Zákon rozdělení poruch

- Nejsnadnější zjištění zkouškou z velkého počtu systémů
- Záznamy:
  1. Doby poruch jednotlivých systémů

častější $\longrightarrow$ 2. Počty poruch systémů v krátkém časovém intervalu (vzhledem k trvání testu)

následuje statistické zpracování:

1. Prostá tabelace poruchovosti (nepraktické, nepoužívá se)
2. Porovnání průběhu poruchovosti s některým standardním rozdělením a určení parametrů rozdělení

- Nalezené (zvolené) rozdělení umožní dopočítat všechny potřebné charakteristiky (včetně dalších stavů jako např.: čekání na opravu, bezporuchovost, porucha zálohy aj.)

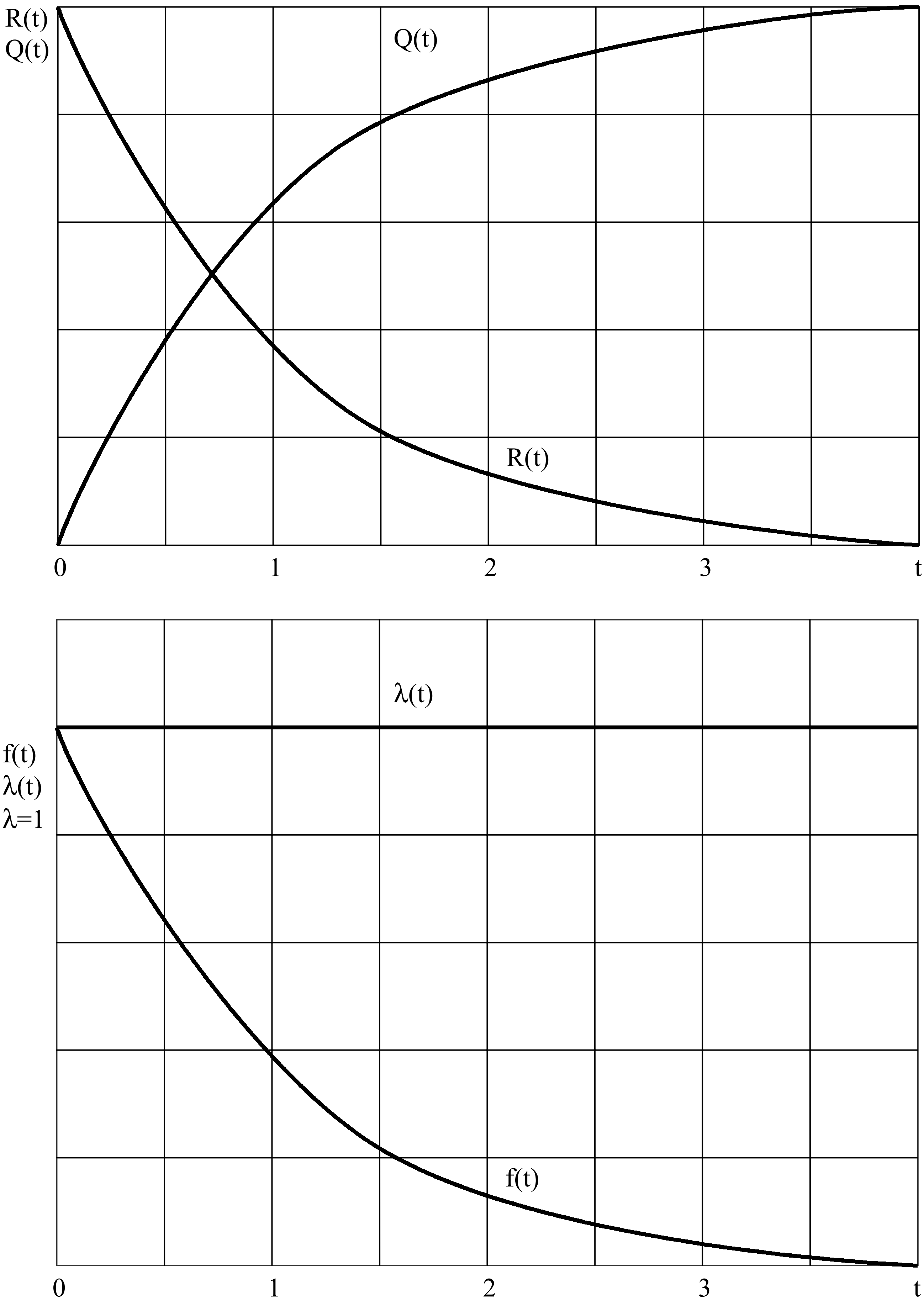
Rozdělení spojité náhodné proměnné

1. Exponenciální rozdělení: jeden parametr $\lambda > 0$ pro $t \geq 0$

výhodné: jednoduché analytické výrazy
při nedostatku údajů o chování systému
se snadněji určí

