



Testy pro porovnání vlastností dvou skupin

Petr Pošík

Části dokumentu jsou převzaty (i doslovně)
z *Mirko Navara: Pravděpodobnost a matematická statistika*,
https://cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33ssl/pms_print.pdf
s laskavým svolením autora.



Porovnání dvou skupin

Porovnání dvou
normálních rozdělání

Alternativy

Víte, jaký je rozdíl mezi socialismem a kapitalismem?

*V socialismu jeden člověk využívá druhého.
V kapitalismu je to přesně naopak.*

: -)



Porovnání dvou normálních rozdělení



Test stř. hodnot dvou normálních rozdělení se známým rozptylem

Předpoklad: Máme 2 *nezávislé* výběry

(X_1, \dots, X_m) z rozdělení $N(E X, \sigma^2)$ a
 (Y_1, \dots, Y_n) z rozdělení $N(E Y, \sigma^2)$.

Postup: Platí, že

\bar{X}_m má rozdělení $N\left(E X, \frac{\sigma^2}{m}\right)$,

\bar{Y}_n má rozdělení $N\left(E Y, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, takže

$\bar{X}_m - \bar{Y}_n$ má rozdělení $N\left(E X - E Y, \sigma^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right)$.

Za předpokladu $E X = E Y$

$T := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sigma \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$ má rozdělení $N(0, 1)$.

Testujeme realizaci t na rozdělení $N(0, 1)$, jako jsme to dělali v testu střední hodnoty $N(\mu, \sigma^2)$ při známém σ^2 .

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ zn.
- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Test stř. hodnot dvou normálních rozdělení s neznámým rozptylem

Předpoklad: $D X = D Y = \sigma^2$.

Máme-li důvod věřit, že předpoklad není splněn, měli bychom použít neparametrický test. (Důvod věřit? Znalost procesu, který data generuje; zřejmá odchylka od normality v grafech; statistický test normality rozdělení; ...)

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- **Př: $E X$ vs $E Y$**
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Test stř. hodnot dvou normálních rozdělení s neznámým rozptylem

Předpoklad: $D X = D Y = \sigma^2$.

Máme-li důvod věřit, že předpoklad není splněn, měli bychom použít neparametrický test. (Důvod věřit? Znalost procesu, který data generuje; zřejmá odchylka od normality v grafech; statistický test normality rozdělení; ...)

Postup: Máme 2 odhady (S_X^2 a S_Y^2) téhož parametru σ^2 . Vytvoříme z nich 1 sdružený odhad S^2 parametru σ^2 : použijeme jejich průměr vážený rozsahy výběrů (−1 kvůli výpočtu výběrového průměru):

$$S^2 = \frac{(m - 1)S_X^2 + (n - 1)S_Y^2}{m + n - 2}$$

Při výpočtu testové statistiky pak místo skutečné směrodatné odchylky σ použijeme její odhad S . To ale vnáší do výpočtu další zdroj neurčitosti, je proto třeba použít místo normálního rozdělení Studentovo.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- **Př: $E X$ vs $E Y$**
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Test stř. hodnot dvou normálních rozdělení s neznámým rozptylem

Předpoklad: $D X = D Y = \sigma^2$.

Máme-li důvod věřit, že předpoklad není splněn, měli bychom použít neparametrický test. (Důvod věřit? Znalost procesu, který data generuje; zřejmá odchylka od normality v grafech; statistický test normality rozdělení; ...)

Postup: Máme 2 odhady (S_X^2 a S_Y^2) téhož parametru σ^2 . Vytvoříme z nich 1 sdružený odhad S^2 parametru σ^2 : použijeme jejich průměr vážený rozsahy výběrů (−1 kvůli výpočtu výběrového průměru):

$$S^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$$

Při výpočtu testové statistiky pak místo skutečné směrodatné odchylky σ použijeme její odhad S . To ale vnáší do výpočtu další zdroj neurčitosti, je proto třeba použít místo normálního rozdělení Studentovo.

Za předpokladu $E X = E Y$

$$T := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{S \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \text{ má rozdělení } t(m+n-2).$$

Testujeme realizaci t na rozdělení $t(m+n-2)$, jako jsme to dělali v testu střední hodnoty $N(\mu, \sigma^2)$ při neznámém σ^2 .

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- **Př: $E X$ vs $E Y$**
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy

Test stř. hodnot s neznámým rozptylem: Odvození

Ukažme nejprve, že sdružený odhad rozptylu S^2 je nestranným odhadem σ^2 . Víme, že

$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(m-1)$, $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(n-1)$, takže jejich součet

$\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(m+n-2)$ se střední hodnotou $m+n-2$. Proto

$\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{(m+n-2)\sigma^2} = \frac{S^2}{\sigma^2}$ má střední hodnotu 1, takže

$S^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{(m+n-2)}$ je nestranný odhad rozptylu σ^2 .

Test stř. hodnot s neznámým rozptylem: Odvození

Ukažme nejprve, že sdružený odhad rozptylu S^2 je nestranným odhadem σ^2 . Víme, že

$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(m-1)$, $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(n-1)$, takže jejich součet

$\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(m+n-2)$ se střední hodnotou $m+n-2$. Proto

$\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{(m+n-2)\sigma^2} = \frac{S^2}{\sigma^2}$ má střední hodnotu 1, takže

$S^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{(m+n-2)}$ je nestranný odhad rozptylu σ^2 .

