Testování hypotéz

Petr Pošík

Části dokumentu jsou převzaty (i doslovně)
z *Mirko Navara: Pravděpodobnost a matematická statistika*,
`https://cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33ssl/pms_print.pdf`
s laskavým svolením autora.

Testování hypotéz

Mnoho statistiků trpí nejrůznějšími psychickými poruchami, protože v mládí bylo mnoho jejich hypotéz zamítnuto.

:-)

Motivační příklad: Jasnovidec?

Experiment, kterým chceme ověřit, zda osoba má (větší či menší) jasnovidecké schopnosti:

- Máme balíček karet o 4 barvách (káry, piky, ...) se stejným počtem karet každé barvy.
- Vytáhneme z balíčku 1 kartu a položíme ji lícem dolů. Testovaná osoba řekne svůj tip, jakou barvu karta má. Zkontrolujeme, zda byl odhad správný. Kartu vrátíme do balíčku, balíček zamícháme.
- Opakujeme n-krát, např. 25krát.
- Výsledek experimentu: testovaná osoba se "trefila" v X případech z n.

Jaké rozhodovací pravidlo byste použili?

- Řekli byste, že osoba je jasnovidec, když se trefila v 25 případech z 25?
- Řekli byste, že osoba je jasnovidec, když se trefila v 6 nebo 7 případech z 25?
- Co když se trefila v 10, 15, 20 případech?
- Jak postupovat systematicky?

Osoba může být v jednom ze dvou skutečných "stavů":

1. **obyčejný člověk**, pak pravděpodobnost, že kartu určí správně, je $p = p_0 = \frac{1}{4}$, nebo
2. **jasnovidec**, pak $p > \frac{1}{4}$.

Výsledkem vašeho testu mohou být 2 rozhodnutí:

1. prohlásíte osobu za "obyčejného" člověka, nebo
2. prohlásíte osobu za jasnovidce (zamítnete "obyčejnost").

Motivační příklad: Jasnovidec? (Pokr.)

Použijme test: *Osobu označíme za jasnovidce (zamítneme "obyčejnost"), trefí-li se v 25 případech z 25.*

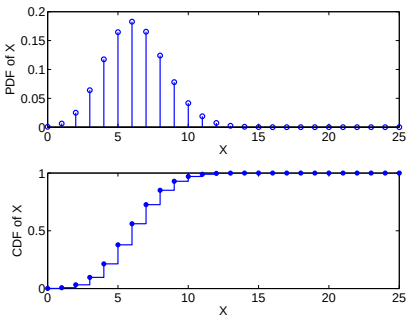
- Můžeme s tímto pravidlem označit obyčejného člověka za jasnovidce? Ano.
- Jaká je pravděpodobnost, že se to stane?

$$P[\text{zamítáme "obyčejnost"}|\text{ve skutečnosti "obyčejný"}] = P[X = 25|p = p_0] = \left(\frac{1}{4}\right)^{25} \doteq 10^{-15}$$

Pro obecný test: *Osobu označíme za jasnovidce (zamítneme "obyčejnost"), trefí-li se alespoň v c případech z n.*

- Jaké rozdělení má X pro "obyčejného" člověka? $X \sim \text{Bi}(n, p_0)$
- Pravděpodobnost, že obyčejného člověka označíme za jasnovidce

$$P[\text{zam. "obyč"}|\text{skut. "obyč"}] = P[X \geq c|p = p_0] =$$
$$= \sum_{i=c}^{n} p_{\text{Bi}(n,p_0)}(i) = 1 - F_{\text{Bi}(n,p_0)}(c-1)$$



c	8	9	10	11	12	13	14	15	20	25
$P[X \geq c\|p = p_0]$	0.27	0.15	0.07	0.03	0.01	0.003	0.0009	0.0002	10^{-8}	10^{-15}

- Pravděpodobnost, že by "obyčejný" člověk (náhodou) uhodl 14 nebo více karet z 25 je cca 1/1000.
- Stačí vám to jako důkaz toho, že onen člověk není "obyčejný" (že je jasnovidec)?