$R(t)=\exp(-\lambda.t)$
$Q(t)=1-\exp(-\lambda.t)$
$f(t)= \lambda.\exp(-\lambda.t)$
$\lambda(t)= \lambda$
$T_S=1/\lambda$
$D=1/\lambda^2$

Pozn.:
(1) Nejčastěji užívané !
(2) Střední doba bezporuchového provozu $1/\lambda \Rightarrow$ rozložení je určeno střední hodnotou.
(3) Vhodná aproximace chování systémů v období normálního provozu !
(4) Neodpovídá chování v období počátečního provozu a období dožívání systému !
(5) Některé typy systémů s proměnnou intenzitou poruch (λ) nejsou pro popis exp. rozdělením vhodné.



Průběhy veličin R(t), Q(t), f(t) a λ(t) pro exponenciální rozdělení. λ=1.

2. Rayleightovo rozdělení: je určeno jedním parametrem, intenzita poruch roste lineárně s časem
parametr rozdělení: $k \geq 0$ pro $t \geq 0$

$$R(t)=\exp(-\frac{k}{2}t^2)$$
$$Q(t)=1-\exp(-\frac{k}{2}t^2)$$
$$f(t)=k.t.\exp(-\frac{k}{2}t^2)$$
$$\lambda(t)=k.t$$
$$T_S=\sqrt{\frac{\pi}{2k}}=\frac{1.253}{\sqrt{k}}$$
$$D=(2-\frac{\pi}{2})/k=\frac{.429}{k}$$

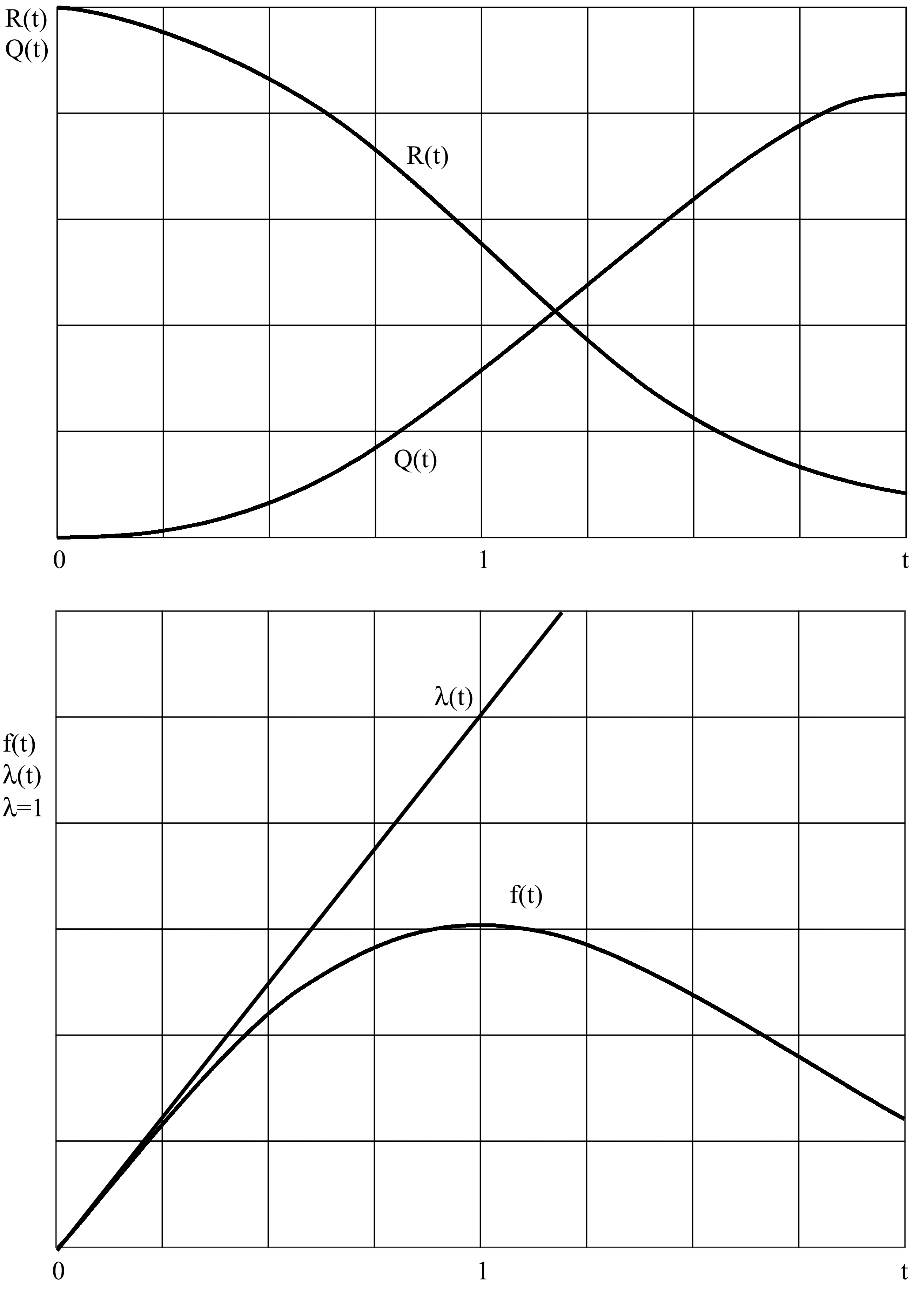
3. Wiebullovo rozdělení: původně 3 parametry, pro účely spolehlivosti se parametr posunutí v čase nuluje.
parametry rozdělení: $m>0$
$t_0>0$ pro $t \geq 0$

