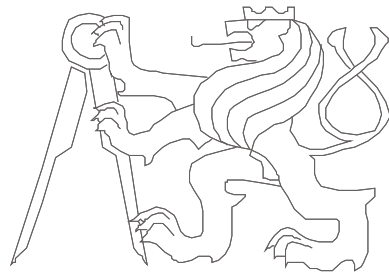


# Architektura počítačů

## Počítačová aritmetika

Miroslav Šnorek, Michal Štepanovský, Pavel Píša



Častá inspirace: X36JPO, A. Pluháček

České vysoké učení technické, Fakulta elektrotechnická

# Proč je potřeba studovat i nízkoúrovňovou konstrukci počítače

- Pro návrh nové počítačové/procesorové architektury
- Pro implementaci vybrané architektury v integrovaném obvodu/FPGA
- Pro obvodový návrh hardware/systému (velké nebo vestavné systémy)
- Pro porozumění obecným otázkám a problémům ohledně počítačů, jejich architektur a výkonnosti
- **Pro to jak efektivně využívat existující hardware** (to znamená, jak psát kvalitní software)
  - Bez přehledu a pochopení chování, možností, omezení a limitace zdrojů není možné efektivně využít žádný hardware (pro moderní HW s více jádry a výpočetními subsystémy to platí dvojnásob)
  - Určitě lze vytvořit dobře placené programy i bez těchto znalostí, ale budou vyžadovat mnohonásobně silnější hardware a budou plýtvat zdroji. Není však takto možné vytvořit žádné náročné aplikace ať již na výkon nebo na ušetření energie. Přitom to je oblast kde probíhá skutečný vývoj a mají z dlouhodobějšího technologického a i vědeckého pohledu smysl.

## Další motivace a příklady

- Předkládané znalosti jsou nutné pro každého programátora, jehož aplikace pracují i jen s větším ovšem dnes běžným množstvím dat nebo vyžadují netriviální výpočetní výkon
- Žádná práce s multimédií nemůže být vykonána dobře bez takovýchto znalostí
- 1/3 našeho kurzu je zaměřená i na přístup k periferiím
- Příklady
  - Facebook – HipHop for PHP → C++/GCC → machine code
  - BlackBerry (RIM) – our consultations for time source
  - RedHat – JAVA JIT for ARM for future servers generation
  - Multimedia and CUDA computations
  - Photoshop, GIMP (organizace dat v paměti)
  - Knot-DNS (RCU, Copy on write, Cuckoo hashing, )

## Pozadí k přípravě předmětu a literatura

- Obsah předmětu vychází z kurzů na renomovaných univerzitách GRE (Graduate Record Examination)
- Základem je celosvětově uznávaná kniha
- Paterson, D., Henessy, J.: Computer Organization and Design, The HW/SW Interface. Elsevier, ISBN: 978-0-12-370606-5
  - John L. Henessy  
president Stanford University, jeden ze zakladatelů architektury a firmy MIPS Computer Systems Inc.
  - David A. Patterson  
vedoucí projektu Berkeley RISC – vzor pro SPARC a inovátor v oblasti RAID diskových polí
- Naše vlastní zkušenosti pak zahrnují vývoj v oblasti distribuovaných systému, vestavných systémů (složitosti mobilních telefonů), návrh periferií, spolupráce s předními výrobci automobilů, návrh medicínských a robotických systémů

# Přehled témat přednášek

- Počítačová aritmetika
- Procesor
- Paměť
- Zřetězený procesor
- I/O podsystém 1
- I/O podsystém 2
- Technické a organizační prostředky (vnější události, výjimky, reálný čas)
- Sítě procesorů a počítačů
- Předávání parametrů funkcím a virtuálním instrukcím operačního systému
- Klasická registrově orientovaná architektura CISC (M68000)
- Procesorová rodina INTEL x86, Od 8086 k EMT64
- Přehled vývoje architektury a koncepcí CPU (RISC/CISC)
- Víceúrovňový model počítače, virtualizace

- Jak se v počítači ukládají
  - Čísla typu INTEGER, bez i se znaménkem,
  - Čísla typu REAL,
  - Hodnoty typu LOGICAL?
- Jak se realizují základní operace
  - Sčítání, odčítání,
  - Posuny,
  - Násobení, dělení,

## MOTIVACE: Co program vytiskne?

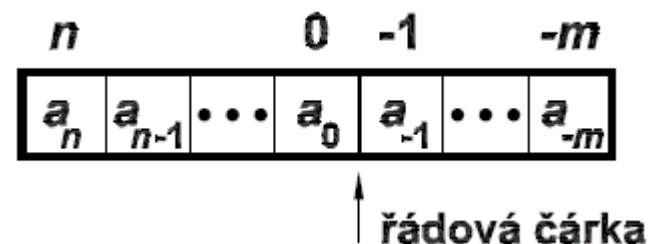
```
int main() {  
    int a = -200;  
    printf("hodnota: %u = %d = %f = %c \n", a,  
    a, *((float*)(&a)), a);  
  
    return 0;  
}
```

hodnota: 4294967096 = -200 = nan = 8

0x38 0xff 0xff 0xff

## Základní terminologie

- **Řádomá mřížka,**
- Řádomá čárka, nebo lépe tečka,
- z základ číselné soustavy,
- Nejmenší zobrazitelné číslo,
- **Modul** =  $\mathcal{Z}$ , číslo o jedničku větší, než je největší zobrazitelné číslo v dané řádomé mřížce,
- Zobrazitelná čísla,  
k je celé číslo.



$$\epsilon = z^{-m}$$

$$0 \leq A = k \cdot \epsilon < \mathcal{Z}$$

$$A \sim a_n a_{n-1} \dots a_0, a_1 \dots a_{-m}$$

$$A = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 + a_1 z^{-1} \dots a_{-m} z^{-m}$$



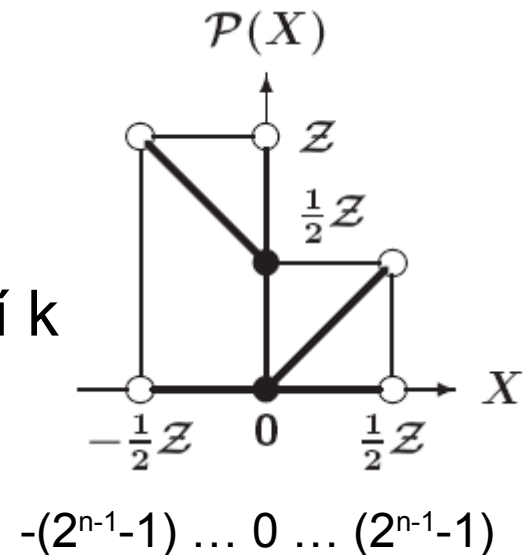
# Uložení čísel typu INTEGER



- Kolik je různých stavů položky HODNOTA ?
  - $2^8 = 256D$  (desítkově). To není mnoho, že?
  - Řešení: proč nepoužít více bajtů?
  - $4B = 2^{32} = 4\,294\,967\,296D$ ,
  - $8B = 2^{64} =$  (spočítejte si sami).
- Čísla je ale třeba většinou ukládat se znaménkem.
- Při vhodném kódování můžeme ušetřit HW.
- Například odčítání lze provést obvody na sčítání (sčítačkou).

# Číslo INTEGER se znaménkem

- Znaménko a hodnota. Jde o tzv. **přímý kód**.
  - +1234, -5678.
- Takhle vyjadřujeme čísla v matematice běžně.
- Nevýhoda: v počítači máme pro zobrazení k dispozici jen binární číslice 0, 1.
- Běžně dodržovaná dohoda:
  - $0 \approx +$ ,  $1 \approx -$ .
  - Nevýhoda: jinak se musí při aritmetických operacích pracovat se znaménkovým bitem, jinak s bity hodnoty.
- Jiná nevýhoda: máme 2 různá vyjádření nuly.



## HW/SW interfejs

- V programovacím jazyce C se celým číslem bez znaménka říká *unsigned integers* a v programu se deklarují jako `unsigned int`.
- Těm se znaménkem se říká *integers* a v programu se deklarují jako `signed int`.

## Další možnosti uložení čísla se znaménkem

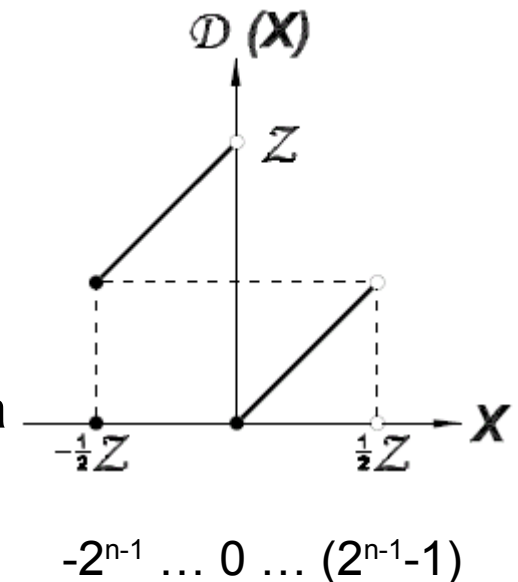
- Přímý kód  
sign-magnitude code, direct representation, sign bit
- Dvojkový doplněk, doplňkový kód  
two's complement
- Jedničkový doplněk, inverzní kód  
ones' complement
- Aditivní kód, kód s posunutou nulou  
excess-K, offset binary or biased representation

## Čísla INTEGER se znaménkem II.

- Jiná možnost: část (typicky polovinu) stavů položky HODNOTA použijme pro reprezentaci čísel kladných, druhou polovinu pro reprezentaci čísel záporných.
- Méně výhodná varianta: **inverzní kód**,
- Výhodnější varianta: **doplňkový kód**.
- Proč výhodnější? Úspora v HW!
- Poznámka: oba kódy vůbec nejsou omezeny na dvojkovou soustavu, stejně je můžeme použít např. v soustavě desítkové!

