Jaké vlastnosti mají znalosti

(v sémantice možných světů)

Platí

formule ***A*** je platná (platná v *M*) právě když formule ***¬A*** není splnitelná (není splnitelná v *M*).

Připomeňme, že stále předpokládáme, že relace K_i jsou ekvivalence.

Validních formulí je jistě velké množství (všechny výrokové tautologie, …)

Hledáme nějaký způsob, jak je charakterizovat pomocí syntaktických prostředků.

Existuje FORMÁLMÍ SYSTÉM, který to dokáže?

Jeden ze způsobů jak charakterizovat naši interpretaci znalostí je popsat formule, které jsou vždy platné (pravdivé).

Nechť je dána struktura $M = (S, \pi, K_1, \ldots, K_n)$. Říkáme, že

(i) *formule* ***A*** *platí (validní) v* ***M*** **(*M* |= *A*)**, jestliže v každém stavu ***s*** je ***A*** pravdivá **, *tj.*** (*M, s*) |= ***A*** **.**

(ii) *formule* ***A*** *je splnitelná v* ***M*** , jestliže **(*M, t*)** |= ***A*** v nějakém stavu ***t*** .

(iii) ***formule A je platná (validní)*** a píšeme |= ***A*** , je-li platná (validní) ve všech strukturách.

(iv) *formule* ***A*** *je splnitelná*, je-li splnitelná v nějaké struktuře.

(v) *formule* ***B*** *je* ***logickým důsledkem*** *formule* ***A***, pokud pro každou strukturu ***M***, ve které platí ***A***, vždy platí i ***B*** - stručněji: pokud ***M*** |= ***A*** , pak také ***M*** |= ***B***.

Při zavedeném pojetí znalostí platí, že agent zná všechny logické důsledky svých znalostí.

Ví-li agent tvrzení *A* a také ví, že *A* implikuje *B*, potom obě formule *A* a $A \rightarrow B$ jsou pravdivé ve všech světech, které agent považuje za možné,

tedy také *B* musí být pravdivé ve všech světech, které agent považuje za možné, takže musí vědět (znát) i *B* .

Odtud dostáváme $\models (K_i A \wedge K_i(A \rightarrow B)) \rightarrow K_i B$

Této formuli se říká **axiom distribuce** nebo také Kripkův axiom a označuje se jako **K**, protože dovoluje distribuovat operátor K_i přes implikaci.

Druhá vlastnost našeho pojetí znalosti zaručuje, že máme dostatečně silné a schopné agenty: předpokládáme totiž, že každý agent zná všechny formule platné (validní) v dané struktuře.

Je-li ***A*** pravdivá ve všech stavech (tj. možných světech) struktury ***M***, pak je pravdivá ve všech těch světech, které agent v daném světě považuje za možné. TEDY:

*Pro libovolnou strukturu **M** platí „je-li $\mathbf{M} \models \mathbf{A}$, pak $\mathbf{M} \models \mathbf{K_i A}$“*

Hledáme **formální systém** (soubor axiomů a pravidel) takový, že jej lze použít pro dokazování těch formulí, které jsou platné ve všech strukturách.

Příkladem dokazovacího pravidla je **pravidlo generalizace znalostí** ***„z A lze odvodit*** $K_i A$ ***“***, což se někdy zapisuje jako

$$\frac{A}{K_i A}$$

Agent nemusí znát všechna fakta, která jsou pravdivá! Ale když agent něco ví, pak to platí:

$$\models K_i A \rightarrow A$$

Tato vlastnost se obvykle nazývá ***Axiom znalostí*** nebo ***Axiom pravdy*** a často se označuje **T**.

Odůvodnění axiomu: svět, ve kterém se agent nachází, je vždy takový, který pokládá za možný. Platí-li $K_i A$ v nějakém světě (M, s), pak A platí ve všech světech, které i považuje za možné, tedy i v (M, s).

{Filosofové tento axiom považují za hlavní odlišení mezi **znalostí** a **přesvědčením** (vírou, *belief*). Mohu mít nepravdivé **přesvědčení**, ale nemohu vědět něco, co není pravda!}

Pozor! Pravidlo generalizace je něco jiného než platnost implikace $A \rightarrow K_i A$

která tvrdí „je-li A pravdivá, potom agent i to ví“: toto **NENÍ validní formule**! Agent nemusí vědět všechny věci, které jsou pravdivé.