$$R(t)=\exp(-\frac{t^m}{t_0})$$
$$Q(t)=1-\exp(-\frac{t^m}{t_0})$$
$$f(t)=\frac{m}{t_0}t^{m-1}.\exp(-\frac{t^m}{t_0})$$
$$\lambda(t)=\frac{m}{t_0}t^{m-1}$$
$$T_S=t_0^{1/m}\Gamma(\frac{1}{m}+1)$$
$$D=t_0^{2/m}[\Gamma(\frac{2}{m}+1)-\Gamma^2(\frac{1}{m}+1)]$$

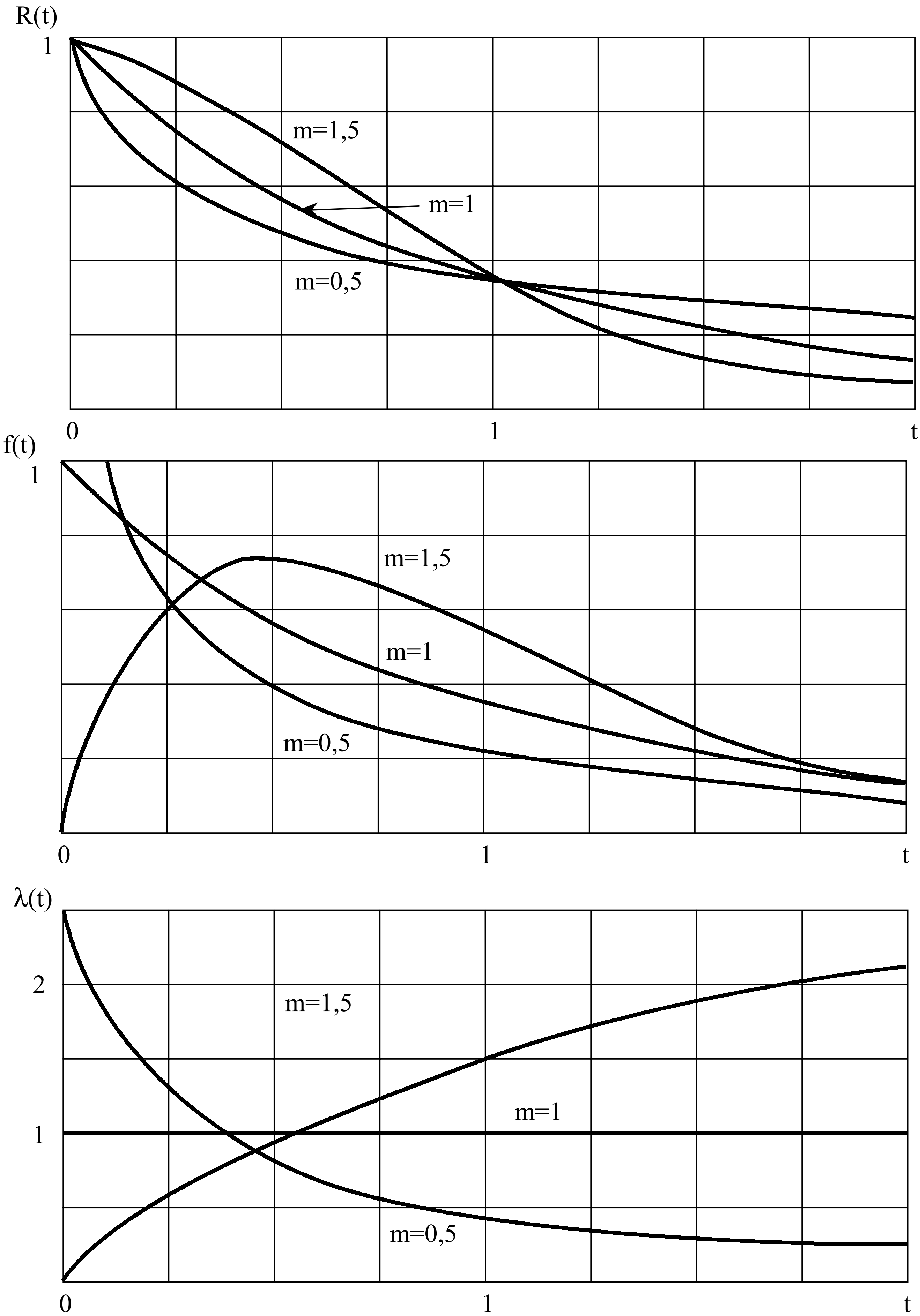
- Wiebullovo rozdělení zahrnuje exponenciální rozdělení a Rayleightovo rozdělení jako spec. případy.
  pro $m=1 \Rightarrow$ exp. rozdělení
  pro $m=2 \Rightarrow$ Rayleightovo rozdělení