Nyní ukažme, že testová statistika T má rozdělení $t(m+n-2)$. Víme, že

$\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$ má rozdělení $N(0,1)$ a že

$\frac{(m+n-2)S^2}{\sigma^2} = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(m+n-2)$, takže

$T := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{S\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}$ má rozdělení $t(m+n-2)$.



Příklad: test středních hodnot při neznámém rozptylu

Zadání: Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Ověřte hypotézu, že alkoholismus matek nijak nesnižuje IQ dětí.

Skupina 1: matky chronické alkoholičky, $m = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = 1805$.

Skupina 2: kontrolní, „normální“ matky, $n = 46$, $\bar{y} = 99$, $\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = 11520$.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- **Př: $E X$ vs $E Y$**
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Příklad: test středních hodnot při neznámém rozptylu

Zadání: Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Ověřte hypotézu, že alkoholismus matek nijak nesnižuje IQ dětí.

Skupina 1: matky chronické alkoholičky, $m = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = 1805$.

Skupina 2: kontrolní, „normální“ matky, $n = 46$, $\bar{y} = 99$, $\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = 11520$.

Řešení: Jednostranný test středních hodnot 2 norm. rozdělení s neznámým rozptylem.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- E X vs E Y, σ^2 zn.
- E X vs E Y, σ^2 nezn.
- Př: E X vs E Y
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- D X vs D Y
- F-rozdělení
- Př: D X vs D Y
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Příklad: test středních hodnot při neznámém rozptylu

Zadání: Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Ověřte hypotézu, že alkoholismus matek nijak nesnižuje IQ dětí.

Skupina 1: matky chronické alkoholičky, $m = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = 1805$.

Skupina 2: kontrolní, „normální“ matky, $n = 46$, $\bar{y} = 99$, $\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = 11520$.

Řešení: Jednostranný test středních hodnot 2 norm. rozdělení s neznámým rozptylem.

Testujeme $H_0 : E X \geq E Y$ proti $H_A : E X < E Y$. Sdružený odhad rozptylu:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{m+n-2} = \\ &= \frac{1805 + 11520}{6 + 46 - 2} = 266.5 \quad \Rightarrow \quad s = 16.3248 \end{aligned}$$

Realizace testové statistiky:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{78 - 99}{16.3248 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{46}}} = -2.9636$$

Dosažená hladina významnosti: $p = F_{t(m+n-2)}(t) = F_{t(50)}(-2.9636) = 0.0023$.

Závěr: Pro $\alpha > 0.23\%$ můžeme zamítnout hypotézu, že alkoholismus matky nesnižuje IQ dětí.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- **Př: $E X$ vs $E Y$**
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Párový pokus

Příklad: Porovnání průměrných teplot na dvou místech. Teploty měříme vždy současně na obou místech.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- **Párový pokus**
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy

- Rozptyl v obou skupinách má *společnou příčinu*, která se projevuje v obou výběrech stejně: *výběry nejsou navzájem nezávislé*.
- Rozdíl teplot (pokud nějaký existuje) může být malý v porovnání s proměnlivostí teplot (v noci 0 st. Celsia, ve dne 20 st. Celsia), proto
- standardní test středních hodnot může být slabý kvůli velkému rozptylu.



Párový pokus

Příklad: Porovnání průměrných teplot na dvou místech. Teploty měříme vždy současně na obou místech.

- Rozptyl v obou skupinách má *společnou příčinu*, která se projevuje v obou výběrech stejně: *výběry nejsou navzájem nezávislé*.
- Rozdíl teplot (pokud nějaký existuje) může být malý v porovnání s proměnlivostí teplot (v noci 0 st. Celsia, ve dne 20 st. Celsia), proto
- standardní test středních hodnot může být slabý kvůli velkému rozptylu.

Předpoklad: Prvky náhodných výběrů X_n a Y_n , tj. náhodné veličiny $X_j, Y_j, j = 1, \dots, n$, mají normální rozdělení $N(\mu_j, \sigma^2)$ s konstantním rozptylem σ^2 a *proměnnými středními hodnotami* $\mu_j = E X_j = E Y_j$.

- Náhodné veličiny $U_j := X_j - \mu_j$ a $V_j := Y_j - \mu_j, j = 1, \dots, n$, *jsou nezávislé* a mají rozdělení $N(0, \sigma^2)$.
- Náhodné veličiny $\Delta_j := U_j - V_j = X_j - Y_j, j = 1, \dots, n$, *jsou nezávislé* a mají rozdělení $N(0, \sigma_\Delta^2)$, kde $\sigma_\Delta^2 = 2\sigma^2$.
- Výběrový průměr $\bar{\Delta}$ má rozdělení $N\left(0, \frac{\sigma_\Delta^2}{n}\right) = N\left(0, \frac{2\sigma^2}{n}\right)$.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ zn.
- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- **Párový pokus**
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Testy středních hodnot: párový pokus

1. Pro *známý* rozptyl σ^2 :

- Neznámé parametry sdruženého rozdělení jsou μ_1, \dots, μ_n , ale nepotřebujeme je.
- Testujeme

$$T := \frac{\bar{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}}$$

na rozdělení $N(0, 1)$.

Porovnání dvou
normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- **Párový t -test**
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Testy středních hodnot: párový pokus

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- **Párový t -test**
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy

1. Pro *známý* rozptyl σ^2 :

- Neznámé parametry sdruženého rozdělení jsou μ_1, \dots, μ_n , ale nepotřebujeme je.
- Testujeme

$$T := \frac{\bar{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}}$$

na rozdělení $N(0, 1)$.