{*Například při hře zablácených dětí může mít jedno z nich zablácené čelo, ale nemusí to vědět*.}

Agenti znají všechny validní formule, ale nic víc! Jinými slovy znají JEN formule, které jsou *nutně* pravdivé.

Neznají však formule, které jsou (*řízením osudu*) pravdivé jen v nějakém z možných světů.

V případě, že chceme popisovat to, čemu agent věří, nikoliv to, co ví, nahradíme axiom pravdy

$$\models K_i A \rightarrow A$$

slabším požadavkem:

Axiom konzistence požaduje $\neg K_i\, false$, který se často se označuje jako **D**.

Další dvě vlastnosti se týkají přirozeného požadavku, aby agenti věděli o svých znalostech (pomocí introspekce).

Agenti vědí, co vědí a vědí, co nevědí.

$$\models K_i A \rightarrow K_i K_i A$$
$$\models \neg K_i A \rightarrow K_i \neg K_i A$$

První z těchto vlastností se jmenuje ***Axiom pozitivní introspekce*** (často označovaný **4**),

druhá ***Axiom negativní introspekce*** (často označovaný (často označovaný **5**).

Formální (axiomatický) systém K_n

Axiomy: **A1.** Všechny tautologie výrokové logiky

A2. $(K_i \alpha \wedge K_i (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow K_i (\beta)$

Odvozovací pravidla:

R1. Z α formulí $\alpha \rightarrow \beta$ odvoďte β (modus ponens)

R2. Z formule α odvoď $K_i \alpha$ (pravidlo zobecnění znalosti)

V $\mathbf{K}_n$ lze dokázat například tvrzení $K_i (\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i \alpha$ (viz dále), což se značí: $\mathbf{K}_n \vdash K_i (\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i \alpha$

Jaké vlastnosti má systém K_n? Jaký je vztah mezi formulemi, které jsou dokazatelné a těmi, které jsou platné v množině všech Kr. struktur s n agenty?

Formální systém je korektní, pokud každá dokazatelná formule je i platná (jinými slovy: „pro libovolnou formuli A z $\vdash A$ plyne $\models A$“).

Form.systém je úplný, pokud „pro lib.formuli A z $\models A$ plyne $\vdash A$“

Formální (axiomatický) systém K_n

Axiomy: **A1.** Všechny tautologie výrokové logiky

A2. $(K_i \alpha \wedge K_i (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow K_i (\beta)$

Odvozovací pravidla:

R1. Z α formulí $\alpha \rightarrow \beta$ odvoďte β (modus ponens)

R2. Z formule α odvoď $K_i \alpha$ (pravidlo zobecnění znalosti)

Důkaz formule φ ve formálním systému je posloupnost formulí $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ taková, že δ_n je dokazované φ a pro každé δ_i ($i < n$+1) platí

- δ_i je buď axiomem formálního systému
- nebo existují čísla j,k menší než i taková, že δ_i vznikne použitím odvozovacího pravidla na δ_j a δ_k.

Formule φ je dokazatelná ve formálním systému (značí se $\vdash \varphi$), pokud existuje její důkaz.

Označme $\mathcal{M}_n(\Phi)$ množinu všech Kripkeho struktur nad množinou prvotních formulí $\mathbf{\Phi}$ pro n agentů takových, že na relace K_i nejsou kladeny žádné požadavky.

$\mathcal{M}_n^{rst}(\Phi)$ nechť je pak podmnožina $\mathcal{M}_n(\Phi)$, ve které každá relace přípustnosti splňuje vlastnosti ***rst***:

reflexivní

symetrická

transitivní.

Jedná se tedy o relace **ekvivalence**.

Věta (viz cvičení).