- Charakteristiky Wiebullova rozdělení pro m<1 aproximují období počátečního provozu systému

- Po exponenciálním rozdělení je Wiebullovo rozdělení 2. Nejpoužívanější



Průběhy veličin R(t), Q(t), f(t) a λ(t) pro Rayleightovo rozdělení. K=1.



Průběhy veličin R(t), f(t) a λ(t) pro Weibullovo rozdělení.

4. <u>Rozdělení gama</u>: dva parametry m>0, c>0

čas $t \geq 0$

uplatnění při popisu soustav se zálohováním

$$f(t)=\frac{t^{m-1}}{c^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{t}{c}\right)$$

$T_S = m.c$

$D = m.c^2$

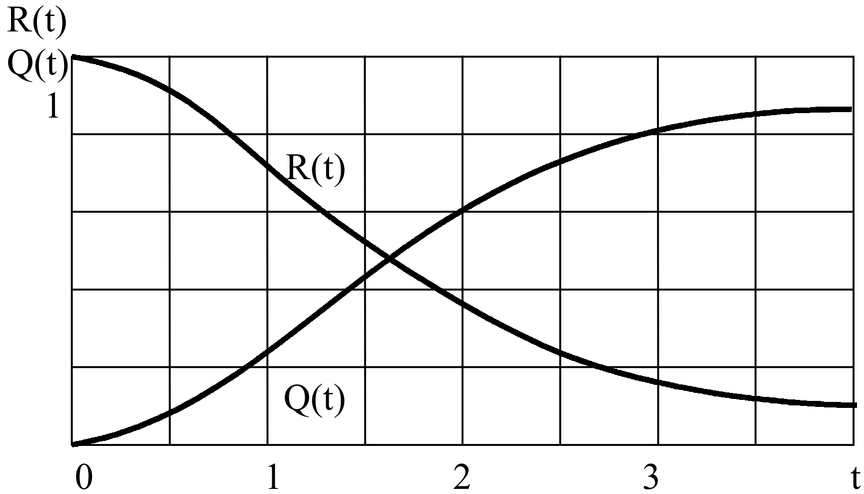
je-li <u>m</u> celé číslo, je $\Gamma(m) = (m-1)!$ tedy:

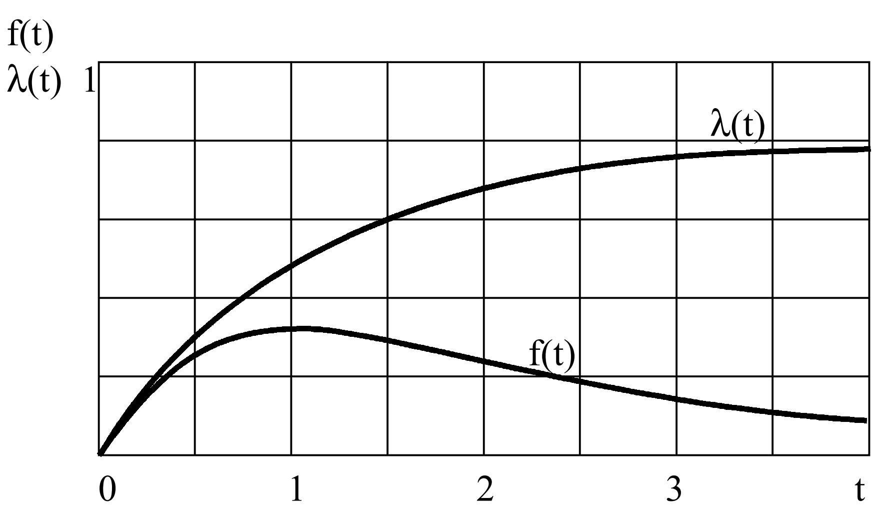
$$f(t)=\frac{t^{m-1}}{c^m (m-1)!} \exp\left(-\frac{t}{c}\right)$$

kde: m…změna tvaru funkce f(t)

c…změna měřítka na osách

- rozdělení gama je pro m=1 exponenciálním rozdělením s $\lambda=1/c$
- hodnoty $\Gamma(m)$ a F(t) jsou tabelovány





Průběhy veličin R(t), Q(t), f(t) a λ(t) pro rozdělení gama. c=1, m=2.

5. Normální rozdělení: dva parametry μ, σ > 0
čas $t \geq 0$

$$f(t)=\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

kde $c=\left(\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1}$

Φ …distr. funkce normovaného rozdělení, tj.: $\mu_n=0$, $\sigma_n^2=1$

tedy $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

hustota pravděp. normálního rozdělení:

$$f_n(x)=\frac{d\Phi(x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- **! POZOR**, pro účely spolehlivosti se pracuje s $t \geq 0$ tj. pravděp. je =0, $\forall t<0$ tj. charakteristiky bezporuchovosti pro „useknuté" rozdělení: t>0

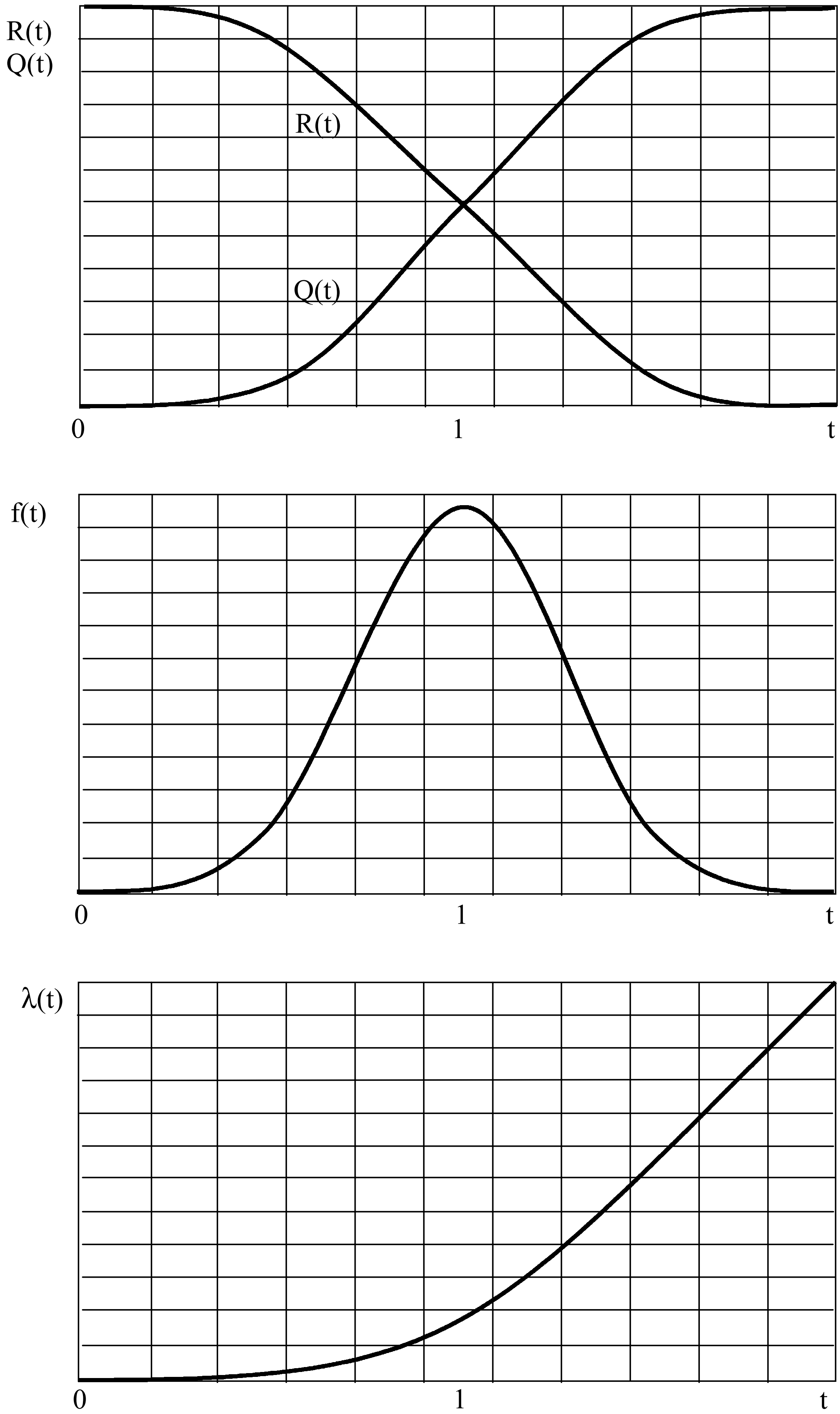
$$R(t)=\frac{\Phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