2. Pro *neznámý* rozptyl:

- Neznámé parametry sdruženého rozdělení jsou $\sigma^2, \mu_1, \dots, \mu_n$, ale potřebujeme z nich pouze $\sigma^2 = D X$.
- Můžeme pracovat přímo s výběrem $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ z normálního rozdělení.
- Testujeme

$$T := \frac{\bar{\Delta}}{S_{\Delta}} \sqrt{n}$$

na rozdělení $t(n - 1)$.



Příklad: Test středních hodnot, párový pokus

Zadání: Vliv hydrochlorothiazidu na krevní tlak. Skupině 11 hypertoniků byl nejprve změřen (systolický) tlak po podání placeba a o měsíc později po podání hydrochlorothiazidu (viz tabulka). Ověřte, že hydrochlorothiazid snižuje krevní tlak.

Placebo (X)	211	210	210	203	196	190	191	177	173	170	163
Hydrochlorothiazid (Y)	181	172	196	191	167	161	178	160	149	119	156
Rozdíl (Δ)	30	38	14	12	29	29	13	17	24	51	7

Řešení: Zavedli jsme náhodnou veličinu $\Delta = X - Y$, z níž máme k dispozici náhodný výběr Δ_n rozsahu n , $\Delta_i = X_i - Y_i, i = 1, \dots, n$. Zkusíme vyvrátit hypotézu $H_0 : E X \leq E Y$, tj. $E \Delta \leq 0$.

- $n = 11, \bar{\delta} = 24, s_\delta = 13.092$
- Realizace testové statistiky:

$$t = \frac{\bar{\delta}}{s_\delta} \sqrt{n} = \frac{24}{13.092} \sqrt{11} = 6.08$$

- Dosažená hladina významnosti:

$$p = 1 - F_{t(n-1)}(t) = 1 - F_{t(10)}(6.08) = 5.94 \times 10^{-5}.$$

Závěr: Zamítáme H_0 a přijímáme H_A , tj. hydrochlorothiazid snižuje krevní tlak.

Poznámka: Byl tento experiment dobře navržen?

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ zn.
- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Recept: Test rozptylů dvou normálních rozdělání

Předpoklad: Máme 2 *nezávislé* výběry

(X_1, \dots, X_m) z rozdělení $N(E X, D X)$ a
 (Y_1, \dots, Y_n) z rozdělení $N(E Y, D Y)$.

Je-li $D X = D Y$, pak také $S_X^2 \doteq S_Y^2$.
 Realizaci testové statistiky

$$t = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

porovnáme s kvantily *Fisherova rozdělení* $F(m - 1, n - 1)$:

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$D X \leq D Y$	$D X > D Y$	$t > q_{F(m-1, n-1)}(1 - \alpha)$	$1 - F_{F(m-1, n-1)}(t)$
$D X \geq D Y$	$D X < D Y$	$t < q_{F(m-1, n-1)}(\alpha)$	$F_{F(m-1, n-1)}(t)$
$D X = D Y$	$D X \neq D Y$	$t > q_{F(m-1, n-1)}(1 - \frac{\alpha}{2})$ nebo $t < q_{F(m-1, n-1)}(\frac{\alpha}{2})$	$2 \min(F_{F(m-1, n-1)}(t), 1 - F_{F(m-1, n-1)}(t))$

Porovnání dvou normálních rozdělání

- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ zn.
- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



F-rozdělení

Fisherovo-Snedecorovo rozdělení $F(\xi, \eta)$ s ξ a η stupni volnosti je rozdělení náhodné veličiny

$$F = \frac{\frac{U}{\xi}}{\frac{V}{\eta}},$$

kde U a V jsou *nezávislé* náhodné veličiny s rozdělením $\chi^2(\xi)$, resp. $\chi^2(\eta)$.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- **F-rozdělení**
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



F-rozdělení

Fisherovo-Snedecorovo rozdělení $F(\xi, \eta)$ s ξ a η stupni volnosti je rozdělení náhodné veličiny

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- **F-rozdělení**
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy

$$F = \frac{\frac{U}{\xi}}{\frac{V}{\eta}},$$

kde U a V jsou *nezávislé* náhodné veličiny s rozdělením $\chi^2(\xi)$, resp. $\chi^2(\eta)$.

V našem případě, je-li $D X = D Y = \sigma^2$, pak

$$U := \frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(m-1),$$

$$V := \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(n-1),$$

$$\xi := m-1,$$

$$\eta := n-1,$$

$$F = \frac{\frac{U}{\xi}}{\frac{V}{\eta}} = \frac{\frac{(m-1)S_X^2}{(m-1)\sigma^2}}{\frac{(n-1)S_Y^2}{(n-1)\sigma^2}} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = T,$$

kde T je testová statistika testu z předchozího slidu.



Test rozptylů: praktické poznámky

Pro každou hladinu významnosti potřebujeme 2D tabulku kvantilů indexovanou ξ a η . Obvykle je tabelována jen polovina, druhou je třeba dopočítat podle vzorce

$$q_{F(\xi, \eta)}(\alpha) = \frac{1}{q_{F(\eta, \xi)}(1 - \alpha)}.$$

POZOR na opačné pořadí indexů!

