbol{p}) = \pi(u)(\boldsymbol{p}) = \textit{true}$ a $\pi(t)(\boldsymbol{p}) = \textit{false}$



(iii) agent1 neumí rozlišit stav *s* od *t* , takže

$$K_1 = \{(s,s),(s,t),(t,s),(t,t),(u,u)\}$$

agent2 neumí rozlišit stav *s* od *u* , tedy

$$K_2 = \{(s,s),(s,u),(u,s),(t,t),(u,u)\}$$

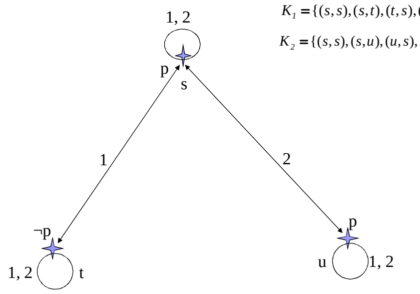
Situaci znázorníme následujícím grafem, který popisuje relace $K_i$.



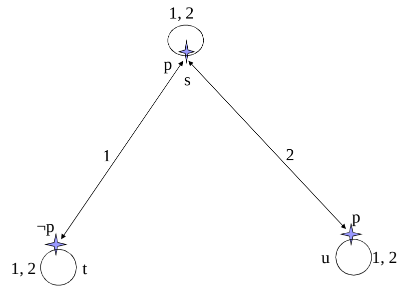
$\pi(s)(\boldsymbol{p}) = \pi(u)(\boldsymbol{p}) = \textit{true}$ a $\pi(t)(\boldsymbol{p}) = \textit{false}$

$K_1 = \{(s,s),(s,t),(t,s),(t,t),(u,u)\}$

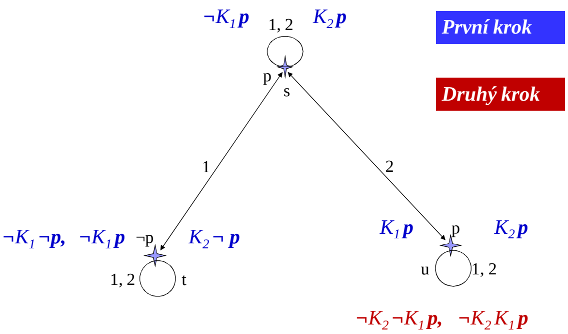
$K_2 = \{(s,s),(s,u),(u,s),(t,t),(u,u)\}$





**Pravdivostní hodnota formulí o znalostech.**






Je-li $p$ výrok „ v Ústí nad Labem slunce pálí“, potom ve stavu $s$ je v Ústí nad Labem slunný den, ale agent1 o tom neví, protože ve stavu $s$ považuje za možné oba stavy $s$ a $t$.

Agent1 je si vědom, že $s$ a $t$ jsou dva různé stavy. To co chceme říci je, že agent1 nemá dostatečné informace, aby rozlišil stavy $s$ a $t$.

Agent2 ve stavu $s$, ví že v Ústí nad Labem je slunečno, protože ve stavu $s$ považuje za možné jen stavy $s$ a $u$ a v obou $p$ platí.

Agent2 ví i ve stavu $t$ jaký je skutečný stav (tedy, že není slunečno).



Z toho plyne, že ve stavu $s$, agent1 ví, že agent2 ví, zda v Ústí nad Labem je slunný den nebo ne v obou stavech, které agent1 považuje za možné ve stavu $s$, jmenovitě je stavech $s$ a $t$, agent2 zná skutečný stav věcí v obou z nich.

Tedy ačkoliv agent1 neví ve stavu $s$ skutečnou situaci, ví že agent2 zná skutečnou situaci ve stavu $s$.

V kontrastu k tomu, i když agent2 ve stavu $s$ ví, že v Ústí nad Labem je slunný den, neví, že agent1 nezná tento fakt {v jednom světě, který agent2 považuje za možný, jmenovitě $u$ agent1 ví že v Ústí je slunečno, ale ve druhém možném světě agenta2, jmenovitě $s$ agent1 tento fakt neví}.