# Dvojkový doplněk, doplňkový kód

- Jedna polovina rozsahu reprezentace  $Z$  je určena pro čísla nezáporná, druhá pro záporná
- Převod aritmetické hodnoty čísla  $A$  na její reprezentaci  $D(A)$ 
  - $D(A) = A$       iff  $A \geq 0$
  - $D(A) = Z - |A|$       iff  $A < 0$
- Výhody
  - Spojitý rozsah při uvažování beznaménkové modulo aritmetiky nad reprezentací čísla
  - Jedno identické mapování čísla 0
  - Stejný HW sčítačky/odčítačky pro znaménková i čísla bez znaménka
- Nevýhoda
  - Asymetrický rozsah  $(-(-1/2Z))$



## Doplňkový kód - příklady

- Rozumí se **dvojkový doplněk**. Příklady reprezentací:
  - $0_D = 00000000_H$ ,
  - $1_D = 00000001_H$ ,  $-1_D = FFFFFFFF_H$ ,
  - $2_D = 00000002_H$ ,  $-2_D = FFFFFFFE_H$ ,
  - $3_D = 00000003_H$ ,  $-3_D = FFFFFFFD_H$ ,
- Analogii dvojkového doplňku se v soustavě s jiným základem říká doplněk do modulu. Stejně se postupuje třeba v soustavě desítkové (doplněk do „10“).
- Všimněte si: součet dvou opačných čísel se stejnou absolutní hodnotou je  $00000000_H$ .
- Přenos do vyššího řádu (32.) ignorujeme. Sčítáme vlastně  $\text{mod } 2^{32}$ .
- Jak je to vlastně v tomto kódování s **přeplněním** řádové mřížky (přetečením)? Budeme diskutovat později...

## Existuje i jedničkový doplněk

- Jedničkový se od dvojkového doplněku se liší málo, jen o jedničku, o tzv. **horkou jedničku** (Hot-One), kterou přičítáme k nejnižšímu řádu.
- Jde o tzv. **inverzní kód**.
- Jedničkový doplněk čísla se (ve dvojkové soustavě) vytvoří bitovou negací, ekvivalentně také
  - $D(A) = A$                       iff  $A \geq 0$
  - $D(A) = Z-1-|A|$               iff  $A < 0$
- Rozsah  $-(2^{n-1}-1) \dots 0 \dots (2^{n-1}-1)$
- Výhoda – symetrický rozsah, jednoduchá negace (-)
- Nevýhoda – složitější HW, dvě reprezentace nuly
- Dále se již touto variantou nebudeme zabývat



## Příklad sčítání a odčítání v doplňkovém kódu

- **Sčítání**

- $0000000\ 0000\ 0111_B \approx 7_D$     Vysvětl.:  $0=0_H, 0=0_B$

- $+ 0000000\ 0000\ 0110_B \approx 6_D$

- $0000000\ 0000\ 1011_B \approx 13_D$

- **Odčítání** je v tomto kódu přičítáním čísla opačného

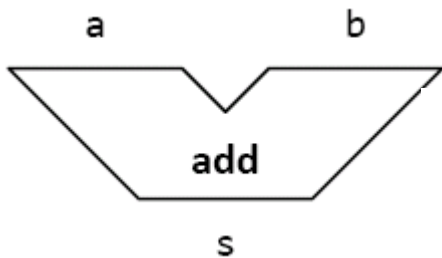
- $0000000\ 0000\ 0111_B \approx 7_D$

- $+ FFFFFFFF1111\ 1010_B \approx -6_D$

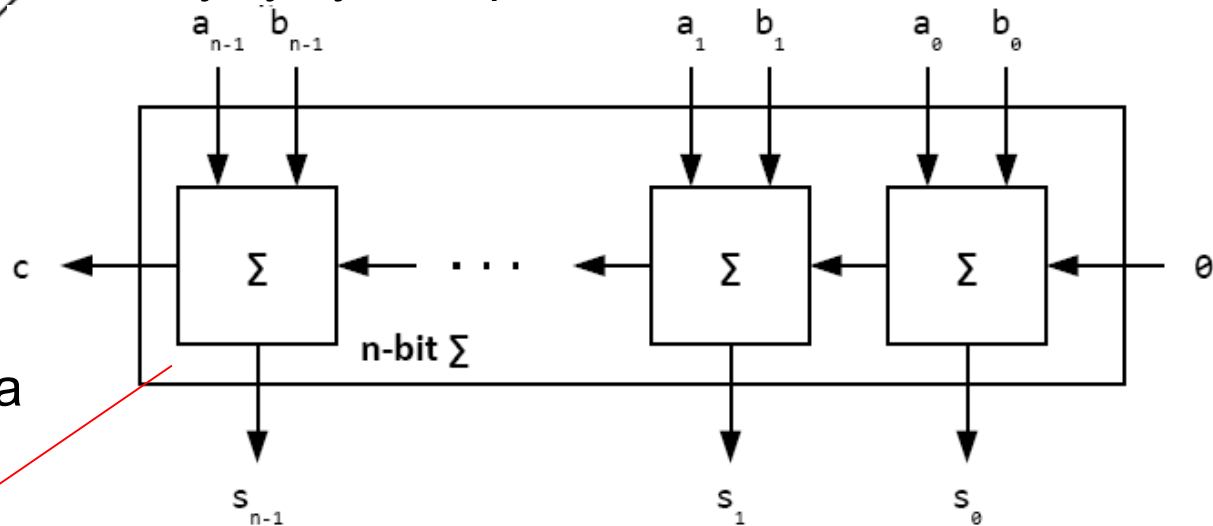
- $0000000\ 0000\ 0001_B \approx 1_D$

- **Otázka k opakování:** jak jsme vytvořili k číslu ve dvojkové soustavě jeho číslo opačné?