Pojmy

Hypotéza H je tvrzení o vlastnostech rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny X s distribuční funkcí $F_X(x, \boldsymbol{\theta})$ nebo náhodného vektoru (X, Y) se sdruženou distribuční funkcí $F_{XY}(x, y|\boldsymbol{\theta})$, např:

- Střední hodnota poloměru vyráběných hřídelí se shoduje s nominální hodnotou.
- Úmrtnost při stejném druhu operace na 3 různých pracovištích je stejná.
- Pacienti s AIDS mají červené krvinky menší než zdraví lidé.
- Rozdělení výšky dospělých mužů v ČR je normální.
- Používání léku XY zvyšuje riziko nežádoucích účinků alespoň o 5 %.

Test statistické hypotézy je matematický postup, jímž ověřujeme hypotézu.

- **Nulová hypotéza** H_0 je ta, jejíž platnost ověřujeme.
- **Alternativní hypotézu** H_A stavíme proti H_0.

POZOR: *Nelze prokázat platnost statistické hypotézy!* Na základě realizace náhodného výběru buď

- *lze rozhodnout, že hypotéza H_0 není věrohodná* (pak **zamítáme** H_0 a vědomě podstupujeme malé riziko chybného rozhodnutí), nebo
- **nelze zamítnout** H_0, ale v tom případě nevíme, zda je to proto, že
  - H_0 skutečně platí, nebo
  - jen nemáme dostatek dat (dostatečný rozsah výběru) na její zamítnutí.

Průběh testu

Typický postup při testu hypotézy:

1. Formulujeme H_0 a H_A.
2. Zvolíme vhodnou **testovou statistiku** T (**kritérium**) takovou, že
   - její hodnoty co nejtěsněji souvisejí s platností hypotézy H_0,
   - její realizaci jsme schopni spočítat z realizace náhodného výběru a
   - její rozdělení za předpokladu platnosti H_0 známe nebo jsme schopni odvodit.
3. Zvolíme práh $\kappa \in \mathbb{R}$ (**kritickou hodnotu**), pomocí něhož dokážeme rozhodnout o H_0:

   pro $T > \kappa$ zamítáme H_0,
   pro $T \leq \kappa$ nezamítáme H_0.

4. Získáme realizaci náhodného výběru $\boldsymbol{x}$ a provedeme test.

Test hypotézy lze považovat za *binární klasifikátor*: jeho úkolem je buď

- zařadit realizaci $\boldsymbol{x}$ do „normální“ populace (nezamítne H_0), nebo
- zařadit realizaci $\boldsymbol{x}$ do „anomální“ populace (zamítne H_0 ve prospěch H_A).

Testová statistika T *je náhodnou veličinou* (je to funkce náhodného výběru). Rozhodování se proto neobejde bez chyb.

Chyby I. a II. druhu

Stav světa	Rozhodnutí (výsledek testu) H_0 nezamítnuta	H_0 zamítnuta
H_0 platí	OK True negative (TN)	**Chyba I. druhu** False positive (FP)
H_0 neplatí	**Chyba II. druhu** False negative (FN)	OK True positive (TP)

Říkáme, že výsledek testu je **pozitivní**, když můžeme **zamítnout** H_0, a **negativní**, když nemůžeme.

Chyba I. druhu: zamítneme H_0, která ve skutečnosti platí. Pravděpodobnost chyby I. druhu $\alpha(\kappa)$ je nerostoucí funkce prahu κ a nazýváme ji **hladinou významnosti testu**.

Chyba II. druhu: nezamítneme H_0, která neplatí. Pravděpodobnost chyby II. druhu $\beta(\kappa)$ je neklesající funkcí prahu κ. Číslo $1 - \beta$ pak nazýváme **sílou testu**. Hodnotu β lze stanovit jen tehdy, známe-li rozdělení T za předpokladu platnosti H_A!