Porovnání dvou normálních rozdělení

- E X vs E Y, σ^2 zn.
- E X vs E Y, σ^2 nezn.
- Př: E X vs E Y
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- D X vs D Y
- **F-rozdělení**
- Př: D X vs D Y
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Test rozptylů: praktické poznámky

Pro každou hladinu významnosti potřebujeme 2D tabulku kvantilů indexovanou ξ a η . Obvykle je tabelována jen polovina, druhou je třeba dopočítat podle vzorce

$$q_{F(\xi, \eta)}(\alpha) = \frac{1}{q_{F(\eta, \xi)}(1 - \alpha)}.$$

POZOR na opačné pořadí indexů!

V praxi se často používá alternativní postup:

1. Pro $s_x^2 \geq s_y^2$ testujeme $t = \frac{s_x^2}{s_y^2} \geq 1$ na rozdělení $F(m - 1, n - 1)$:

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$DX \leq DY$	$DX > DY$	$t > q_{F(m-1, n-1)}(1 - \alpha)$	$1 - F_{F(m-1, n-1)}(t)$
$DX \geq DY$	$DX < DY$	nezamítáme	žádná
$DX = DY$	$DX \neq DY$	$t > q_{F(m-1, n-1)}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - F_{F(m-1, n-1)}(t))$

Porovnání dvou normálních rozdělení

- E X vs E Y, σ^2 zn.
- E X vs E Y, σ^2 nezn.
- Př: E X vs E Y
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- D X vs D Y
- F-rozdělení
- Př: D X vs D Y
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Test rozptylů: praktické poznámky

Pro každou hladinu významnosti potřebujeme 2D tabulku kvantilů indexovanou ξ a η . Obvykle je tabelována jen polovina, druhou je třeba dopočítat podle vzorce

$$q_{F(\xi, \eta)}(\alpha) = \frac{1}{q_{F(\eta, \xi)}(1 - \alpha)}.$$

POZOR na opačné pořadí indexů!

V praxi se často používá alternativní postup:

1. Pro $s_x^2 \geq s_y^2$ testujeme $t = \frac{s_x^2}{s_y^2} \geq 1$ na rozdělení $F(m - 1, n - 1)$:

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$DX \leq DY$	$DX > DY$	$t > q_{F(m-1, n-1)}(1 - \alpha)$	$1 - F_{F(m-1, n-1)}(t)$
$DX \geq DY$	$DX < DY$	nezamítáme	žádná
$DX = DY$	$DX \neq DY$	$t > q_{F(m-1, n-1)}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - F_{F(m-1, n-1)}(t))$

2. Pro $s_x^2 \leq s_y^2$ testujeme $t = \frac{s_y^2}{s_x^2} \geq 1$ na rozdělení $F(n - 1, m - 1)$:

H_0	H_A	H_0 zamítáme, když	dosažená významnost P
$DX \leq DY$	$DX > DY$	nezamítáme	žádná
$DX \geq DY$	$DX < DY$	$t > q_{F(n-1, m-1)}(1 - \alpha)$	$1 - F_{F(n-1, m-1)}(t)$
$DX = DY$	$DX \neq DY$	$t > q_{F(n-1, m-1)}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - F_{F(n-1, m-1)}(t))$

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ zn.
- $E X$ vs $E Y, \sigma^2$ nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- **F-rozdělení**
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Příklad: test rovnosti rozptylů

Zadání: Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Otestujte hypotézu, že rozptyl v obou skupinách je shodný.

Skupina 1: matky chronické alkoholičky, $m = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = 1805$.

Skupina 2: kontrolní, „normální“ matky, $n = 46$, $\bar{y} = 99$, $\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = 11520$.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- $E X$ vs $E Y$, σ^2 zn.
- $E X$ vs $E Y$, σ^2 nezn.
- Př: $E X$ vs $E Y$
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- $D X$ vs $D Y$
- F-rozdělení
- Př: $D X$ vs $D Y$
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Příklad: test rovnosti rozptylů

Zadání: Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Otestujte hypotézu, že rozptyl v obou skupinách je shodný.

Skupina 1: matky chronické alkoholičky, $m = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = 1805$.

Skupina 2: kontrolní, „normální“ matky, $n = 46$, $\bar{y} = 99$, $\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = 11520$.

Řešení: Otestujme $H_0 : D X = D Y$. Realizace testové statistiky:

$$t = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2} = \frac{\frac{1805}{5}}{\frac{11520}{45}} = 1.41.$$

Dosažená hladina významnosti:

$$\begin{aligned} p &= 2 \min(F_{F(m-1, n-1)}(t), 1 - F_{F(m-1, n-1)}(t)) = \\ &= 2 \min(F_{F(5, 45)}(1.41), 1 - F_{F(5, 45)}(1.41)) = 2 \min(0.76, 0.24) = 0.48. \end{aligned}$$

Rozdíl rozptylů mezi skupinami není statisticky významný, nezamítáme H_0 o rovnosti rozptylů.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- E X vs E Y, σ^2 zn.
- E X vs E Y, σ^2 nezn.
- Př: E X vs E Y
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- D X vs D Y
- F-rozdělení
- Př: D X vs D Y
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy



Recept: Testy parametrů dvou alternativních rozdělení

Předpoklad: Máme 2 *nezávislé* výběry $X_m = (X_1, \dots, X_m)$ z rozdělení $Ber(q_1)$ a $Y_n = (Y_1, \dots, Y_n)$ z rozdělení $Ber(q_2)$.