Tato komplikovaná úvaha může být shrnuta do jediného sémantického tvrzení

$$(M,s) \models p \wedge \neg K_1 p \wedge K_2 p \wedge K_1(K_2 p \vee K_2 \neg p) \wedge \neg K_2 \neg K_1 p$$

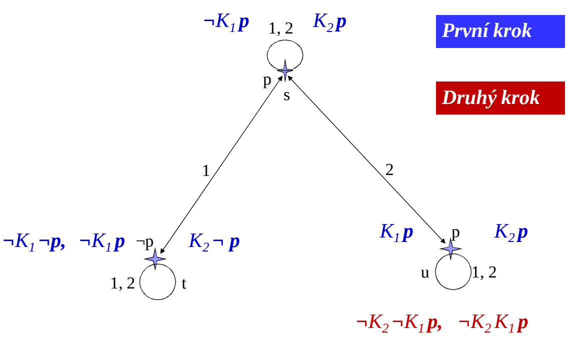
Protože ve stavech $s$ a $u$ má naše jediná prvotní formule stejné ohodnocení, zdálo by se, že je možné jeden z nich vynechat. To ale není možné!

Stav není určen jen pravdivostním ohodnocením, ale také relacemi mezi možnými světy.

Kdyby agent1 považoval ve stavu $s$ za možný stav $u$ místo stavu $t$, věděl by jaká je situace ve stavu $s$.

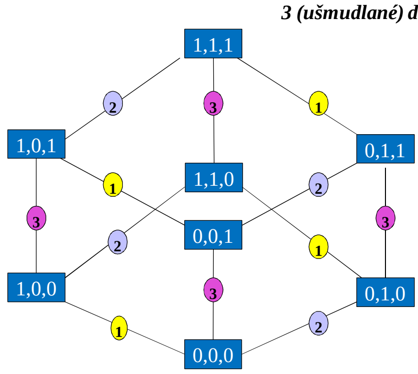


$$(M,s) \models p \wedge \neg K_1 p \wedge K_2 p \wedge K_1(K_2 p \vee K_2 \neg p) \wedge \neg K_2 \neg K_1 p$$

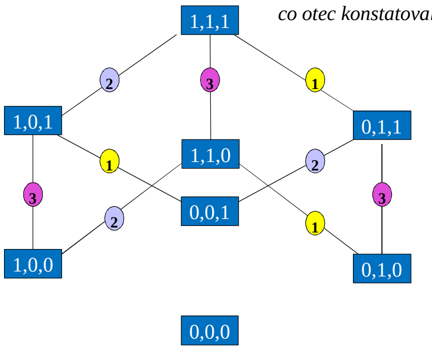





***Kripkeho struktura pro 3 (ušmudlané) děti***



***Kripkeho struktura pro 3 ušmudlané děti*** *poté, co otec konstatoval* ***p***






**Společné (všeobecné) a distribuované znalosti**

K vyjádření těchto pojmů přidáme do jazyka tři modální operátory

$E_G$ {"*každý ve skupině G ví*"}

$C_G$ {" *je to všeobecná znalost mezi agenty v G*"}

$D_G$ {" *je to distribuovaná znalost mezi agenty v G*"}

pro každou neprázdnou podmnožinu $G$ množiny [1, 2, . . . , n]. Je-li $A$ formule, potom $E_G A$, $C_G A$ a $D_G A$ jsou také formule.



**Příklad.**

$K_3 \neg C_{[1,2]} p$ agent3 ví, že $p$ není společná (všeobecná) znalost mezi agenty 1 a 2.

$D_G q \wedge \neg C_G q$ $q$ je distribuovaná znalost, ale není to znalost všeobecná.

Není těžké definovat sémantiku těchto operátorů. Nejprve definujme iteraci operátoru $E_G$.

$$E_G^0 A \equiv A \qquad E_G^{n+1} A \equiv E_G E_G^n A$$



**Definujeme**

$$(M,s) \models E_G A \iff (M,s) \models K_i A \text{ pro všechna } i \in G$$

$$(M,s) \models C_G A \iff (M,s) \models E_G^k A \text{ pro všechna } 1 \le k$$

Oba pojmy mají zajímavou grafovou interpretaci: Je-li ***G*** neprázdná podmnožina agentů, říkáme, že stav ***t*** je ***G***-*dosažitelný ze stavu* ***s*** v $0 < k$ krocích, jestliže existuje posloupnost stavů

$$s \equiv s_0, s_1, \ldots, s_k \equiv t$$

taková, že pro každé $j, 0 \le j < k$ existuje $i \in G$ takové, že $(s_j, s_{j+1}) \in K_i$. Říkáme, že ***t*** *je* ***G****-dosažitelné z* ***s***, je-li ***G***-dosažitelné po konečném počtu kroků.



**Lemma.**

$(i)\ (M,s) \models E_G^k A \iff (M,t) \models A$ *pro každé* $t$, $G-$*dosažitelné v* $k$ *krocích z* $s$

$(ii)\ (M,s) \models C_G A \iff (M,t) \models A$ *pro každé* $t$, $G-$*dosažitelné z* $s$.