V lékařské literatuře se často mluví o následujících veličinách:

- **Specificita** (jinak také *true negative rate, TNR*):

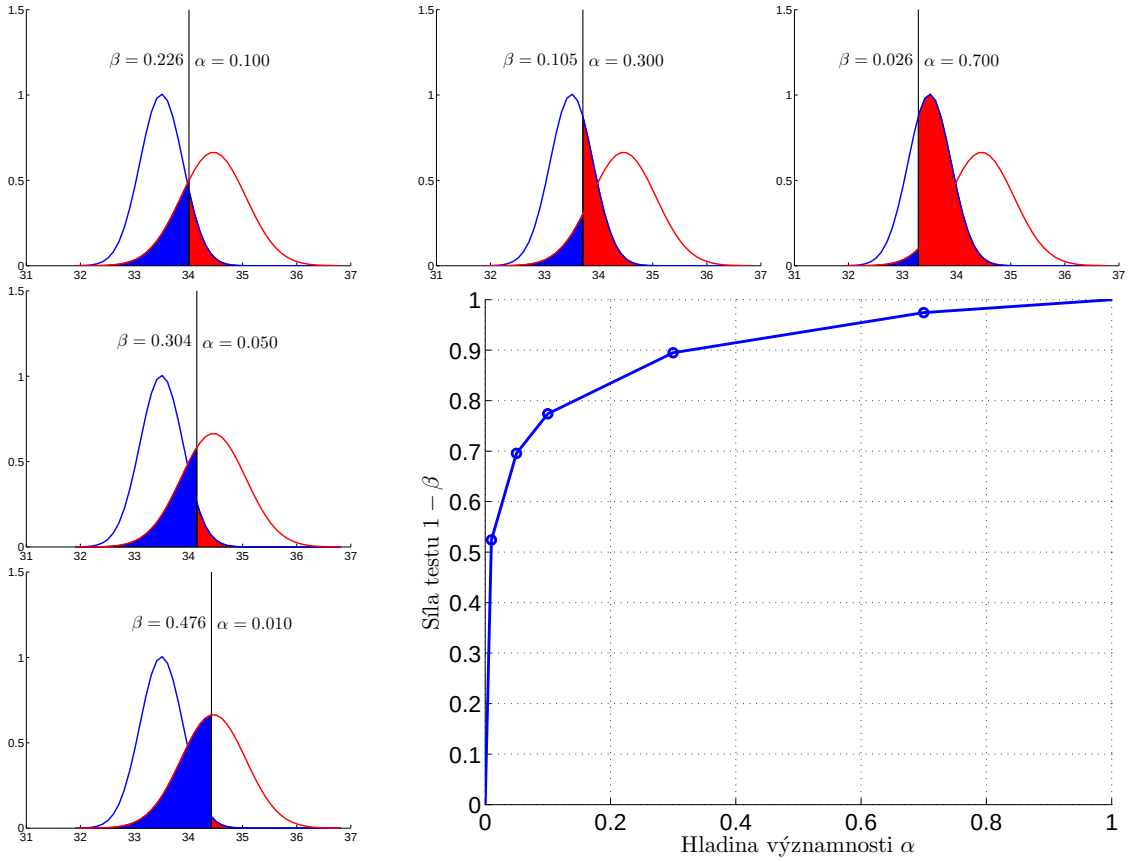
$$spec = TNR = \frac{p_{TN}}{p_{TN} + p_{FP}} = P[H_0 \text{ není zamítnuta} | H_0 \text{ platí}] = 1 - \alpha.$$

- **Senzitivita** (jinak také *true positive rate, TPR,* nebo *recall*):

$$senz = TPR = \frac{p_{TP}}{p_{TP} + p_{FN}} = P[H_0 \text{ je zamítnuta} | H_0 \text{ neplatí}] = 1 - \beta.$$

ROC křivka

Reciever operating characteristic (ROC): závislost významnosti testu α (vodorovná osa) a síly testu $1-\beta$ (svislá osa). Parametrem křivky je kritická hodnota κ.



Volba kritické hodnoty

Volbou kritické hodnoty κ snižujeme riziko jedné chyby, ale zároveň zvyšujeme riziko druhé.