# Sčítací HW blokově

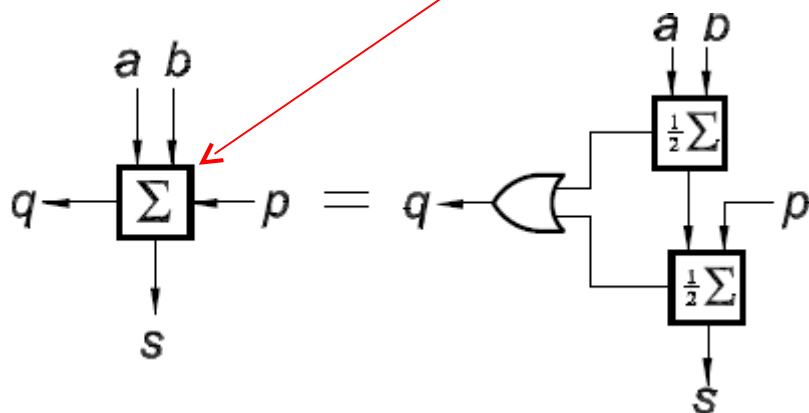


Obvyklý symbol pro funkční blok

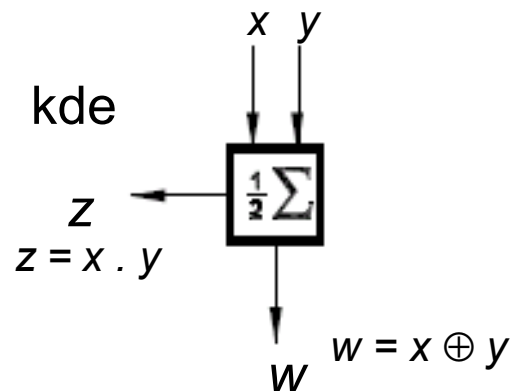


Vnitřní struktura

Realizace



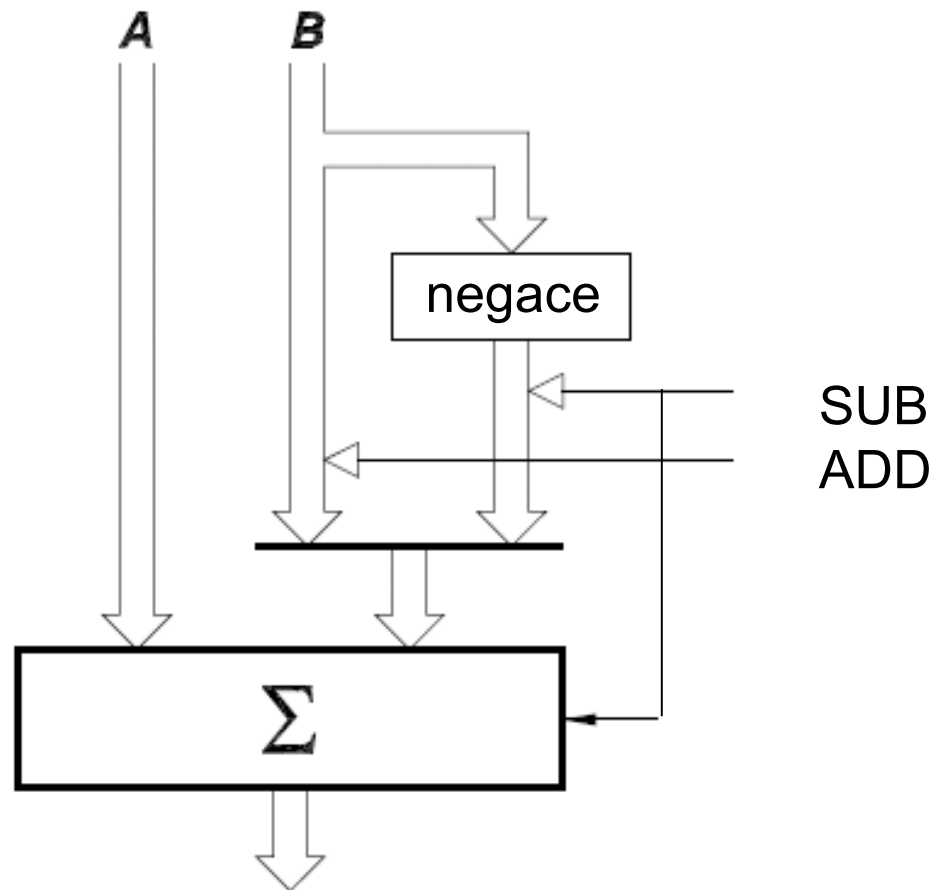
kde



## Poznámka k realizaci rychlé paralelní sčítačky

- Paralelní sčítačka s minimálním zpožděním (kombinační obvod) je prakticky nerealizovatelná.
- Pro 64-bitovou verzi bychom potřebovali  $10^{20}$  hradel.
- Proto se staví tak, jak jsme viděli na předchozím slajdu, s postupným přenosem a
- ze dvou pulsčítaček, nebo...

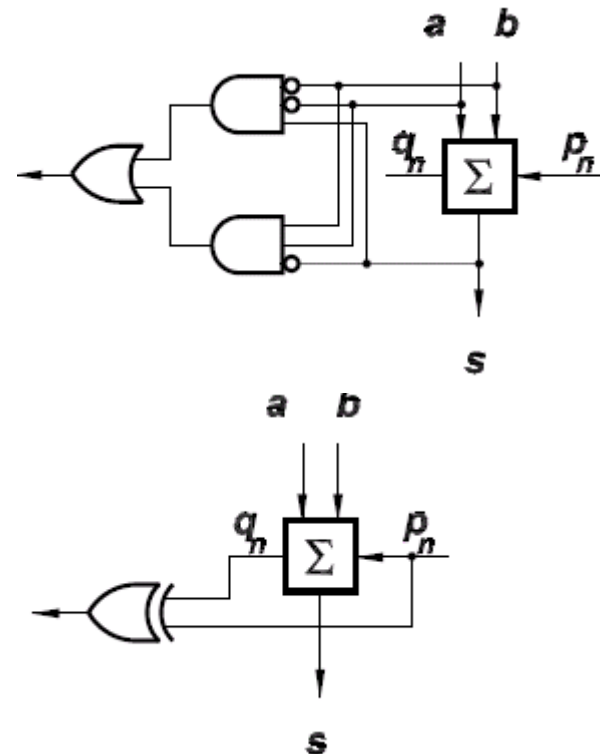
# Sčítací/odčítací HW



Inspirace: X36JPO, A. Pluháček

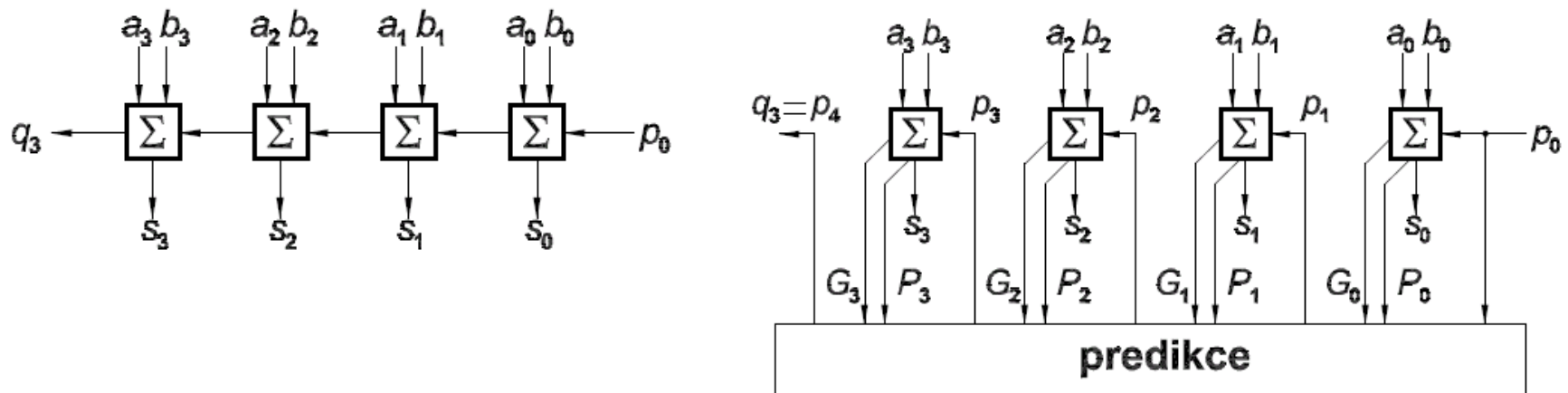
## Rozumíte pojmu přeplnění?

- Říká se tomu také **přetečení**.
- Situace, kdy výsledek operace není správný, protože se nevešel do dané řádové mřížky.
- Ale pozor! V této reprezentaci nenastává, generuje-li se přenos z nejvyššího řádu!
- **Nastává v situaci, kdy znaménko výsledku je jiné, než znaménka operandů, byla-li stejná, nebo**
- Nonekvivalencí přenosu do a z nejvyššího řádu.



## Všimněte si:

- Paralelní sčítačka je **kombinační obvod**. Má tedy smysl mluvit o její rychlosti (ve smyslu: je dost rychlá?)
- Právě naopak, je pomalá! Vysvětlete!
- Zrychlení? Sčítačka s predikcí přenosů - CLA!



## CLA?

- CLA – Carry Look-Ahead.
- Sčítačka CLA nabízí dostatečné zrychlení v porovnání se sčítačkou s postupným přenosem při přijatelném nárůstu ceny HW.
- 64-bitová verze zvýší cenu HW o necelých 50%, ale rychlost se zvýší 9:1.
- To představuje významné zvýšení poměru *rychlost/cena*).

Tyto rovnice jsou klíčové pro pochopení principu...

Označme:

- generování přenosu:

$$g_j = x_j y_j$$

- šíření přenosu (propagation):

$$p_j = x_j \oplus y_j = x_j \bar{y}_j \vee \bar{x}_j y_j$$

Pak:

- součet v j-tem řádu:

- přenos do vyššího (j+1) řádu:  
$$s_j = c_j (\overline{x_j \oplus y_j}) \vee \bar{c}_j (x_j \oplus y_j) = c_j \bar{p}_j \vee \bar{c}_j p_j = p_j \oplus c_j$$

$$c_{j+1} = x_j y_j \vee (x_j \oplus y_j) c_j = g_j \vee p_j c_j$$



# CLA

Takže platí:  $c_1 = g_0 \vee p_0 c_0$

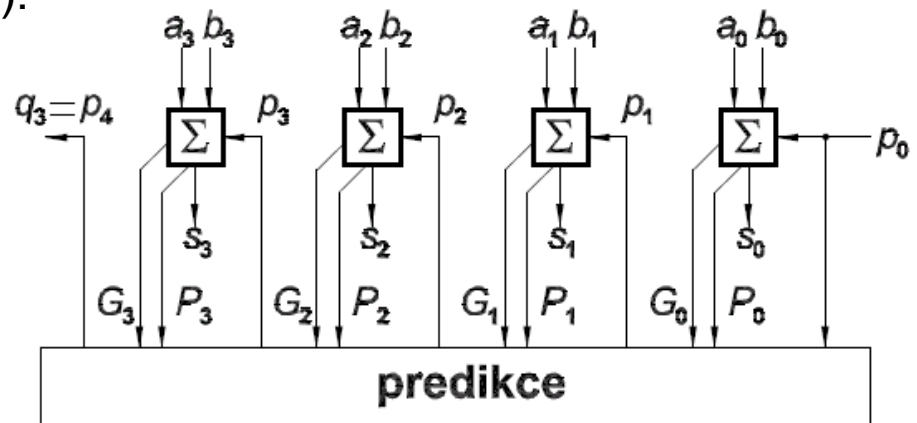
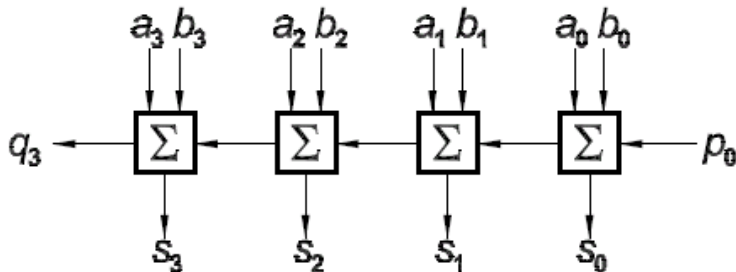
$c_2 = g_1 \vee p_1 c_1 = g_1 \vee p_1 (g_0 \vee p_0 c_0) = g_1 \vee p_1 g_0 \vee p_1 p_0 c_0$

$c_3 = g_2 \vee p_2 c_2 = g_2 \vee p_2 (g_1 \vee p_1 g_0 \vee p_1 p_0 c_0) = g_2 \vee p_2 g_1 \vee p_2 p_1 g_0 \vee p_2 p_1 p_0 c_0$