Platí-li $q_1 = q_2 = q$, můžeme pro parametr q použít maximálně věrohodný odhad pomocí obou výběrů:

$$R = \frac{m\bar{X} + n\bar{Y}}{m + n}.$$

Pro dostatečně velké rozsahy výběrů ($m > 100, n > 100$) lze *rozdělení výběrových relativních četností* \bar{X} a \bar{Y} aproximovat normálními rozděleními:

$$\bar{X} \text{ má přibližně rozdělení } N\left(R, \frac{R(1-R)}{m}\right),$$

$$\bar{Y} \text{ má přibližně rozdělení } N\left(R, \frac{R(1-R)}{n}\right), \text{ takže}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \text{ má přibližně rozdělení } N\left(0, \frac{R(1-R)}{m} + \frac{R(1-R)}{n}\right).$$

Testovou statistiku

$$T := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{R(1-R)}{m} + \frac{R(1-R)}{n}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{R(1-R) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

testujeme na rozdělení $N(0, 1)$.

Porovnání dvou normálních rozdělení

- E X vs E Y, σ^2 zn.
- E X vs E Y, σ^2 nezn.
- Př: E X vs E Y
- Párový pokus
- Párový t -test
- Př: párový t -test
- D X vs D Y
- F-rozdělení
- Př: D X vs D Y
- q_X vs q_Y
- Př: q_X vs q_Y
- Simpsonův paradox

Alternativy

Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností

Zadání: Přijímací řízení na Berkeley v roce 1973. Z 8300 přihlášených mužů bylo přijato 3700, z 4300 přihlášených žen bylo přijato 1500. Ověřte hypotézu, že pravděpodobnost přijetí mužů a žen je stejná.

Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností

Zadání: Příjímací řízení na Berkeley v roce 1973. Z 8300 přihlášených mužů bylo přijato 3700, z 4300 přihlášených žen bylo přijato 1500. Ověřte hypotézu, že pravděpodobnost přijetí mužů a žen je stejná.

Řešení: Oboustranný test hypotézy o rovnosti pravděpodobnosti přijetí pro muže q_m a ženy q_z :

- Počet přihlášených mužů je $m = 8300$ a žen $n = 4300$.
- Realizace relativních výběrových četností (úspěšnost) je pro muže $\bar{x} = \frac{3700}{8300} = 0.4458$ a pro ženy $\bar{y} = \frac{1500}{4300} = 0.3488$.
- Platí-li $q_m = q_z = q$, můžeme q odhadnout pomocí $r = \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n} = \frac{3700+1500}{8300+4300} = 0.4127$.
- Realizace testové statistiky je

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{r(1-r) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}} = \frac{0.4458 - 0.3488}{\sqrt{0.4127(1-0.4127) \left(\frac{1}{8300} + \frac{1}{4300} \right)}} = 10.4802$$

- Dosažená hladina významnosti

$$p = 2(1 - \Phi(t)) \doteq 0.$$

Závěr: Zamítáme H_0 , na základě těchto dat existuje jen mizivá šance, že by pravděpodobnosti přijetí muže a ženy mohly být shodné.

Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností

Zadání: Příjímací řízení na Berkeley v roce 1973. Z 8300 přihlášených mužů bylo přijato 3700, z 4300 přihlášených žen bylo přijato 1500. Ověřte hypotézu, že pravděpodobnost přijetí mužů a žen je stejná.

Řešení: Oboustranný test hypotézy o rovnosti pravděpodobnosti přijetí pro muže q_m a ženy q_z :

- Počet přihlášených mužů je $m = 8300$ a žen $n = 4300$.
- Realizace relativních výběrových četností (úspěšnost) je pro muže $\bar{x} = \frac{3700}{8300} = 0.4458$ a pro ženy $\bar{y} = \frac{1500}{4300} = 0.3488$.
- Platí-li $q_m = q_z = q$, můžeme q odhadnout pomocí $r = \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n} = \frac{3700+1500}{8300+4300} = 0.4127$.
- Realizace testové statistiky je

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{r(1-r) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}} = \frac{0.4458 - 0.3488}{\sqrt{0.4127(1-0.4127) \left(\frac{1}{8300} + \frac{1}{4300} \right)}} = 10.4802$$

- Dosažená hladina významnosti

$$p = 2(1 - \Phi(t)) \doteq 0.$$

Závěr: Zamítáme H_0 , na základě těchto dat existuje jen mizivá šance, že by pravděpodobnosti přijetí muže a ženy mohly být shodné.

Je to důkaz pohlavní diskriminace?

Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností (pokr.)

Zadání: Přijímací řízení na Berkeley v roce 1973. Tentokrát zohledněme i to, na jaký směr (umění nebo věda) se zájemci hlásili.

Řešení: Kromě celkových výsledků z předchozího slidu, níže uvedená tabulka obsahuje stejné výsledky také pro každý směr zvlášť.

Směr	Muži			Ženy			Celkem Poměr r	Test	
	Přihl. m	Přij.	Poměr \bar{x}	Přihl. n	Přij.	Poměr \bar{y}		Stat. t	Dos. význ. p
Umění	2300	700	0.3043	3200	900	0.2813	0.2909	1.8604	0.0628
Věda	6000	3000	0.5000	1100	600	0.5455	0.5070	-2.7720	0.0056
Celkem	8300	3700	0.4458	4300	1500	0.3488	0.4127	10.4802	0.0000

Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností (pokr.)

Zadání: Přijímací řízení na Berkeley v roce 1973. Tentokrát zohledněme i to, na jaký směr (umění nebo věda) se zájemci hlásili.