- Hodnotu κ obecně volíme tak, abychom se přiblížili bezchybné klasifikaci ($\alpha = 0, \beta = 0$), tj. bodu (0,1) v grafu ROC.
- Jedinou možností, jak snížit riziko obou chyb zároveň, je získat více dat!

Možná kritéria pro volbu prahu κ:

- $\alpha(\kappa) = \beta(\kappa)$
- $\min_\kappa(\alpha(\kappa) + \beta(\kappa))$
- $\min_\kappa e(\alpha(\kappa), \beta(\kappa))$, např. $\min_\kappa(a\alpha(\kappa) + b\beta(\kappa))$, tj. minimalizace výplatní funkce,
- $\alpha(\kappa) =$ předem zvolená malá hodnota.

Většinou se používá poslední možnost:

- nalezení κ je nejsnazší,
- nepotřebujeme znát rozdělení anomální skupiny (tj. rozdělení, pokud H_0 neplatí).

Kritická hodnota testu κ se volí tak, aby chyba I. druhu nastávala s pravděpodobností α nebo menší (nelze-li dosáhnout rovnosti). Tradičně se volí $\alpha = 0.05$ nebo $\alpha = 0.01$.

- Hodnoty $T > \kappa$ (odpovídají výsledkům málo pravděpodobným za předpokladu platnosti H_0) považujeme za **statisticky významné** (a zamítáme H_0).
- Hodnoty $T \leq \kappa$ (odpovídají výsledkům, jejichž pravděpodobnost není dostatečně malá při platnosti H_0) **nejsou statisticky významné** (a H_0 proto nezamítáme, ani nepotvrzujeme).

Formulace hypotéz

Obvyklým cílem testování hypotéz je stanovit, zda nějaká spekulativní hypotéza o pozorovaném jevu má podporu v datech. O H_0 se předpokládá, že platí, dokud data neposkytnou dostatek „důkazů“ pro její zamítnutí ve prospěch H_A. Proto obvykle:

- H_0 vyjadřuje shodu s předpoklady, neexistenci rozdílu mezi skupinami, neexistenci vlivu, nezávislost, apod. (protože v těchto případech jsme obvykle schopni odvodit rozdělení testové statistiky), zatímco
- H_A vyjadřuje naši spekulativní hypotézu, pro níž hledáme podporu v datech; vyjadřuje odchylku od předpokladů, významný rozdíl, existenci vlivu, závislosti, apod.

H_0 i H_A mohou být

- **jednoduchá hypotéza**, jíž odpovídá jediná hodnota parametru, nebo
- **složená hypotéza**, jíž odpovídá více hodnot parametru.

U složené hypotézy H požadujeme, aby pravděpodobnost chyby I. druhu byla nejvýše α přes všechny hodnoty parametru vyhovující H.

H_0 a H_A se často formulují tak, že nejsou navzájem svými negacemi a nepokrývají celý prostor možných hodnot parametru $\Longrightarrow$ chaos. Snadno se mu vyhneme, když budeme **formulovat nulovou hypotézu jako negaci alternativní.**

- Je-li $H_A : \theta > c$, nevolíme $H_0 : \theta = c$, ale raději $H_0 : \theta \leq c$.
- Největší riziko chyby I. druhu obvykle odpovídá případu $\theta = c$, takže postup testu je stejný.

Klasický a alternativní postup testu

Předpoklad: Máme testovou statistiku T, která roste s parametrem θ (jehož hodnota je předmětem testu) a má známé rozdělení při platné H_0.

Klasický test hypotézy: Typický postup:

1. Zvolíme požadovanou hladinu významnosti α.
2. Ze znalosti rozdělení T pro případ, že platí H_0, určíme kritickou hodnotu κ tak, aby $P[T > \kappa] \leq \alpha$, tj. κ je příslušný kvantil rozdělení T: $\kappa = q_T(1 - \alpha)$.
3. Porovnáme realizaci t a kritickou hodnotu κ a zamítneme H_0, pokud $t > \kappa$.

Ekvivalentní postup: H_0 zamítáme, pokud hodnota parametru θ platná pro H_0 nepadne do $(1 - \alpha)$ intervalu spolehlivosti.