$c_4 = g_3 \vee p_3 c_3 = \dots = g_3 \vee p_3 g_2 \vee p_3 p_2 g_1 \vee p_3 p_2 p_1 g_0 \vee p_3 p_2 p_1 p_0 c_0$

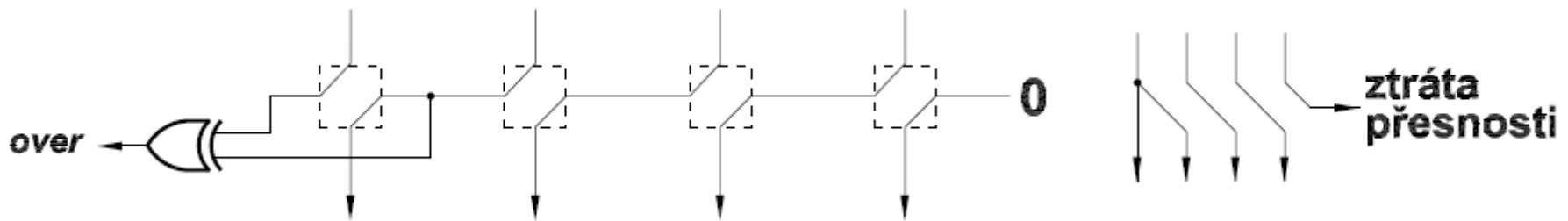
$c_5 = \dots$

Například rovnici pro  $c_3$  je možné číst následovně: Přenos do 3. řádu nastane, **pokud** přenos byl generován v 2. řádu, **nebo** se 2. řádem šíří a byl generován v 1. řádu, **nebo** se šíří 2. aj 1. řádem a byl generován 0-tým řádem, **nebo** se šíří druhým, prvním aj 0-tým řádem a byl v  $c_0$  ( $c_0=1$ ).



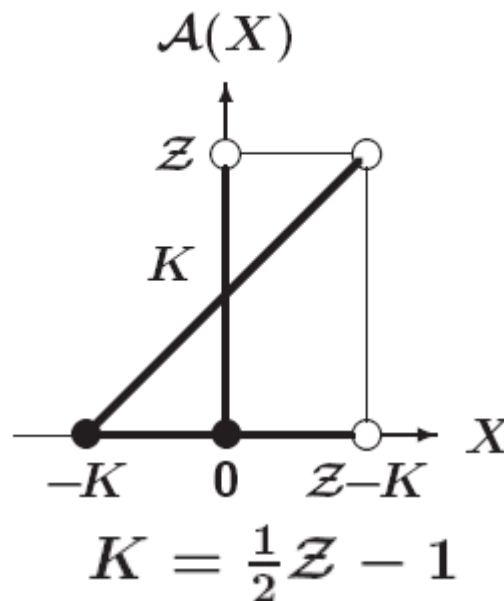
## Aritmetické posuny: vlevo, vpravo

- Aritmetický posun v doplňkovém kódu o 1 bit (výsledek má odpovídat přísl. násobení nebo dělení)
- vlevo vpravo
- Aritmetický posuv vs. Logický posuv vs. Cyklický posuv...



## Čísla INTEGER se znaménkem III.

- Je i jiná možnost pro zobrazení čísel se znaménkem?
- Ano, dokonce často používaná (viz dále):
- **kód aditivní** (jinak zvaný s posunutou nulou ).
- Převod  $D(A) = A+K$ , obvykle  $K=Z/2$



$-K \dots 0 \dots 2^{n-1}-1-K$

Připomenutí:  $Z$  je modul

## Sčítání a odčítání v aditivním kódu

- Platí:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(A + B) &= \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B) - K \\ \mathcal{A}(A - B) &= \mathcal{A}(A) - \mathcal{A}(B) + K\end{aligned}$$

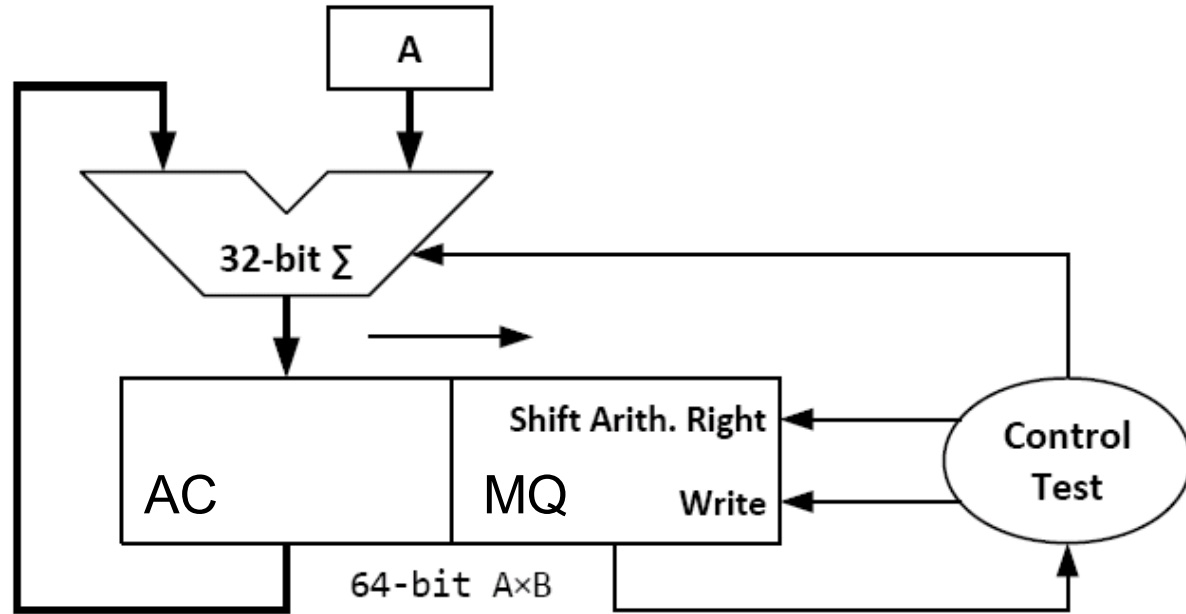
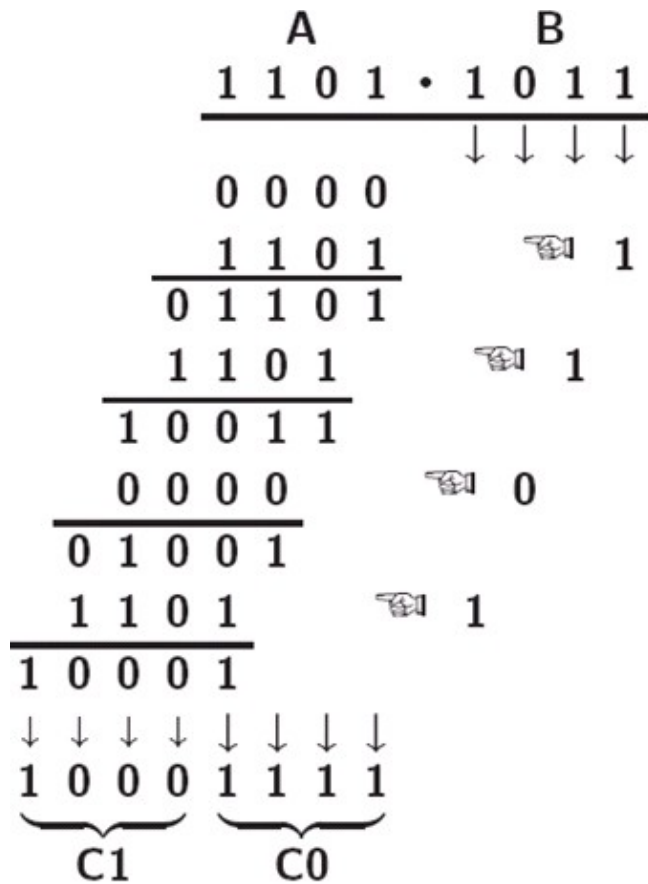
- Detekce přeplnění

- sčítání: stejná znaménka sčítanců a jiné znaménko výsledku,
- odčítání: znaménka menšence a menšitele se liší a liší se znaménka menšence a výsledku.

# Násobení binárních čísel bez znaménka – pro připomenutí

$$\begin{array}{r} \text{A} \qquad \qquad \text{B} \\ 1\ 1\ 0\ 1 \cdot 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0 \\ \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 1\ 1\ 0\ 1 \quad \leftarrow 1 \\ \hline \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 1\ 1\ 0\ 1 \quad \leftarrow 1 \\ \hline \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 0\ 0\ 0\ 0 \quad \leftarrow 0 \\ \hline \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \phantom{1\ 1\ 0\ 1} 1\ 1\ 0\ 1 \quad \leftarrow 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \underbrace{1\ 0\ 0\ 0}_{C1} \underbrace{1\ 1\ 1\ 1}_{C0} \end{array}$$

# Sekvenční HW násobička (varianta 32b)



Diskuze o rychlosti: ta je ale pomalá, co?

# Algoritmus

A = násobenec;

MQ = násobitel;

AC = 0;

for( int i=1; i <= n; i++) // n je počet bitů

{

if(MQ<sub>0</sub> == 1) AC = AC + A; // MQ<sub>0</sub> = nejnižší bit MQ

SR (posuň registr AC MQ o jedno místo doprava a doplň  
případný přenos z nejvyššího řádu z předchozího kroku)

}

end.