Řešení: Kromě celkových výsledků z předchozího slidu, níže uvedená tabulka obsahuje stejné výsledky také pro každý směr zvlášť.

Směr	Muži			Ženy			Celkem Poměr r	Test	
	Přihl. m	Přij.	Poměr \bar{x}	Přihl. n	Přij.	Poměr \bar{y}		Stat. t	Dos. význ. p
Umění	2300	700	0.3043	3200	900	0.2813	0.2909	1.8604	0.0628
Věda	6000	3000	0.5000	1100	600	0.5455	0.5070	-2.7720	0.0056
Celkem	8300	3700	0.4458	4300	1500	0.3488	0.4127	10.4802	0.0000

Závěry:

- V uměleckých směrech nelze zamítnout hypotézu o stejné pravděpodobnosti přijetí mužů a žen.
- Ve vědeckých směrech tuto hypotézu zamítnout lze, dosažená hladina významnosti je cca 0.5 %.
- Zajímavé ovšem je, že na uměleckých směrech, kam se hlásí více žen, mají vyšší pravděpodobnost přijetí muži, zatímco na vědeckých směrech, kam se hlásí více mužů, mají vyšší pravděpodobnost přijetí ženy. Dochází tedy spíše k *pozitivní diskriminaci*.

Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností (pokr.)

Zadání: Přijímací řízení na Berkeley v roce 1973. Tentokrát zohledněme i to, na jaký směr (umění nebo věda) se zájemci hlásili.

Řešení: Kromě celkových výsledků z předchozího slidu, níže uvedená tabulka obsahuje stejné výsledky také pro každý směr zvlášť.

Směr	Muži			Ženy			Celkem Poměr r	Test	
	Přihl. m	Přij.	Poměr \bar{x}	Přihl. n	Přij.	Poměr \bar{y}		Stat. t	Dos. význ. p
Umění	2300	700	0.3043	3200	900	0.2813	0.2909	1.8604	0.0628
Věda	6000	3000	0.5000	1100	600	0.5455	0.5070	-2.7720	0.0056
Celkem	8300	3700	0.4458	4300	1500	0.3488	0.4127	10.4802	0.0000

Závěry:

- V uměleckých směrech nelze zamítnout hypotézu o stejné pravděpodobnosti přijetí mužů a žen.
- Ve vědeckých směrech tuto hypotézu zamítnout lze, dosažená hladina významnosti je cca 0.5 %.
- Zajímavé ovšem je, že na uměleckých směrech, kam se hlásí více žen, mají vyšší pravděpodobnost přijetí muži, zatímco na vědeckých směrech, kam se hlásí více mužů, mají vyšší pravděpodobnost přijetí ženy. Dochází tedy spíše k *pozitivní diskriminaci*.

Simpsonův paradox: Co platí pro části, nemusí platit pro celek.

- Muži a ženy jsou přijímáni přibližně shodně. Ženy ovšem mají tendenci hlásit se na umělecké směry, kde je výběr přísnější, což vysvětluje jejich celkově nižší úspěšnost v přijímačkách.
- Z celkových čísel nelze správně pochopit efekt pohlaví na přijetí kvůli matoucímu faktoru (směr), který nebyl řízen. Když se zařadil do studie, dostali jsme mnohem přesnější obrázek.



Alternativy



Porovnání polohy 2 rozdělení: neparametrický test

Co dělat, pokud předpoklady 2výběrového t-testu nejsou splněny? Použijte neparametrický test, např.:

Porovnání dvou
normálních rozdělení

Alternativy

- MW U-test
- ANOVA
- Rozklad variability
- Tabulka ANOVA
- Příklad
- Předpoklady

Mann-Whitneyův U-test:

- Jsou-li pozorování *ordinální*, testuje hypotézu H_0 , že rozdělení v obou skupinách jsou shodná, proti alternativní hypotéze H_A , že jedno z rozdělení má sklon generovat větší hodnoty než druhé.
- Při přísnějších předpokladech (pozorování spojitá, rozdělení se mohou lišit jen v poloze), jej lze interpretovat jako test rovnosti mediánů.



Porovnání polohy 2 rozdělení: neparametrický test

Co dělat, pokud předpoklady 2výběrového t-testu nejsou splněny? Použijte neparametrický test, např.:

Porovnání dvou normálních rozdělení

Alternativy

- MW U-test
- ANOVA
- Rozklad variability
- Tabulka ANOVA
- Příklad
- Předpoklady

Mann-Whitneyův U-test:

- Jsou-li pozorování *ordinální*, testuje hypotézu H_0 , že rozdělení v obou skupinách jsou shodná, proti alternativní hypotéze H_A , že jedno z rozdělení má sklon generovat větší hodnoty než druhé.
- Při přísnějších předpokladech (pozorování spojitá, rozdělení se mohou lišit jen v poloze), jej lze interpretovat jako test rovnosti mediánů.

Testová statistika U :

- Přímá metoda: porovnej každý prvek skupiny 1 s každým prvkem skupiny 2; každou výhru počítej jako 1, remízu jako 0.5 $\implies U_1$.
- Nepřímá metoda: Seřaď prvky obou skupin dohromady, každému prvku přiřaď pořadí r_i . R_1 je součet pořadí prvků ve skupině 1. $U_1 = n_1 n_2 + n_1(n_1 + 1)/2 - R_1$.
- Testujeme $U = \min(U_1, n_1 n_2 - U_1)$. Pro malé výběry spec. tabulky. Pro $n_1 > 20$ a $n_2 > 20$ lze použít normální aproximaci a testovat

$$T = \frac{U - M_U}{S_U}, \text{ kde } M_U = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

$$S_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

na $N(0, 1)$.