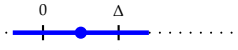
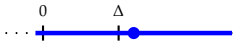
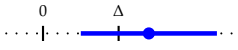
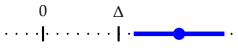
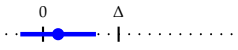
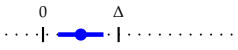
Alternativní postup: zjištění mezní hladiny významnosti, při níž by pozorovaná hodnota t byla kritická, tj.

1. Ze znalosti rozdělení T zjistíme pravděpodobnost, s jakou statistika T nabývá hodnot ještě extrémnějších než t za předpokladu, že platí H_0. Této pravděpodobnosti říkáme **dosažená hladina významnosti** a obvykle se značí P (nebo p-value, p-hodnota).
2. Dosaženou hladinu významnosti P
   - prostě zveřejníme (aby si každý udělal závěr sám), nebo
   - porovnáme se stanovenou požadovanou hladinou významnosti a zamítneme H_0, pokud $P < \alpha$.

Dosaženou hladinu významnosti P lze volně interpretovat jako *míru naší důvěry v platnost H_0.* (Čím nižší, tím je výsledek významnější a tím větší máme “právo” H_0 zamítnout.)

Statistická významnost vs. faktická významnost

- I sebemenší odchylka od předpokladů se s dostatečným rozsahem výběru ukáže jako statisticky významná.
- Označme Δ jistou minimální odchylku, která pro nás bude už fakticky významná.

Interval spolehlivosti	Významnost statistická	Významnost skutečná
	Ne	Možná
	Ne	Možná
	Ano	Možná
	Ano	Ano
	Ne	Ne
	Ano	Ne

- Zdaleka ne každý efekt, který je statisticky významný, je významný i reálně.
- Pojem *statistická významnost* je tak lépe chápat jako *statistickou rozeznatelnost*.

Kuchařka pro testování hypotéz 14 / 23

Typický tvar testu

Realizaci t testovací statistiky T, která roste s parametrem θ a pro H_0 má známé rozdělení, porovnáme s kvantily příslušného rozdělení a H_0 zamítneme při extrémních hodnotách (nepravděpodobných při platnosti H_0).

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$\theta \leq c$	$\theta > c$	$t > q_T(1-\alpha)$	$1 - F_T(t)$
$\theta \geq c$	$\theta < c$	$t < q_T(\alpha)$	$F_T(t)$
$\theta = c$	$\theta \neq c$	$t > q_T(1-\frac{\alpha}{2})$ nebo $t < q_T(\frac{\alpha}{2})$	$2\min(F_T(t), 1-F_T(t))$

V literatuře se často setkáme i s následujícími formulacemi hypotéz, které se ale řeší stejně jako první dva výše uvedené případy:

H_0	H_A
$\theta = c$	$\theta > c$
$\theta = c$	$\theta < c$

Recept: Test střední hodnoty $N(\mu, \sigma^2)$ při známém σ^2

Realizaci testové statistiky

$$t = \frac{\bar{x} - c}{\sigma}\sqrt{n}$$

porovnáme s kvantily *normovaného normálního rozdělení*:

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$\mu \leq c$	$\mu > c$	$t > \Phi^{-1}(1-\alpha)$	$1 - \Phi(t)$
$\mu \geq c$	$\mu < c$	$t < \Phi^{-1}(\alpha)$	$\Phi(t)$
$\mu = c$	$\mu \neq c$	$t > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ nebo $t < \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$	$2(1 - \Phi(\lvert t \rvert))$

Recept: Test střední hodnoty $N(\mu, \sigma^2)$ při neznámém σ^2

Realizaci testové statistiky

$$t = \frac{\bar{x} - c}{s_x}\sqrt{n}$$

porovnáme s kvantily *Studentova rozdělení s $n-1$ stupni volnosti*:

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$\mu \leq c$	$\mu > c$	$t > q_{t(n-1)}(1-\alpha)$	$1 - F_{t(n-1)}(t)$
$\mu \geq c$	$\mu < c$	$t < q_{t(n-1)}(\alpha)$	$F_{t(n-1)}(t)$
$\mu = c$	$\mu \neq c$	$t > q_{t(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$ nebo $t < q_{t(n-1)}(\frac{\alpha}{2})$	$2(1 - F_{t(n-1)}(\lvert t \rvert))$

Příklad: Oboustranný test střední hodnoty

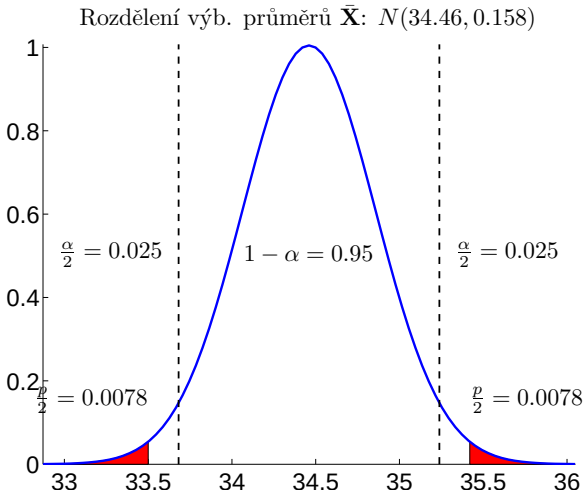
Zadání: 216 pacientům jsme změřili koncentraci bílkovin v krevním séru: $\bar{x} = 34.46$ g/l, $s_x = 5.835$ g/l. Ověřte hypotézu, že střední hodnota koncentrace bílkovin u pacientů tohoto typu je $\mu_0 = 33.5$ g/l, proti možnosti, že se od této hodnoty liší.

Poznámka: Protože neznáme skutečný rozptyl σ^2, měli bychom použít Studentovo rozdělení. Protože ale máme dostatečně velký vzorek, můžeme jej aproximovat normálním rozdělením.

Řešení 1: Interval spolehlivosti. Nepokryje-li 95% interval spolehlivosti I hodnotu μ_0, zamítneme H_0:

$$\begin{aligned} I &= \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \tfrac{\alpha}{2}) = \\ &= 34.46 \pm \frac{5.835}{\sqrt{216}} 1.96 \text{ g/l} \\ &= 34.46 \pm 0.78 \text{ g/l} \\ I &= (33.68, 35.24) \text{ g/l} \end{aligned}$$

Předpokládaná hodnota $\mu_0 = 33.5$ g/l nepatří do tohoto intervalu, což je výsledek, který bychom pozorovali v méně než 5 % případů, kdyby skutečně platilo $\mu = 33.5$ g/l. Proto zamítáme H_0 na hladině významnosti 5 %.



Řešení 2: Oboustranný test hypotézy. Formulujeme hypotézy:

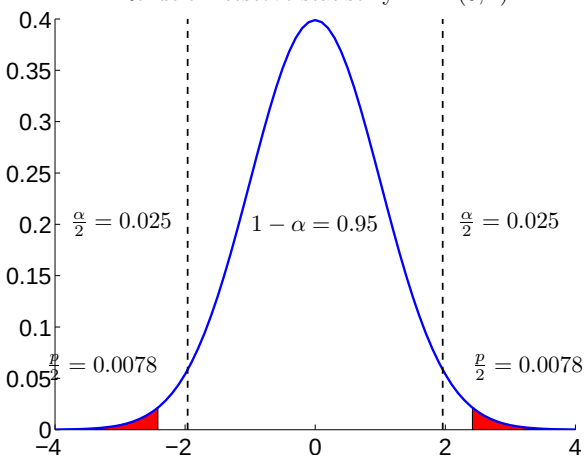
$$H_0 : \ \mu = 33.5 \text{ g/l} \quad \text{a} \quad H_A : \ \mu \neq 33.5 \text{ g/l}$$

Realizace testové statistiky

$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x} - \mu}{s_x} \sqrt{n} = \\ &= \frac{34.46 - 33.5}{5.835} \sqrt{216} = 2.418 \end{aligned}$$

T má přibližně rozdělení $\Phi = N(0,1)$. Dosažená hladina významnosti:

$$p = 2(1 - \Phi(|t|)) = 0.0156$$



Pravděpodobnost, že bychom pozorovali hodnotu $t = 2.418$ nebo větší, kdyby platila H_0, je pouze 1.56%. Na hladině významnosti 5 % bychom H_0 zamítli. Na hladině významnosti 1 % bychom H_0 zamítnout nemohli.