Nyní je výsledek v AC MQ.

## Příklad x.y

Násobenec  $x=110$  a násobitel  $y=101$ .

<b>i</b>	<b>operace</b>	<b>AC</b>	<b>MQ</b>	<b>A</b>	<b>komentář</b>
		000	101	110	prvotní nastavení
1	AC = AC+MB	110	101		začátek cyklu
	SR	011	010		
2	nic	011	010		protože $MQ_0 = 0$
	SR	001	101		
3	AC = AC+MB	111	101		
	SR	011	110		konec cyklu

**Tedy:  $x \times y = 110 \times 101 = 011110$ , (  $6 \times 5 = 30$  )**

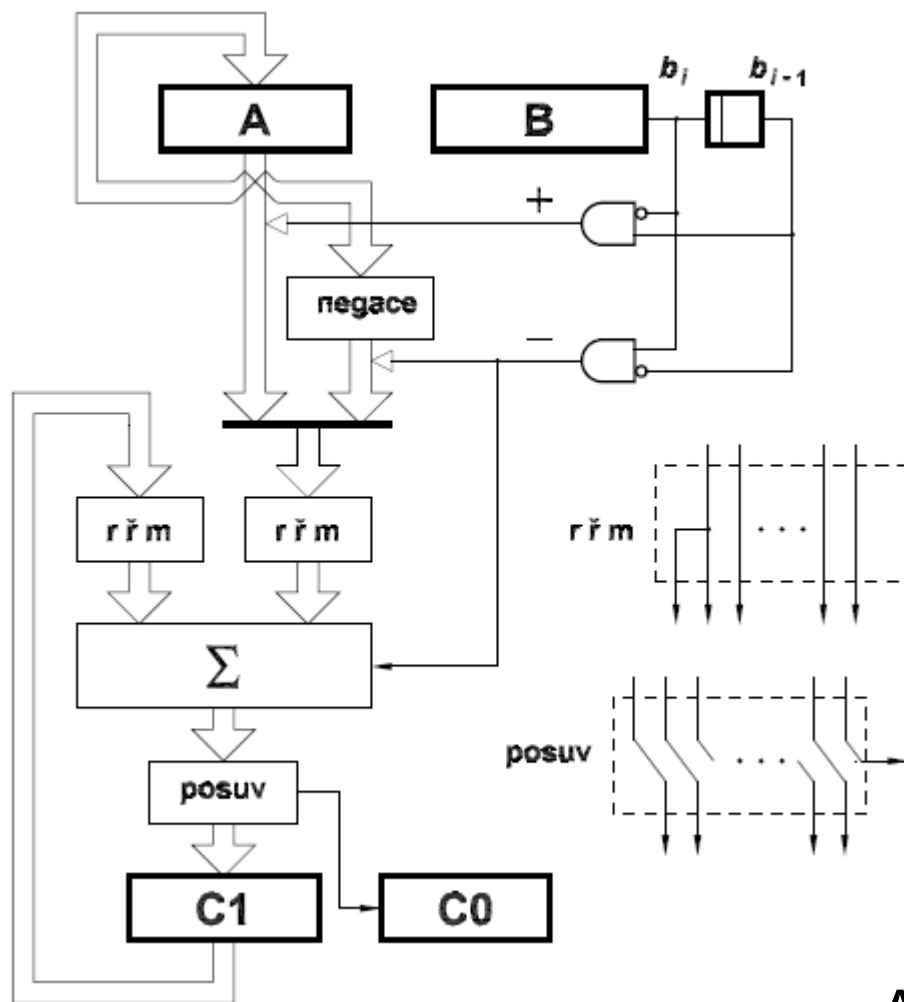


## Násobení v doplňkovém kódu

- Lze realizovat, ale je tu problém...
  - **Obraz součinu obecně není roven součinu obrazů!**
- Řešení spočívá v modifikaci dvojkové soustavy na soustavu s relativními číslicemi  $0, 1, \hat{1} = -1$
- Podrobnosti už jsou mimo zamýšlený rozsah APO.

$$\begin{aligned} \text{př.: } 1\hat{1}10 &\sim 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6 \\ \hat{1}\hat{1}\hat{1}0 &\sim (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -6 \\ 110 &= 10\hat{1}0 = 1\hat{1}10 \sim 6 \end{aligned}$$

# Násobička v doplňkovém kódu Boothova metoda



APO – jen pro informaci

# Rychlá násobička podle Wallaceova stromu

$Q = X \cdot Y$ ,  $X$  a  $Y$  necht' jsou 8b čísla

$$(x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0) \cdot (y_7 y_6 y_5 y_4 y_3 y_2 y_1 y_0) =$$

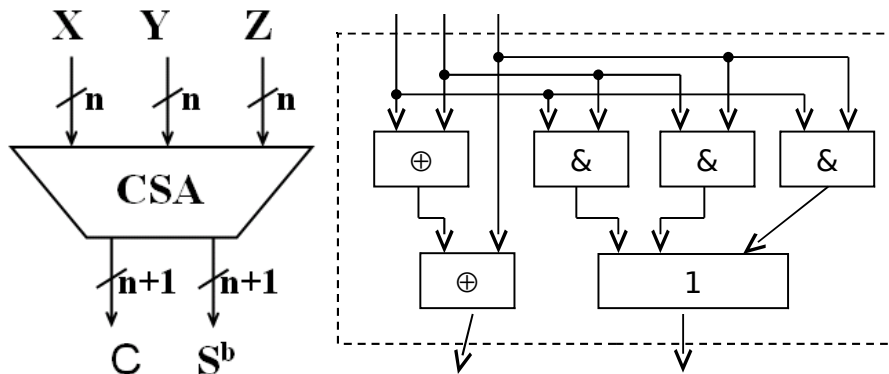
0	0	0	0	0	0	0	0	$x_7y_0$	$x_6y_0$	$x_5y_0$	$x_4y_0$	$x_3y_0$	$x_2y_0$	$x_1y_0$	$x_0y_0$	P0
0	0	0	0	0	0	0	$x_7y_1$	$x_6y_1$	$x_5y_1$	$x_4y_1$	$x_3y_1$	$x_2y_1$	$x_1y_1$	$x_0y_1$	0	P1
0	0	0	0	0	0	$x_7y_2$	$x_6y_2$	$x_5y_2$	$x_4y_2$	$x_3y_2$	$x_2y_2$	$x_1y_2$	$x_0y_2$	0	0	P2
0	0	0	0	0	$x_7y_3$	$x_6y_3$	$x_5y_3$	$x_4y_3$	$x_3y_3$	$x_2y_3$	$x_1y_3$	$x_0y_3$	0	0	0	P3
0	0	0	0	$x_7y_4$	$x_6y_4$	$x_5y_4$	$x_4y_4$	$x_3y_4$	$x_2y_4$	$x_1y_4$	$x_0y_4$	0	0	0	0	P4
0	0	0	$x_7y_5$	$x_6y_5$	$x_5y_5$	$x_4y_5$	$x_3y_5$	$x_2y_5$	$x_1y_5$	$x_0y_5$	0	0	0	0	0	P5
0	0	$x_7y_6$	$x_6y_6$	$x_5y_6$	$x_4y_6$	$x_3y_6$	$x_2y_6$	$x_1y_6$	$x_0y_6$	0	0	0	0	0	0	P6
0	$x_7y_7$	$x_6y_7$	$x_5y_7$	$x_4y_7$	$x_3y_7$	$x_2y_7$	$x_1y_7$	$x_0y_7$	0	0	0	0	0	0	0	P7
$Q_{15}$	$Q_{14}$	$Q_{13}$	$Q_{12}$	$Q_{11}$	$Q_{10}$	$Q_9$	$Q_8$	$Q_7$	$Q_6$	$Q_5$	$Q_4$	$Q_3$	$Q_2$	$Q_1$	$Q_0$	

Součtem  $P_0 + P_1 + \dots + P_7$  získáme výsledek součinu  $X$  a  $Y$ .

$$Q = X \cdot Y = P_0 + P_1 + \dots + P_7$$

# Rychlá násobička podle Wallaceova stromu

Jejím stavebním prvkem je sčítačka s uchováním přenosu CSA (Carry Save Adder)