$$Q(t)=1-R(t)$$

$$f(t)=\frac{f_n\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{\sigma\cdot\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

$$T_S=\mu+\sigma\frac{f_n\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)}{2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-1\right)}$$

- pro $\mu > 2\sigma$ je T_S liší minimálně od μ
- „useknuté" normované rozložení (viz obr.) je vhodné pro aproximaci charakteristik bezporuchovosti v období dožívání výrobku



Průběhy veličin $R(t)$, $Q(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ pro useknuté normální rozdělení.
$t_0=1$, $\sigma=0{,}3$

6. Logaritmické – normální rozdělení

- logaritmus náhodné proměnné t má normální rozdělení, tedy:

$$x=\ln(t) \qquad \forall\ t>0$$

hustota pravděp.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\text{ kde: } x\in(-\infty;+\infty)$$

dosazením:

$$f(t)=\frac{M}{t\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\log(t)-\log(t_0))^2}{2\sigma^2}\right)$$

kde: konstanta $M \doteq 0{,}4343$ je pro převod $\ln \leftrightarrow \log$

Střední doba rozdělení:

$$T_S = t_0 \cdot \exp\left(\frac{\sigma^2}{2M^2}\right) = t_E$$

logaritmováním a dosazováním za M:

$$\log(T_S) = t_0 + 1.1513\sigma^2$$

Rozptyl:

$$D = t_E^2\left|\frac{t_E^2}{t_0^2}-1\right|$$

- pro malé velikosti $\sigma < 0.1$ je podobné normální rozdělení, použití v době obnovy soustavy
- předchozí jednoduchá rozdělení neaproximují dostatečně přesně soustavu po celou dobu jejího života $\Rightarrow$ kombinace jednoduchých rozdělení

Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

- aproximace bezporuchovosti v obdobích počátečního provozu + normálního provozu

$R(t)=c_1\exp(-\lambda_1.t) + c_2\exp(-\lambda_2.t)$

$f(t)= \lambda_1c_1\exp(-\lambda_1.t) + \lambda_2c_2\exp(-\lambda_2.t)$

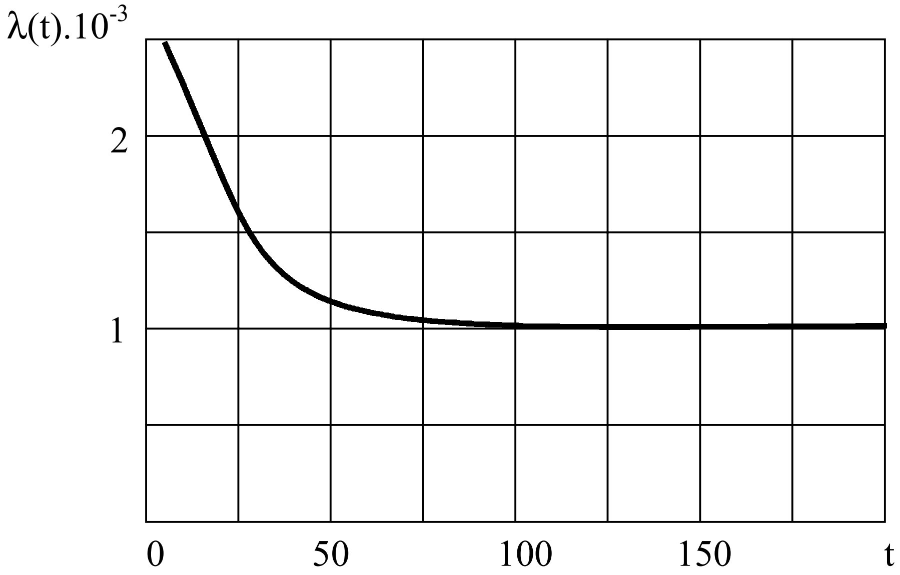
musí platit: $$\int_0^\infty f(t)dt \Rightarrow c_1 + c_1 = 1$$

tedy: $$\lambda(t)=\frac{c_1\lambda_1\exp(-\lambda_1 t)+c_2\lambda_{21}\exp(-\lambda_{21}t)}{c_1\exp(-\lambda_1 t)+c_2\exp(-\lambda_{21}t)}$$

počáteční hodnota: $\lambda(0)= \lambda_1c_1+ \lambda_2c_2$

$$T_S = \frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_2}$$

- je-li (typicky) $\lambda_1 < \lambda_2$ při dostatečně velkém t je $\exp(-\lambda_2 t)$ blíže k 0 než $\exp(-\lambda_1 t) \Rightarrow \forall t >> 1$ přejde rozdělení v exponenciální rozdělení s $\lambda(t) \doteq \lambda_1(t)$



Průběhy intenzity poruch pro superpozici dvou exp. rozdělení. $\lambda_1=0{,}001$, $\lambda_2=0{,}04$, $c_1=0{,}95$, $c_2=0{,}05$.

Kombinace exponenciálního a useknutého normálního rozložení

- vhodné pro aproximaci poruchovosti v obdobích normálního provozu + dožívání výrobku

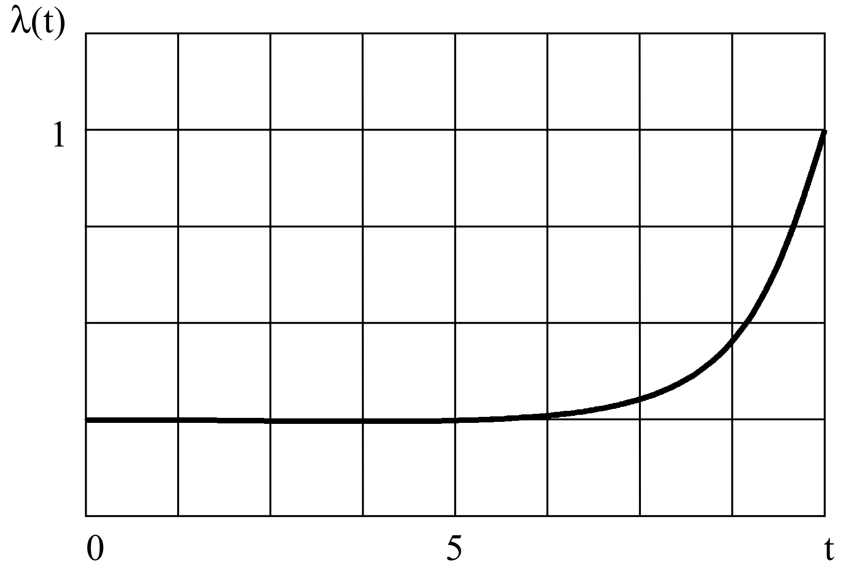
  výsledná intenzita poruch: $\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$

- potom pravděp. bezporuchového provozu

$$R(t) = R_1(t).R_2(t)$$

$$R(t) = \exp(-\lambda_1 t) \cdot \frac{\Phi\left(\frac{\mu - t}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\lambda(t) = \lambda_1 + \frac{f\left(\frac{\mu - t}{\sigma}\right)}{\sigma\Phi\left(\frac{\mu - t}{\sigma}\right)}$$