Pro všechny struktury M pro n agentů s relacemi K_i, které jsou ekvivalencemi, a pro libovolné formule A, B platí

$(i)\quad M \models (K_i A \wedge K_i(A \to B)) \to K_i B$

$(ii)\quad je-li \quad M \models A \quad potom \quad M \models K_i A$

$(iii)\quad M \models K_i A \to A$

$(iv)\quad M \models K_i A \to K_i K_i A$

$(v)\quad M \models \neg K_i A \to K_i \neg K_i A$

Důkaz formule φ ve formálním systému z předpokladu α je posloupnost formulí $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ taková, že δ_n je dokazované φ a pro každé δ_i ($i < n+1$) platí

- δ_i je buď axiomem formálního systému nebo se jedná o předpoklad α
- nebo existují čísla j,k menší než i taková, že δ_i vznikne použitím odvozovacího pravidla na δ_j a δ_k.

Formule φ je dokazatelná ve formálním systému z předpokladu α (značí se $\alpha \vdash \varphi$), pokud existuje důkaz φ z předpokladu α.

Axiomy modální logiky

1. **Výrokové tautologie**
2. **Distribuční axiom** (označovaný někdy jako **K**) $(K_i A \wedge K_i(A \to B)) \to K_i B$
3. **Axiom znalostí (Axiom pravdy)** (ozn. jako **T**) $K_i A \to A$ — r
4. **Axiom pozitivní introspekce** (ozn. jako **4**) $K_i A \to K_i K_i A$ — t
5. **Axiom negativní introspekce** (ozn. jako **5**) $\neg K_i A \to K_i \neg K_i A$ — s +t
6. **Axiom konzistence** (ozn.jako **D**) $\neg K_i\, false$

Odvozovací pravidla:

R1. Z α formulí $\alpha \to \beta$ odvoďte β (modus ponens)
R2. Z formule α odvoď $K_i\, \alpha$ (pravidlo zobecnění znalosti)

Trzení 1 (příklad důkazu formule $K_i\, \varphi \to K_i\, \psi$ z předpokladu $(\varphi \to \psi)$ ve formálním systému $\mathbf{K}_n$) : $\mathbf{K}_n$, $(\varphi \to \psi) \vdash K_i\, \varphi \to K_i\, \psi$

1. $(\varphi \to \psi)$ [předpoklad]
2. $K_i(\varphi \to \psi)$ [R2]
3. $K_i\varphi \to (K_i(\varphi \to \psi) \to K_i\psi)$ [K2]
4. $(K_i\varphi \to (K_i(\varphi \to \psi) \to K_i\psi)) \to (K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi))$
   [Prop-T1: $(\varphi \to (\psi \to \tau)) \to (\psi \to (\varphi \to \tau))$]
5. $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$ [MP 4 a 3]
6. $(K_i\varphi \to K_i\psi)$ [MP 5 a 2]

Tvrzení 2: Jsou-li dvě výrokové φ, ψ formule ekvivalentní (tj. $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ je tautologie, značeno $\varphi \equiv \psi$), pak $\mathbf{K}_n \vdash K_i\, \varphi \equiv K_i\, \psi$.

Důsledek právě dokázaného tvrzení .

Věta 1: Systém K_n představuje korektní a úplný syntaktický popis všech formulí validních v množině $\mathcal{M}_n(\Phi)$ Kripkeho struktur (K_n je axiomatizací vzhledem k $\mathcal{M}_n(\Phi)$).

Věta 2:

Axiom T má tvar $K_i A \to A$. Systém $T_n = (K_n + \text{axiom T})$ je axiomatizací vzhledem k $\mathcal{M}_n^r(\Phi)$.

Axiom 4 má tvar $K_i A \to K_i K_i A$. Systém $S4_n = (T_n + \text{axiom 4})$ je axiomatizací vzhledem k $\mathcal{M}_n^{rt}(\Phi)$.

Axiom 5 má tvar $\neg K_i A \to K_i \neg K_i A$. Systém $S5_n = (S4_n + \text{axiom 5})$ je axiomatizací vzhledem k $\mathcal{M}_n^{rts}(\Phi)$.

.