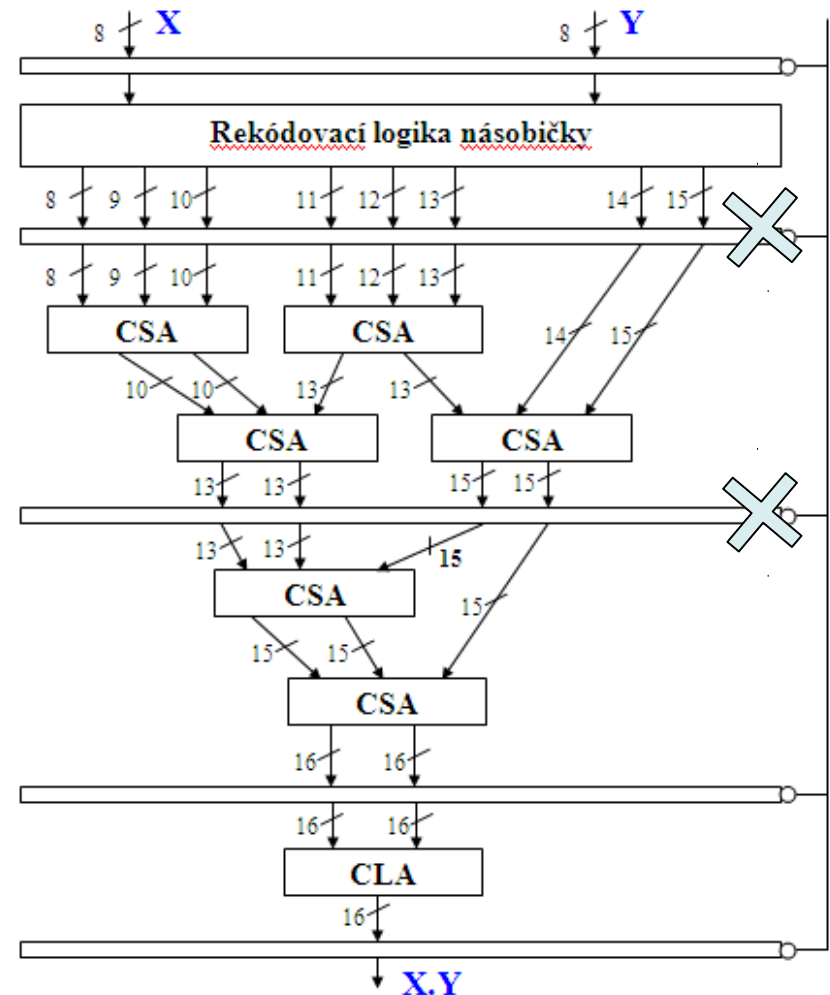


$$S = S^b + C$$

$$S^b_i = x_i \oplus y_i \oplus z_i$$

$$C_{i+1} = x_i y_i + y_i z_i +$$

$$z_i x_i$$



# HW dělička – algoritmus dělení

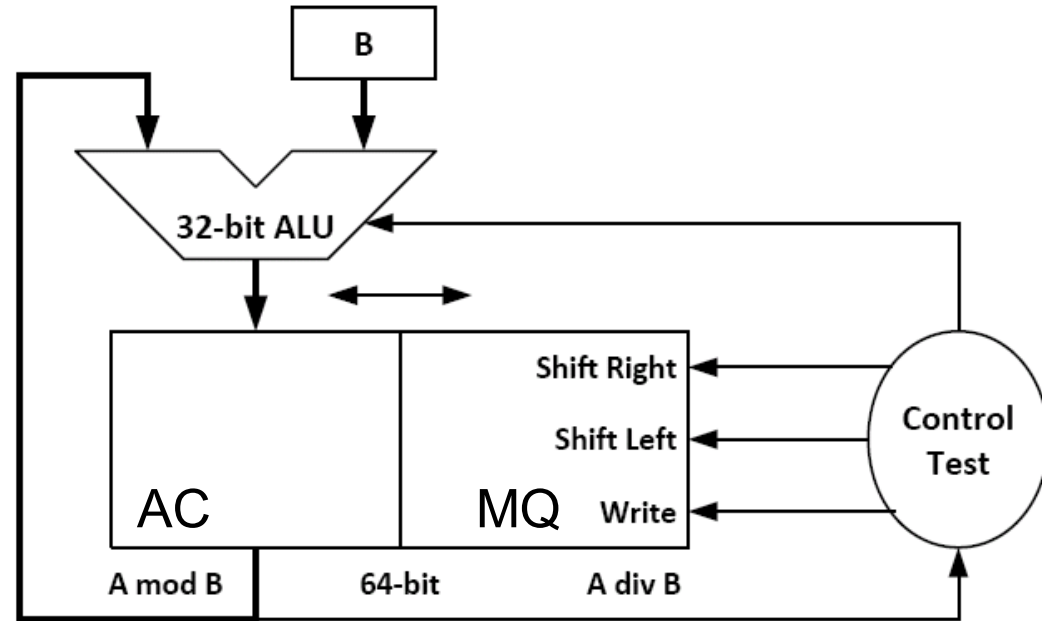
		<b>1 1 1 : 0 1 1</b>																																																															
⊖	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td colspan="4"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td colspan="4"></td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td colspan="4"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td colspan="4"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td colspan="4"></td></tr> </table>	0	0	0	1	1	1	:	0	0	1	1	1	1	0	0	:	:	:								1	:	:					0	1	1	1	0	:	:						↓	↓	↓	↓	:						1	1	0	1	:					: 0 0 1 1 negace horká 1 - ⇒ 0
0	0	0	1	1	1	:	0	0	1	1																																																							
1	1	0	0	:	:	:																																																											
			1	:	:																																																												
0	1	1	1	0	:	:																																																											
	↓	↓	↓	↓	:																																																												
	1	1	0	1	:																																																												
⊕	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="padding: 0 5px;">:</td><td colspan="4"></td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td colspan="4"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td colspan="5"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td><td colspan="5"></td></tr> </table>		0	0	1	1	:					1	0	0	0	0	1						↓	↓	↓	↓							0	0	0	1						+ ⇒ 1																							
	0	0	1	1	:																																																												
1	0	0	0	0	1																																																												
	↓	↓	↓	↓																																																													
	0	0	0	1																																																													
⊖	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td colspan="6"></td></tr> <tr><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td colspan="5"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td colspan="5"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td colspan="5"></td></tr> </table>				1							0	1	1	1	0							↓	↓	↓	↓							1	1	0	0						- ⇒ 0																							
			1																																																														
0	1	1	1	0																																																													
	↓	↓	↓	↓																																																													
	1	1	0	0																																																													
⊖	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td colspan="4"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td colspan="5"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td colspan="5"></td></tr> </table>	1	0	0	0	0	1						↓	↓	↓	↓							0	0	1	1						návrat																																	
1	0	0	0	0	1																																																												
	↓	↓	↓	↓																																																													
	0	0	1	1																																																													
⊖	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td colspan="5"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td colspan="5"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td colspan="5"></td></tr> </table>	0	1	1	1	0							↓	↓	↓	↓							0	0	1	1						- ⇒ 0																																	
0	1	1	1	0																																																													
	↓	↓	↓	↓																																																													
	0	0	1	1																																																													
⊖	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td colspan="5"></td></tr> </table>	1	0	0	0	1						návrat																																																					
1	0	0	0	1																																																													
	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td colspan="7"></td></tr> </table>	0	0	1								— zbytek																																																					
0	0	1																																																															
	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 0 5px;">0</td><td style="padding: 0 5px;">1</td><td style="padding: 0 5px;">0</td><td colspan="7"></td></tr> </table>	0	1	0								— podíl																																																					
0	1	0																																																															

# Sekvenční HW dělička (varianta 32b)

**1 1 1 : 0 1 1**

dělenec = podíl × dělitel + zbytek

	0 0 0 1 1 1	:	0 0 1 1
⊖	1 1 0 0 :		negace
	1 :		horká 1
	0 1 1 1 0 :		- ⇒ 0
	↓ ↓ ↓ ↓ :		
	1 1 0 1 :		
⊕	0 0 1 1 :		+ ⇒ 1
	1 0 0 0 0 1		
	↓ ↓ ↓ ↓ :		
	0 0 0 1		
⊖	1 1 0 0		
	1		
	0 1 1 1 0		- ⇒ 0
	0 0 1 1		návrat
⊖	1 0 0 0 1		
	0 0 1		— zbytek
	0 1 0		— podíl



# Algoritmus dělení

MQ = dělenec;

B = dělitel; (Podmínka: dělitel různý od 0!)

AC = 0;

```
for( int i=1; i <= n; i++)      {  
    SL (posuň registr AC MQ o jednu pozici vlevo, přičemž vpravo se připíše nula)  
    if(AC >= B) {  
        AC = AC - B;  
        MQ0 = 1;           // nejnižší bit registru MQ se nastaví na 1  
    }  
}
```

→ Nyní registr MQ obsahuje podíl a zbytek je v AC

## Příklad x/y

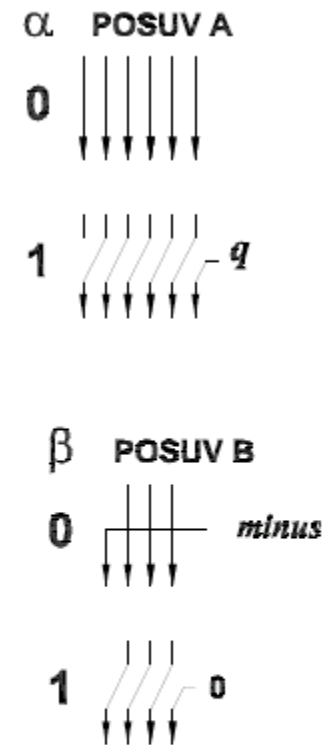
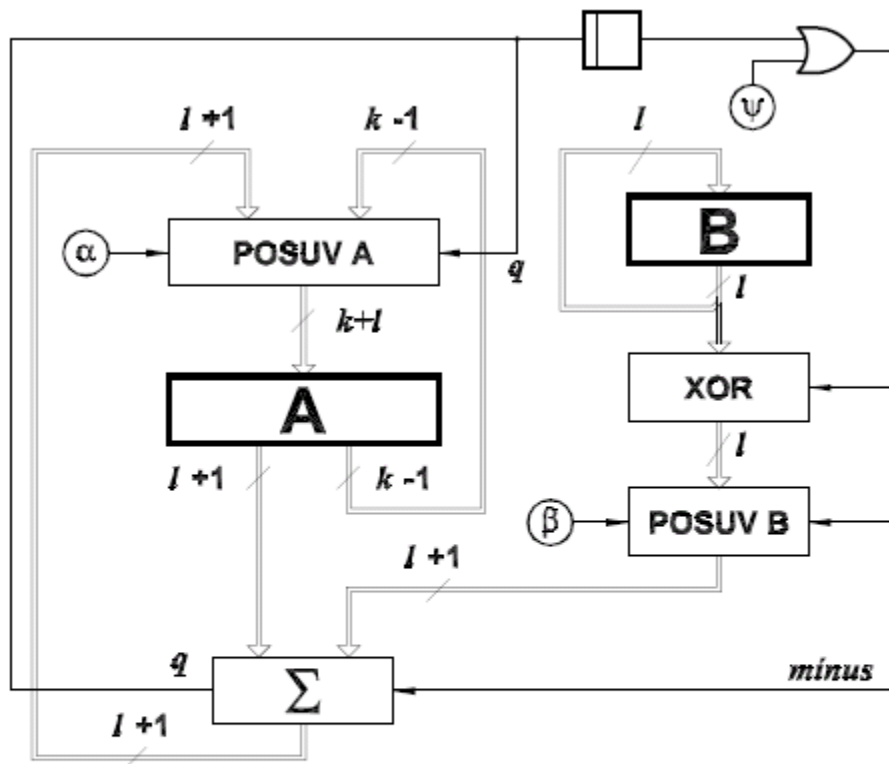
Dělenec  $x=1010$  a dělitel  $y=0011$

