

# Statistika a spolehlivost v lékařství

## Spolehlivost soustav

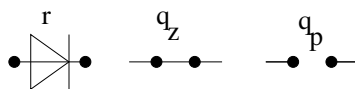
### 1 Soustavy s více-stavovými prvky

Některé prvky (např. relé, ventily) slouží jako spínače proudu/kapalin/plynu a mohou se porouchat buď v otevřeném nebo zavřeném stavu. Tyto dvě poruchy je vhodné rozlišovat, neboť mají vliv na celou soustavu. Používáme tři stavy:

- **bezporuchový** — prvek funguje. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme  $r$ .
- **porucha zkratem** — prvek se porouchal, když byl otevřený. Důsledek této poruchy je, že proud/kapalina/plyn může stále prvkem procházet. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme  $q_z$ .
- **porucha přerušením** — prvek se porouchal ve stavu, kdy byl zavřený. Takto porouchaný prvek tedy už nemůže sepnout. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme  $q_p$ .

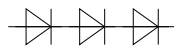
Tyto tři stavy se vylučují, tedy  $r + q_z + q_p = 1$ .

Velkými písmeny značíme pravděpodobnosti celých soustav, tedy  $R$  je pravděpodobnost, že je celá soustava bezporuchová,  $Q_z$  je pravděpodobnost, že se celá soustava chová jako zkrat a  $Q_p$  je pravděpodobnost, že je celá soustava přerušená. V následujících příkladech budeme třístavové prvky studovat na příkladu diod.



**Sériové zapojení třístavových prvků:** Stavy jednotlivých prvků určují i celkový stav soustavy. Ta se může nacházet ve stavu zkrat (tj. celá soustava se chová jako jeden vyzkratovaný prvek). V tomto stavu celá soustava vede trvale proud a nelze ji ovládat. Soustava se může také nacházet ve stavu přerušení. V takové případě soustavu nelze vést proud/kapalinu/plyn. Pokud soustava není ani ve stavu zkrat ani ve stavu přerušení tak říkáme, že soustava funguje.

Uvažujme soustavu se třemi stejnými prvky:



Soustava je přerušená, pokud alespoň jeden prvek je přerušený. Pravděpodobnost, že je soustava přerušená je

$$Q_p = 1 - (1 - q_p)^3.$$

Soustava je ve stavu zkrat, pokud všechny prvky jsou ve stavu zkrat. Pravděpodobnost, že celá soustava je ve stavu zkrat je

$$Q_z = q_z^3.$$

Soustava je funkční, pokud není prerušená. Zkraty některých prvků nevedí, stačí, aby v cestě byl vždy alespoň jeden funkční prvek. Mohou nastat různé kombinace zkratů prvků. Pro tři prvky je pravděpodobnost bezporuchového provozu  $R$ :

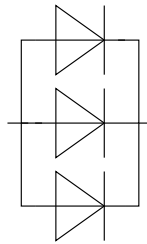
$$R = 3q_z r^2 + 3r^2 q_z + p^3.$$

Ověření:  $R + Q_z + Q_p = 1$ .

Pro obecný počet  $n$  sériově zapojených prvků stačí, aby alespoň jeden z nich byl dioda, a ostatní mohou být zkratované:

$$R = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} r^i q_z^{n-i}.$$

**Paralelní zapojení třístavových prvků.** Uvažujme obvod se třemi identickými prvky.



Paralelní soustava třístavových prvků je celá přerušená, pokud všechny prvky současně jsou přerušené. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$Q_p = q_p^3$$

Aby byla celá soustava ve stavu zkrat (tj. celou soustavu mohl trvalé téct proud), stačí, aby alespoň jeden prvek byl ve stavu zkrat. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$Q_z = 1 - (1 - q_z)^3$$