$K_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha$:

Důkaz: [Jako zdůvodnění **musíme** uvést buď ***odvolání na axiom*** nebo ***informaci o použití odvoz. pravidla*** na předchozí řádky důkazu**]**

1. $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$ **[Výroková tautologie]**

2. $K_i((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$ [**R2:** 1, čili **R2** použito na formuli z řádky 1 **]**

3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \wedge K_i((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)) \to K_i \alpha$ **[K]**

4. $((K_i(\alpha \wedge \beta) \wedge K_i((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)) \to K_i \alpha)$

$\to (K_i((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha))$

[Výr. tautologie $((p \wedge q) \to r) \to (q \to (p \to r))$]

5. $K_i((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha)$ **[R1:** 3,4**]**

6\. $K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha$ **[R1:** 2,5**]**

Další příklady důkazu některých platných vztahů:

c1) K2, T(Axiom 3) $\vdash \neg K_i\, \mathit{false}$

1. $K_i\, \mathit{false} \to \mathit{false}$ [A3]
2. $\neg \mathit{false} \to (\neg K_i\, \mathit{false})$ [ekv. úprava 1]
3. $\neg K_i\, \mathit{false}$ [použití výrokové tautologie na 2]

c2) K2, T $\vdash \neg K_i \alpha \vee \neg K_i \neg K_i \alpha$

c3) K2, T $\vdash \neg K_i(\alpha \wedge \neg K_i \alpha)$

1. $K_i \neg K_i \alpha \to \neg K_i \alpha$ (A3, axiom pravdy)
2. $\neg K_i \neg K_i \alpha \vee \neg K_i \alpha$ (výrok. Tautologie – přepis 1), *viz* a1
3. $\neg (K_i \neg K_i \alpha \wedge K_i \alpha)$ (výrok. Tautologie – přepis 2)
4. $\neg K_i(\neg K_i \alpha \wedge \alpha)$ (tvrzení o ekvivalenci a) pro formuli 3), *viz* a2

$K_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i \alpha \wedge K_i \beta$

1. $K_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha$ [viz předchozí strana]
2. $K_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \beta$ [důkaz obdobný tomu na předchozí straně]
3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha) \to ((K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i \alpha \wedge K_i \beta)))$
   [$(\rho \to \varphi) \to ((\rho \to \psi) \to (\rho \to (\varphi \wedge \psi)))$ výroková tautologie]
4. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i \alpha \wedge K_i \beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i \alpha \wedge K_i \beta)$ [MP: 4,2]

Tvrzení 1: $K_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i \alpha \wedge K_i \beta$

Důkaz: kombinace důkazů na této a následující straně.

$\mathbf{K}_n \vdash K_i \alpha \wedge K_i \beta \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)$

6. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ [výroková tautologie]
7. $K_i(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [R2:6]
8. $K_i\alpha \rightarrow (K_i(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [A2]
9. $K_i(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow (K_i\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 8]
10. $(K_i\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 9,7]
11. $(K_i\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow (K_i\beta \rightarrow (K_i\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))))$ [Výr.Ax1]
12. $K_i\beta \rightarrow (K_i\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 11,10]
13. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ [výroková úprava 12]
14. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 13]
15. $K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)$ [A2]
16. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta))$
$\rightarrow (((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [Výr. Ax3]
17. $(K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [V.Ax1]
18. $((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 17,15]
19. $(((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 16,18]
20. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)$ [MP: 19,14]

E_G C_G D_G

G je podmnožinou {1, 2, . . . , n}, $E_G A$ je **pravdivé**, právě když každý agent z G ví A. Tedy

Axiom C1. $E_G A \Leftrightarrow \bigcap_{i \in G} K_i A$

Intuitivně, **společná** (všeobecná, *common*) **znalost** je to „*co je každému zcela jasné a ví to*“, proto nepřekvapí, že společná znalost má všechny vlastnosti znalostí podobné **Distribučnímu axiomu**, **Axiomu znalostí**, **Axiomům pozitivní** a **negativní introspekce**.

Pro všeobecnou znalost mezi skupinami agentů platí

$Je-li \quad Q \subseteq G \quad potom \quad C_G A \rightarrow C_Q A$

Další vztahy, které lze dokázat:

a) $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\alpha \wedge K_i\beta$
b) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A6}) \vdash \neg(K_i\alpha \wedge K_i\neg\alpha)$
c) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3}) \vdash$ A6
d) $\mathbf{K}_n \vdash K_i\neg(p \rightarrow K_i p) \equiv K_i(p \wedge \neg K_i p) \equiv (K_i p \wedge K_i(\neg K_i p))$
e) V $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ nemůže být dokazatelné $K_i\neg(p \rightarrow K_i p)$

Cvičení. Dokažte, že následující formule jsou validní (platné ve všech Kripkeho strukturách:

(i) $(C_G A \wedge C_G(A \rightarrow B)) \rightarrow C_G B$

(ii) $C_G A \rightarrow A$

(iii) $C_G A \rightarrow C_G C_G A$

(iv) $\neg C_G A \rightarrow C_G \neg C_G A$

Předpoklady o relacích K_i jsou stejné, jako při odvození odpovídajících axiomů pro znalosti.