i	operace	AC	MQ	B	komentář
		0000	1010	0011	prvotní nastavení
1	<b>SL</b>	0001	0100		
	<b>nic</b>	0001	0100		podmínka if není splněna
2	<b>SL</b>	0010	1000		
		0010	1000		podmínka if není splněna
3	<b>SL</b>	0101	0000		$r \geq y$
	<b>AC = AC - B;</b>	0010	0001		
	<b>MQ<sub>0</sub> = 1;</b>				
4	<b>SL</b>	0100	0010		$r \geq y$
	<b>AC = AC - B;</b>	0001	0011		konec cyklu
	<b>MQ<sub>0</sub> = 1;</b>				

$x : y = 1010 : 0011 = 0011$  zbytek 0001, (10 : 3 = 3 zbytek 1)



# Dělička celých čísel - blokově



	$\alpha$	$\beta$	$\psi$
1. takt	1	0	1
další takty	1	0	0
návrat	0	1	0

$l$  (popř.  $l+1$ ) taktů  
 podíl ... nižší řády A  
 zbytek ... vyšší řády A

## Iterační dělička - Goldschmidt

$$Q = \frac{N}{D} \quad \text{Předpoklad: } 0,5 \leq N < D < 1 \text{ (tzn. normalizovaný tvar)}$$

$$Q = \frac{N * F_0 * F_1 * F_2 * F_3 \dots}{D * F_0 * F_1 * F_2 * F_3 \dots}$$

Pokud budeme volit  $F_i$  tak, aby jmenovatel konvergoval k 1, bude čitatel konvergovat k  $Q$ .

Z podmínky:  $0,5 \leq D < 1$  můžeme  $D$  přepsat do tvaru:  $D=1-x$

Zvolme  $F_0=1+x$ . Potom  $D * F_0 = (1-x) * (1+x) = 1-x^2$

Zvolme  $F_1=1+x^2$ . Potom  $D * F_0 * F_1 = (1-x^2) * (1+x^2) = 1-x^4$

$$Q = N (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \dots (1+x^{2^i}), \text{ kde } x=1-D$$

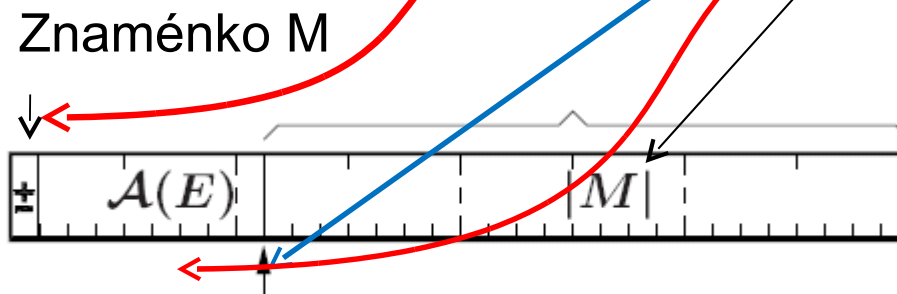
## Jak se v počítači zobrazují čísla typu REAL?

- Vědecká, neboli semilogaritmická notace.
  - Dvojice: EXPONENT (E), ZLOMKOVÁ část (nazývaná též mantisa M).
- Notace je normalizovaná.
  - Zlomková část vždy začíná binární číslicí 1,
  - Obecně: nenulovou číslicí.

- Normalizováno jako IEEE754 ve verzích
  - Jednoduchá,
  - Dvojnásobná přesnost.
- V programovacím jazyce C se deklaruje jako `float` a `double`.

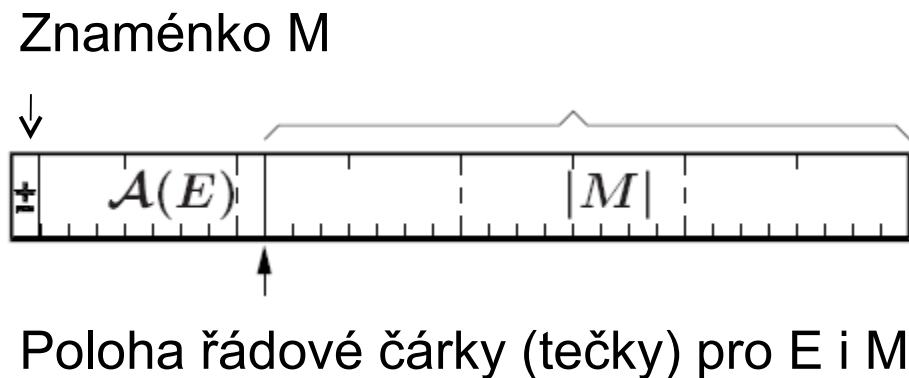
# Příklady

- $-2.34 \times 10^{56}$  ← normalized
  - $+0.002 \times 10^{-4}$  ← not normalized
  - $+987.02 \times 10^9$  ← not normalized
- binárně
- $\pm 1.xxxxxxx_2 \times 2^{yyyy}$



## Formát čísla v pohyblivé řádové čárce

- Kód mantisy: přímý kód — znaménko a absolutní hodnota
- Kód exponentu: aditivní kód (s posunutou nulou).



# Příklady reprezentace některých důležitých hodnot

## Nula

Kladná nula	0 00000000 000000000000000000000000	+0.0
Záporná nula	1 00000000 000000000000000000000000	-0.0

## Nekonečno

Kladné nekonečno	0 11111111 000000000000000000000000
Záporné nekonečno	1 11111111 000000000000000000000000

## Některé krajní hodnoty

Nejmenší normalizované číslo	* 00000001 000000000000000000000000	$\pm 2^{(1-127)}$
Největší denormalizované číslo	* 00000000 111111111111111111111111	$\pm (1 - 2^{-23}) * 2^{-126}$
Nejmenší denormalizované číslo	* 00000000 000000000000000000000001	$\pm 2^{-23} * 2^{-126}$

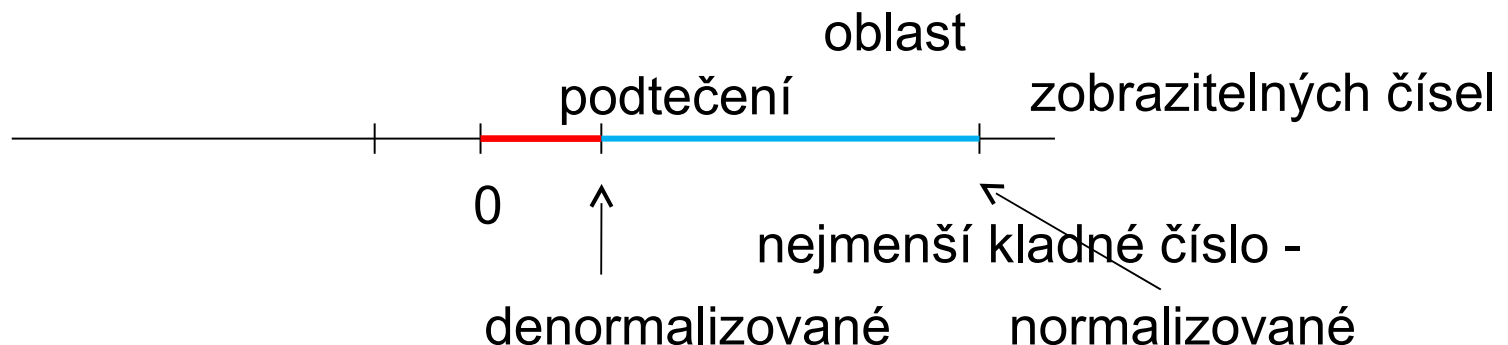
## Denormalizované číslo?

- Smyslem zavedení denormalizovaných čísel je rozšíření reprezentovatelnosti čísel, která se nacházejí blíže k nule, tedy čísel velmi malých (v následujícím obrázku oblast označena modře).
- Denormalizovaná čísla mají nulový exponent a i skrytý bit před řádovou čárkou je implicitně nulový.
- Cenou je nutnost speciálního ošetření případu nulový exponent, nenulová mantisa.



## Podtečení

- Jde o situaci, kdy zobrazované číslo není rovno nule, ale nedosahuje hodnoty nejmenšího zobrazitelného normalizovaného čísla.
- Mnoha podtečením lze předejít právě implementací čísel denormalizovaných.