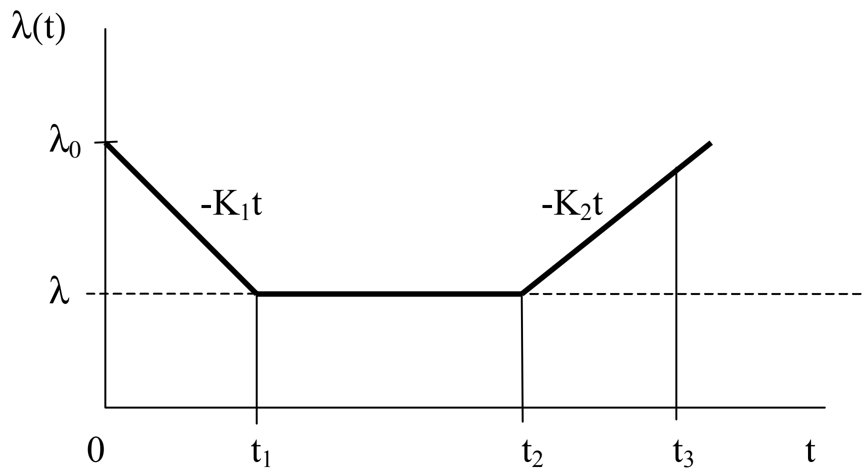


Průběhy intenzity poruch pro kombinaci exp. a useknutého norm. rozdělení.
λ=0,2, t_0=10, σ=1.

- všechna tři období provozu lze aproximovat dobře Wienbullovým rozdělením nebo superpozicí dvou exp. rozdělení vždy v kombinaci s useknutým normálním rozdělením ($t \geq 0$)

<u>Rozdělení s intenzitou poruch po úsecích lineární</u>

- tzv. „vanová křivka“



- <u>úseky</u>: konstantní intenzita poruch → exp. rozdělení
  rostoucí intenzita poruch → Reiteighovo rozdělení
  klesající intenzita poruch → viz dále

Situace s klesající intenzitou poruch

Pro t=0 počáteční hodnota λ_0 jež lineárně klesá k 0

tedy $\lambda(t)=\lambda_0-K_1t$

$\lambda(t)$ $\lambda(t)\geq 0\ \forall t\geq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(t)=\lambda_0-K_1t\\ \lambda(t)\geq 0\ \forall t\geq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq t \leq \lambda_0/K_1$$

rozdělení je dvouparametrové λ_0, K_1

nicméně **<u>ne</u>**splňuje podmínku, že pro

$$t \to \infty \Rightarrow \int_0^t \lambda(t)dt \to \infty$$

<u>řešení</u>: zavedení konstantní složky $\lambda(t)=konst$
nebo $\lambda(t)$=fce(t) rostoucí s t

- pravděp. bezporuchového provozu se stanoví integrací $\lambda(t)$ dle t
  - rozdělení oboru integrace na 3 intervaly (viz předchozí obr.) dosazením do vztahu

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right)$$

<u>tedy pro po částech lineární rozložení platí</u>: (viz obr.)

$\forall t;\ 0\leq t\leq t_1$: $\lambda(t)=\lambda_0-K_1t$

$R(t)=\exp(-\lambda_0 t+0{,}5K_1t^2)=R_1t$

mez intervalu: $t_1 = \frac{1}{K_1}(\lambda_0 - \lambda)$

$\forall t;\ t_1\leq t\leq t_2$: $\lambda(t)=\lambda$

$R(t)=\exp(-\lambda_0 t+0{,}5K_1t_1^2-\lambda(t-t_1))$

dosazením ze rovnice:

$R(t)=R_1(t_1)\exp(-\lambda(t-t_1))=R_2(t)$

$\forall t;\ t_2\leq t\leq t_3$: $\lambda(t)=\lambda+K_2(t)$

$R(t)= R_2(t_2)\exp(-\lambda(t-t_2)-0{,}5K_2(t-t_2)^2)$

*

<u>Pozn.</u>: 1) Součiny výrazů výše ozn. * reprezentují současný výskyt jevů (pravděp.), že: „porucha nenastala do začátku intervalu“ **x** **x „**pravděp. bezporuchového provozu uvnitř intervalu“

2) mez intervalu t_3 je možno posouvat až do $+\infty$.