Recept: Test rozptylu $N(\mu, \sigma^2)$

Realizaci testové statistiky

$$t = \frac{(n-1)s_x^2}{c}$$

porovnáme s kvantily χ^2 *rozdělení s* $n-1$ *stupni volnosti*:

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$\sigma^2 \leq c$	$\sigma^2 > c$	$t > q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)$	$1 - F_{\chi^2(n-1)}(t)$
$\sigma^2 \geq c$	$\sigma^2 < c$	$t < q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)$	$F_{\chi^2(n-1)}(t)$
$\sigma^2 = c$	$\sigma^2 \neq c$	$t > q_{\chi^2(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$ nebo $t < q_{\chi^2(n-1)}(\frac{\alpha}{2})$	$2\min(F_{\chi^2(n-1)}(t), 1 - F_{\chi^2(n-1)}(t))$

Neparametrické?

Neparametrické testy nejsou založeny na nějaké parametrizované rodině rozdělení, tj.

- jsou použitelné bez ohledu na typ rozdělení, ale
- jsou slabší (ke stejnému závěru potřebujeme více dat než u parametrických testů, jsou-li aplikovatelné oba druhy).
- Narozdíl od parametrických testů jsou často použitelné i na kvalitativní data, tj. pro ordinální či nominální škálu.

Znaménkový test

Jak otestovat hypotézu o poloze rozdělení, když nemůžeme použít test střední hodnoty (který vyžaduje rozdělení, u něhož střední hodnota existuje)?

- Otestujme medián: $H_0 : q_X(0.5) = c$
- Platí-li H_0, pak jsou kladné i záporné odchylky od c stejně pravděpodobné.

Testovací statistikou T je počet kladných odchylek, které testujeme na rozdělení $\mathrm{Bi}(n, 0.5)$. (Z výběru jsme předem vyloučili nulové odchylky.)

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$q_X(0.5) \leq c$	$q_X(0.5) > c$	$t > q_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(1-\alpha)$	$1 - F_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(t)$
$q_X(0.5) \geq c$	$q_X(0.5) < c$	$t < q_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(\alpha)$	$F_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(t)$
$q_X(0.5) = c$	$q_X(0.5) \neq c$	$t > q_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(1-\frac{\alpha}{2})$ nebo $t < q_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(\frac{\alpha}{2})$	$2\min(F_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(t), 1 - F_{\mathrm{Bi}(n,\frac{1}{2})}(t))$

Pro velká n používáme CLV a testujeme

$$T_0 = \frac{2T - n}{\sqrt{n}}$$

na rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$.

Jednovýběrový Wilcoxonův test

Testuje H_0: X má rozdělení symetrické kolem hodnoty c.

- Má-li X rozdělení symetrické kolem c, pak je c mediánem i střední hodnotou.
- Často se používá jako neparametrická alternativa testu střední hodnoty, je silnější než znaménkový test.
- Z realizace $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ vypočteme posloupnost $(z_1, \ldots, z_n)$, kde $z_j = x_j - c$.
- Seřadíme ji vzestupně podle $|z_j|$, čímž j-tému prvku přiřadíme pořadí r_j. Je-li více stejných rozdílů, přiřadíme jim stejné pořadí rovné aritmetickému průměru.
- Testovou statistikou je

$$T_1 = \sum_{j:z_j>0} r_j$$

nebo

$$T_2 = \min\left(\sum_{j:z_j>0} r_j, \sum_{j:z_j<0} r_j \right).$$

- Porovnáváme s tabulkou kritických hodnot pro tento test.

V dalších přednáškách uvidíte příklady dalších neparametrických testů.