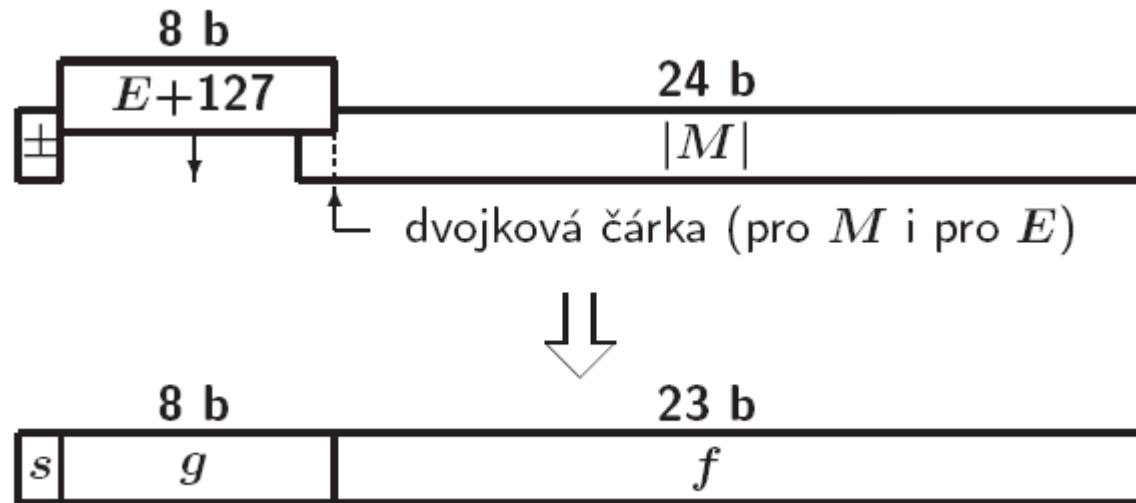
## NaN

- Samé jedničky v exponentu,
- Mantisa je nenulová.
- V tom případě není bitový řetězec obrazem žádného čísla, anglicky Not-a-Number, Nan.

## Shrnutí – zobrazitelná čísla a výjimky

s-bit	Obraz exponentu	m	význam
0	$0 < e < 255$	$> 0$	normalizované kladné číslo
1	$0 < e < 255$	$> 0$	normalizované záporné číslo
0	0	$> 0$	denormalizované kladné číslo
1	0	$> 0$	denormalizované záporné číslo
0	0	0	kladná nula
1	0	0	záporná nula
0	255	0	kladné nekonečno (overflow)
1	255	0	záporné nekonečno (overflow)
0	255	$\neq 0$	NaN – not a number – nečíselná hodnota
1	255	$\neq 0$	NaN – not a number – nečíselná hodnota

# ANSI/IEEE Std 754-1985 formáty – 32b a 64b



ANSI/IEEE Std 754-1985 — dvojitý formát — 64b

$g \dots 11b$

$f \dots 52b$

## Skrytý bit

- Nejvyšší platný bit mantisy (který se do bitové reprezentace operandu neukládá) je
- závislý na hodnotě obrazu exponentu. Jestliže je obraz exponentu nenulový, je tento bit
- 1, mluvíme o **normalizovaných** číslech. Na druhou stranu jestliže je obraz
- exponentu nulový, je skrytý bit 0.
- Pak mluvíme o **denormalizovaném** čísle.

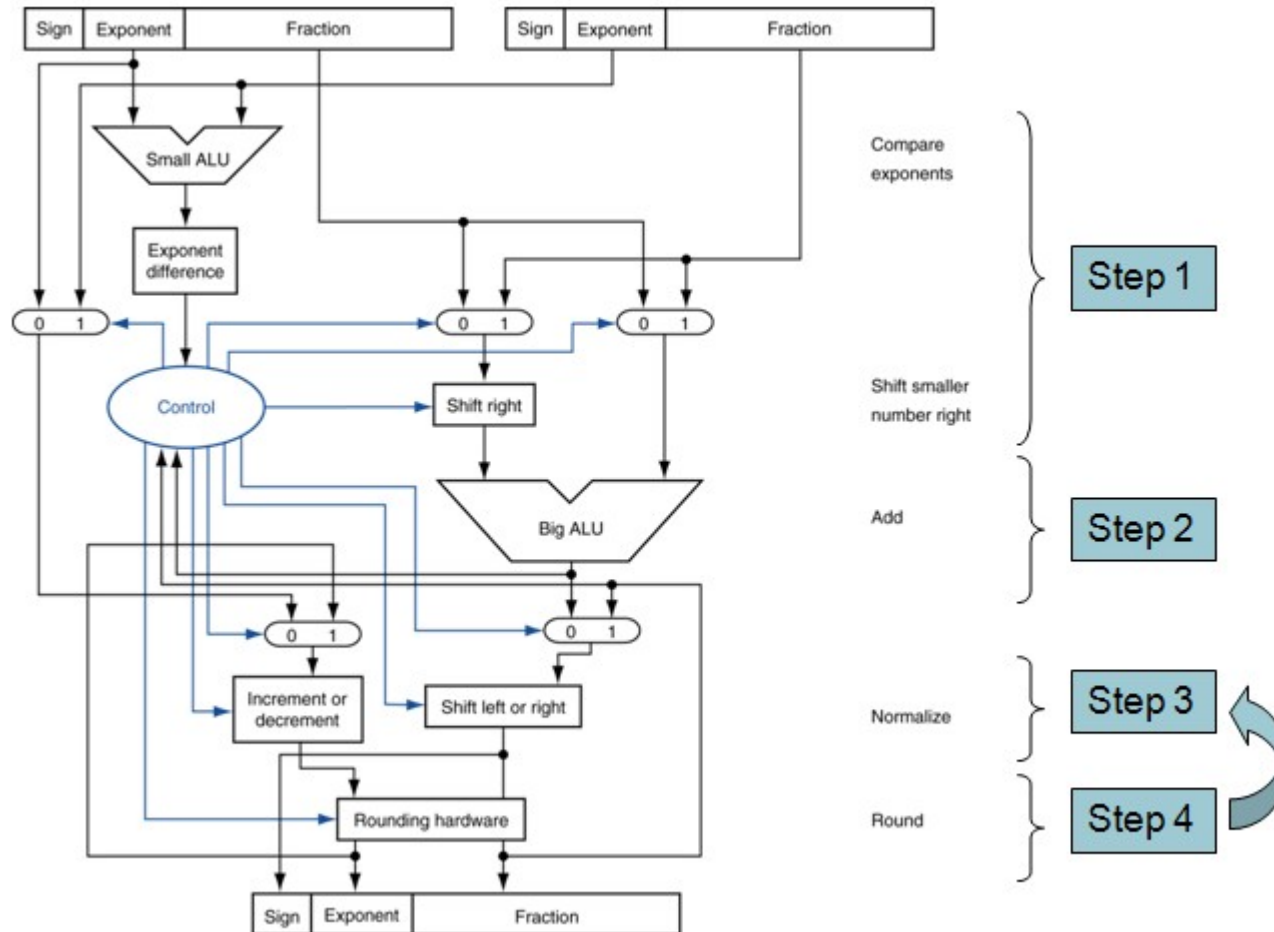
## Porovnání dvou čísel ve FP

- Porovnání: je-li  $A \geq B \iff A - B \geq 0$ .
- Obrazy čísel  $A$  a  $B$  se odečtou jako čísla v přímém kódu a v pevné řádová čárce.
- To je výhodou zvoleného zobrazení čísel.

## Algoritmus sčítání v pohyblivé řádové čárce

- Odečteme exponenty.
- Mantisu čísla s menším exponentem posuneme doprava o počet bitů, který je roven rozdílu exponentů.
- Sečteme mantisy obou čísel.
- Určíme počet nul mezi řádovou čárkou a první platnou číslicí součtu mantis.
- Posuneme součet doleva o tolik míst, kolik nul bylo nalezeno za řádovou čárkou.
- Zmenšíme původní exponent o počet nalezených nul.
- Zaokrouhlíme.

# HW FP sčítačky





## Násobení čísel v pohyblivé řádové čárce

- Exponenty sečteme.
  - Mantisy vynásobíme.
  - Normalizujeme.
  - Zaokrouhlíme.
- 
- HW FP násobičky je srovnatelně složitý, jako FP sčítačky. Jen má namísto sčítačky násobičku.

## Najdete všechny chyby v programu?

Chceme napsat program  
pro zjištění součtu:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2}$$

```
#include <stdio.h>
int main()
{
    int i, sum=0;
    for(i=1; i<= 10^10; i++)
        sum += 1/i*i;
    printf("Soucet je: %d", sum);
    return 0;
}
```

## Najdete všechny chyby v programu?

- Který způsob je nejvýhodnější?

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} = \sum_{i=N}^1 \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{(N-i+1)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{10^{10}} \frac{1}{i^2} \approx 1.6449340578301865$$

$$\sum_{i=10^{10}}^1 \frac{1}{i^2} \approx 1.6449340667482264$$

} typ double pro oba případy.. Proč se liší?

## Překvapení na závěr ???

```
#include <stdio.h>
int main()
{
    float x;
    x = 116777215.0;    printf("%.31f\n", x);
    x = 116777216.0;    printf("%.31f\n", x);
    x = 116777217.0;    printf("%.31f\n", x);
    x = 116777218.0;    printf("%.31f\n", x);
    x = 116777219.0;    printf("%.31f\n", x);
    x = 116777220.0;    printf("%.31f\n", x);
    x = 116777221.0;    printf("%.31f\n", x);
    return 0;
}
```