Axiom o pevném bodu.

Nechť p je výrok „alespoň jeden z vás má zablácené čelo“.

Připomeňme, že ve hře zablácených dětí, se z p stala všeobecná znalost v okamžiku, kdy otec řekl p tak, aby všechny děti věděly,

- že platí p a
- že všechny děti to vědí.

Axiom C2.

$$\models C_G A \leftrightarrow E_G(A \wedge C_G A)$$

{ $C_G A$ je pevným bodem funkce $f(x) = E_G(A \wedge x)$ }

VZ 2009

Následující tvrzení dává sémantické odůvodnění charakteristiky operátoru E_G, Axiomu o pevném bodu a Indukčního pravidla.

Věta - shrnutí

Pro všechny struktury M, všechny neprázdné podmnožiny G množiny {1, 2, . . . , n} a libovolné formule A, B platí

$(i)\quad M \models E_G A \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i \in G} K_i A$

kde $\bigcap_{i \in G} K_i A$ označuje konjunkci všech $K_i A$ pro vš. i z G

$(ii)\quad M \models C_G A \leftrightarrow E_G(A \wedge C_G A)$

$(iii)\ je-li\ \ M \models A \rightarrow E_G(B \wedge A),\ \ potom\ \ M \models A \rightarrow C_G B$

VZ 2009

Následující odvozovací pravidlo dává způsob, jak ukázat, že v nějaké struktuře platí společná znalost.

Indukční pravidlo RC1

Pro všechny struktury M platí

je - li $M \models A \rightarrow E_G(B \wedge A)$, potom $M \models A \rightarrow C_G B$

Idea. Předpoklad indukčního pravidla dává možnost indukcí podle k dokázat, že formule

$A \rightarrow E_G{}^k(B \wedge A)$ je validní pro každé k.

VZ 2009

Distribuované znalosti

charakterizují znalosti, které odpovídají tomu, když „*všichni agenti dají hlavy dohromady*“. Proto splňují stejné vlastnosti jako znalosti. Navíc upozorníme na dvě drobnosti.

$$\models D_{\{i\}} A \leftrightarrow K_i A$$

pro jednočlennou skupinu se distribuované znalosti shodují s tím, co agent ví.

Naopak, čím je skupina větší, tím větší jsou její distribuované znalosti.

$Je-li\ \ G \subseteq Q\ \ potom\ \models D_G A \rightarrow D_Q A$

VZ 2009

Dú-MOL2a Anna a Bob (2 body)

- **A**nna a **B**ob vědí, že organizátor vybere z osudí nějaké přirozené číslo $\boldsymbol{n} < \mathbf{10}$, které napíše na čelo jednomu z nich a druhému napíše číslo „sousední“, tj. buď $\boldsymbol{n}$**+1** nebo $\boldsymbol{n}$**-1**. Ani **A**nna ani **B**ob neznají své číslo - vidí jen to partnerovo. Anna vidí číslo **4**.
- Nakreslete odpovídající Kripkeho strukturu a popište podrobně postup (výměnu informací typu „Neznám své číslo!“), při němž se oba snaží své číslo zjistit.

VZ 2009

Dú-MOL2b Dokazování (3 body)

Předvěčte se, že v ($\mathbf{K}_n$ + A3) nemůže být dokazatelné $K_i \neg (\boldsymbol{p} \rightarrow K_i \boldsymbol{p})$.

Návod: Předpokládejte, že tato formule dokazatelná je a za tohoto předpokladu lze dokázat jak $\neg K_i \boldsymbol{p}$, tak $K_i \boldsymbol{p}$.

Podle věty o úplnosti by obě tyto formule by pak musely být platné v libovolné vhodné Kripkeho struktuře. Taková situace však nemůže nikdy nastat!

VZ 2009