**Důkaz.**

(i) se dokáže indukcí podle $k$, (ii) plyne z (i).

Obě tvrzení lze dokázat pro libovolné relace $K_i$ (nepředpokládá se žádná jejich speciální vlastnost).



**Distribuované znalosti.**

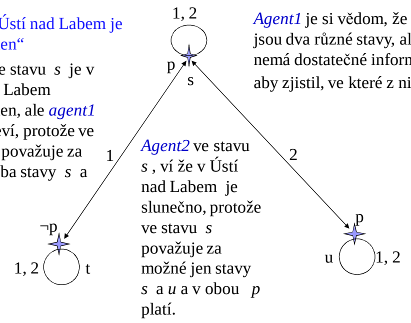
Vraťme se k našemu modelu z Ústí nad Labem.

*p* = „v Ústí nad Labem je slunný den“

potom ve stavu *s* je v Ústí nad Labem slunný den, ale *agent1* o tom neví, protože ve stavu *s* považuje za možné oba stavy *s* a *t*.

*Agent1* je si vědom, že *s* a *t* jsou dva různé stavy, ale nemá dostatečné informace, aby zjistil, ve které z nich je.

*Agent2* ve stavu *s*, ví že v Ústí nad Labem je slunečno, protože ve stavu *s* považuje za možné jen stavy *s* a *u* a v obou *p* platí.



Ve stavu $s$ *agent1* považuje za možné oba stavy $s$ i $t$, ale ne stav $u$.

Přitom *agent2* považuje za možné stavy $s$ a $u$, zatímco stav $t$ ne.

**Kdo by uměl využít znalosti obou agentů, ten by věděl, že možný je jenom stav $s$:** *agent1* má dost znalostí, aby mohl vyloučit stav $u$ a *agent2* by ze stejného důvodu vyloučil stav $t$.



Obecně, kombinujeme znalosti agentů ze skupiny $G$, abychom vyloučili všechny ty světy, které některý agent ze skupiny $G$ považuje za nemožné.

Tomu odpovídá průnik relací $K$. Definujeme *distribuovanou znalost* $D_G$ vztahem

$$(M,s) \models D_G A \iff (M,t) \models A \quad \textit{pro každé } t, \quad (s,t) \in \bigcap_{i \in G} K_i$$



Označme $p$ tvrzení, že „jedno z dětí je ušmudlané“

Je-li počet ušmudlaných dětí v naší historce $k = 2$, není těžké ukázat, že každé dítě je ve stavu, v němž „ví, že $p$“, ale v němž neplatí, že „každý ví, že každý ví $p$“.

Naopak, je-li $k = 3$, tvrzení že „každý ví, že každý ví $p$“ platí. Ale neplatí, že „každý ví, že každý ví, že každý ví $p$. (3 krát)“

Označme $E^k p$ *tvrzení* (*každý ví, že*)$^k$ *platí* $p$

$C p$ *tvrzení, že* $p$ *společná znalost*

**Cvičení** Je-li právě $k$ dětí ušmudalných, dříve než otec promluví, platí pro každé dítě, že je ve stavu, v němž platí $E^{k-1} p$, ale neplatí $E^k p$.

Otcovo prohlášení mění stav znalostí dětí z $E^{k-1} p$ na $C p$.



# Král a jeho 3 rádci

Král dal do prázdně truhly 5 klobouků stejného tvaru, z nichž 3 byly bílé a 2 černé. Všichni tři rádcové společně před králem, kam museli postupně vejít úplně zatemněnou předsíní, kde každému z nich někdo ze sloužících dal na hlavu jeden z klobouků v truhle s tím, že klobouk si v žádném případě nesmí sundat.

- “*Přijdete jen silou svého rozumu na to, jaký má kdo z Vás klobouk? Odpovídejte v pořadí, jak jste vešli do místnosti.*“ Rádci se podívali na sebe navzájem a postupně odpovídali takto:
- **Rádce1** (ten, který vešel první) řekl, že neví, jaký má klobouk.
- **Rádce2** řekl, že ani on neví, jaký má klobouk.
- **Rádce3** v tom okamžiku oznámil, že už ví, jaký má klobouk.

a) Podaří se i nám uhodnout, jaké barvy klobouků dostali jednotliví rádci?

b) Jak by se situace změnila, kdyby každý z nich musel odpovědět ihned, jakmile vyšel z temné předsíně?




- Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, Moshe Y. Vardi: Reasoning About Knowledge, MIT Pres 1995, 2003

- Kapitola v UI(6)