Test rovnosti středních hodnot ve více než 2 skupinách

Analýza rozptylu (Analysis of Variance, ANOVA):

- Máme několik (a) skupin dat, mají rozdělení $N(\mu_i, \sigma^2)$
- Testujeme $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$ prostřednictvím testu rovnosti 2 rozptylů.
- Pokud H_0 platí, máme 2 možnosti, jak odhadnout rozptyl σ^2 :

1. Z rozdělení výběrových průměrů: pro skupiny o stejné velikosti n

$$\begin{aligned} S_A^2 &= nS_{\bar{X}}^2 = n \frac{1}{a-1} \sum_{j=1}^a (\bar{X}_j - \bar{X})^2, \text{ což lze pro skupiny různých velikostí přepsat jako} \\ &= \frac{1}{a-1} \sum_{j=1}^a n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

2. Z rozptylů v jednotlivých skupinách (sdružený odhad σ^2 jako u dvouvýběrového t-testu):

$$S_E^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1,i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2,i} - \bar{X}_2)^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n_a} (X_{a,i} - \bar{X}_a)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_a - 1)}$$

- Pokud H_0 platí, odhadují obě náhodné veličiny totéž, a proto poměr $F = \frac{S_A^2}{S_E^2}$ by měl být roven přibližně 1.
- Pokud H_0 neplatí, S_A^2 roste, S_E^2 zůstává přibližně stejné.

Porovnání dvou normálních rozdělení

Alternativy

- MW U-test
- ANOVA
- Rozklad variability
- Tabulka ANOVA
- Příklad
- Předpoklady

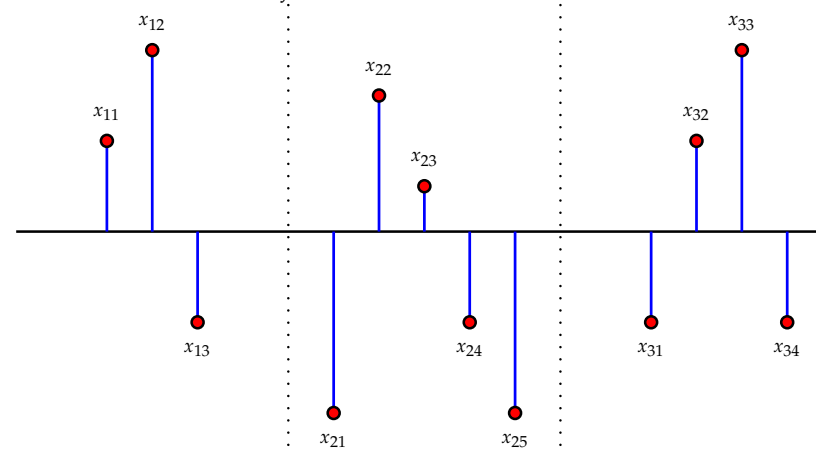
Rozklad variability

SS ... sum of squares, součet čtverců

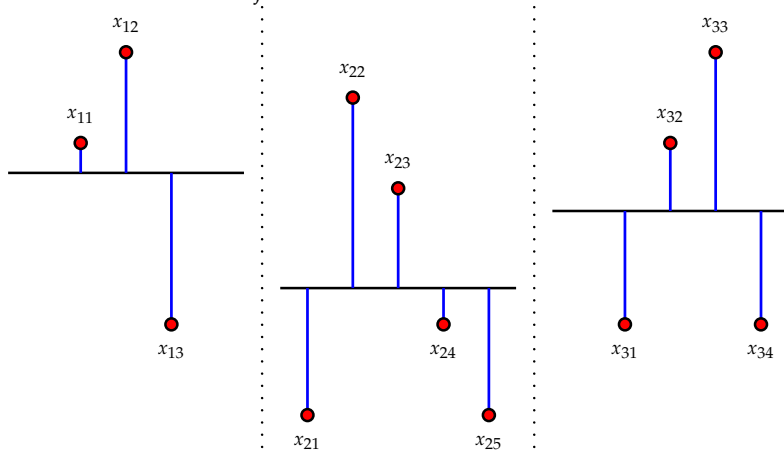
- Celková variabilita: SS_T
- Vnitroskup. (reziduální) variabilita: SS_E
- Meziskupinová variabilita: SS_A

$$SS_T = SS_A + SS_E$$

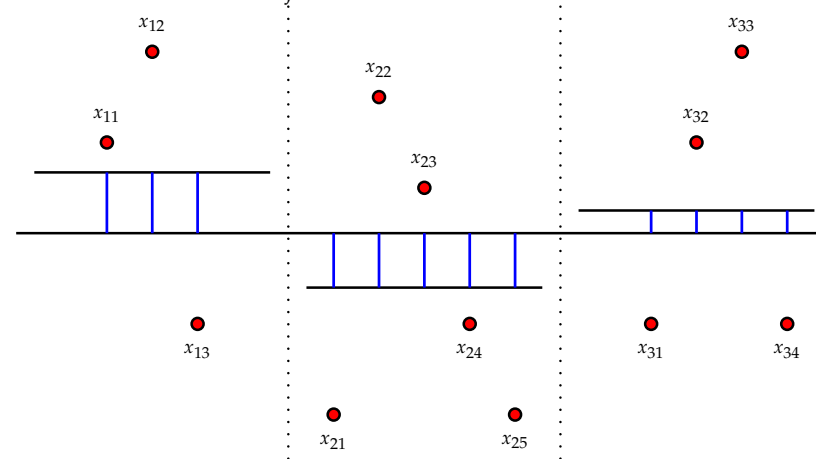
$$SS_T = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{n_j} (X_{j,i} - \bar{X})^2$$



$$SS_E = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{n_j} (X_{j,i} - \bar{X}_j)^2$$



$$SS_A = \sum_{j=1}^a n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2$$



Tabulka ANOVA

Typický výstup statistického softwaru:

- MS (Mean square): odhad rozptylu

Zdroj variability	Součet čtverců SS	Stupně volnosti d.f.	Průměrný čtverec $MS = \frac{SS}{d.f.}$	Poměr F
Faktor A	$SS_A = \sum_{j=1}^a n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2$	$a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$F = \frac{MS_A}{MS_E}$
Zbytek	$SS_E = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{n_j} (X_{j,i} - \bar{X}_j)^2$	$\sum_{j=1}^a (n_j - 1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{\sum(n_j-1)}$	
Celkem	$SS_T = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{n_j} (X_{j,i} - \bar{X})^2$	$\sum_{j=1}^a n_j - 1$		

- $MS_A = S_A^2$ a $MS_E = S_E^2$ jsou odhady populačního rozptylu.
- Pokud se průměry μ_i ve skupinách liší, MS_A roste, ale MS_E stále odhaduje společný rozptyl σ^2 .
- Testová statistika F má také význam

$$F = \frac{MS_A}{MS_E} = \frac{S_A^2}{S_E^2} = \frac{\text{vysvětlený rozptyl}}{\text{nevysvětlený rozptyl}} = \frac{\text{meziskupinový rozptyl}}{\text{vnitroskupinový rozptyl}}$$

a má Fisherovo rozdělení s $a - 1$ s.v. pro čitatel a s $\sum(n_j - 1)$ s.v. pro jmenovatel.



Příklad

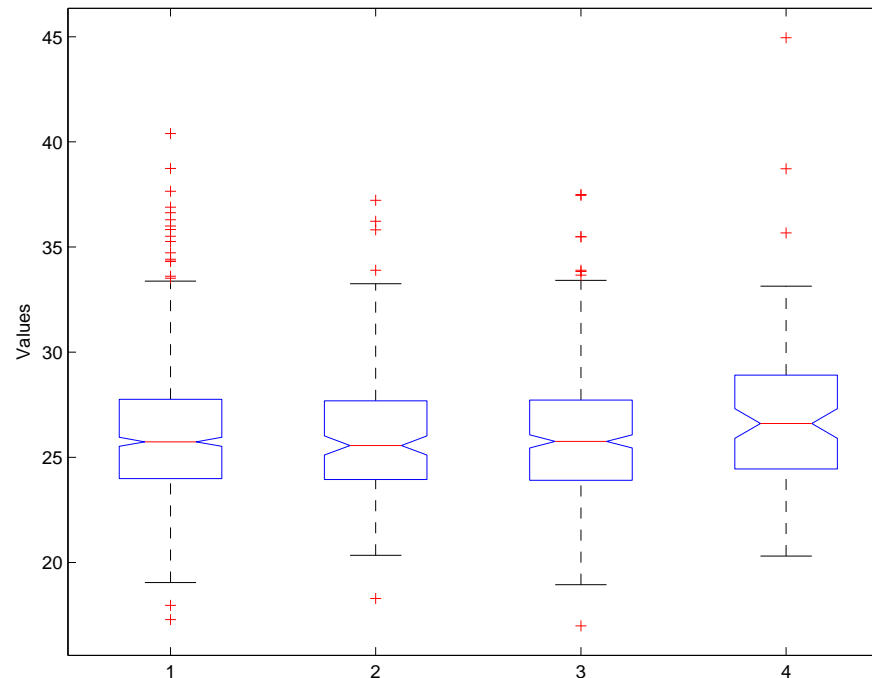
Zjistěte, zda se liší BMI pacientů pro různé druhy fyz. zátěže v zaměstnání (1: sedí, 2: stojí, 3: chodí, 4: nosí těžké předměty).

Porovnání dvou normálních rozdělení

Alternativy

- MW U-test
- ANOVA
- Rozklad variability
- Tabulka ANOVA
- **Příklad**
- Předpoklady

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	90.4050	3	30.1350	3.0906	0.0262
Error	1.3329e+004	1367	9.7507		
Total	1.3420e+004	1370			



Dosažená hladina významnosti (poslední sloupeček) $p = 2.62\%$.



Předpoklady

Porovnání dvou
normálních rozdělání

Alternativy

- MW U-test
- ANOVA
- Rozklad variability
- Tabulka ANOVA
- Příklad
- Předpoklady

- Nezávislost jednotlivých pozorování
- Nezávislost jednotlivých skupin
- Normální rozdělení sledované veličiny ve všech skupinách
(Kolmogorov-Smirnovův test, Shapiro-Wilkův test, χ^2 test dobré shody)
- Shoda rozptylů ve skupinách
(Bartlettův test, Levenův test, Hartleyův test)
- Při porušení posledních dvou předpokladů je možné použít neparametrickou, tzv. Kruskal-Wallisovu ANOVu.