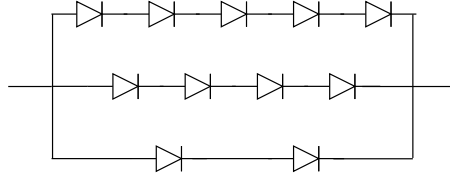
Celá soustava je funkční, pokud se chová jako dioda — tj. není ve stavu přerušeni nebo ve stavu zkratu. Přerušeni jednotlivých prvků nevedí, ale musí být zajištěno, že alespoň jeden prvek je funkční. Tedy:

$$R = r^3 + 3q_p r^2 + 3q_p^2 r$$

Pro  $n$  paralelně zapojených prvků stačí, aby alespoň jeden byl ve stavu dioda, ostatní mohou být přerušené:

$$R = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} r^i q_p^{n-i}$$

- **Příklad 1** Spočítejte pravděpodobnost, že se soustava diod na obrázku chová jako dioda, za předpokladu že pravděpodobnost přerušení jedné diody je  $q_p = 0.2$  a pravděpodobnost zkratu je  $q_z = 0.05$ .



**Řešení:**

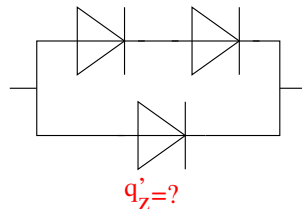
Budeme postupovat tak, že nejprve spočteme, že se celá soustava chová jako zkrat a jako přerušení. Paralelní soustava je přerušená tehdy, pokud jsou ve stavu přerušení všechny tři větve:

$$Q_p = (1 - (1 - q_p)^5) \cdot (1 - (1 - q_p)^4) \cdot (1 - (1 - q_p)^2) = 0.143$$

$$Q_z = q_z^5 + q_z^4 + q_z^2 - q_z^{5+4} - q_z^{4+2} - q_z^{5+2} + q_z^{11} = 2.5 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 1 - Q_p - Q_z = 0.8545$$

- **Příklad 2** Soustava na obrázku je složena ze dvou typů diod: diody v horní řadě mají parametry  $q_p = 0.01$ ,  $q_z = 0.2$ , spodní dioda má pravděpodobnost přerušení  $q'_p = 0.3$ . Vypočítejte, jaká musí být pravděpodobnost zkratu spodní diody  $q'_z$  tak, aby pravděpodobnost, že se celý obvod chová jako dioda byla  $R = 0.9$ .



**Řešení:**

Nejprve spočítáme horní větev:

$$Q_{p,horni} = 1 - (1 - q_p)^2 = 1 - (1 - 0.01)^2 = 0.0199$$

$$Q_{z,horni} = p_z^2 = 0.2^2 = 0.04.$$

Nyní určíme pravděpodobnost zkratu a přerušení paralelní kombinace:

$$Q_p = Q_{p,horni} \cdot q'_p = 0.0199 \cdot 0.3 = 0.00597$$

$$Q_z = 1 - (1 - Q_{z,horni})(1 - p'_z) = 1 - (1 - 0.04)(1 - q'_z) = 1 - 0.96(1 - q'_z)$$

Ze zadání víme, že  $R = 0.9$  a to je zároveň:  $R = 1 - Q_p - Q_z$ .

Dosadíme a najdeme hodnotu  $q'_z$

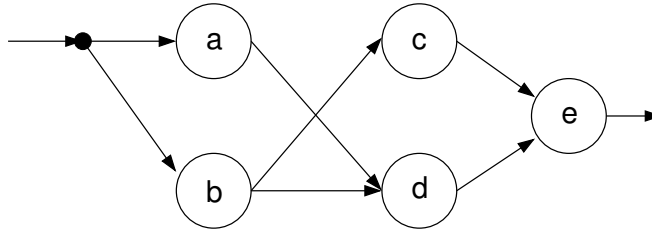
$$R = 1 - Q_p - Q_z = 1 - 0.00597 - (1 - 0.96(1 - q'_z))$$

Vyjde  $q'_z = 0.056$ .

## 2 Kombinované soustavy

► **Příklad 3 (Metoda seznamu)**

- a)  $P(a) = \frac{3}{4}$ ;  $P(b) = \frac{5}{6}$ ;  $P(c) = P(d) = \frac{2}{3}$ ;  $P(e) = \frac{7}{8}$ ;  $R = ?$   
 b)  $P(a) = P(b) = \dots = P(e) = p$ ;  $R = ?$



**Řešení:**

- |                            |                                  |                                   |
|----------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $a b c d e +$           | 5. $a \bar{b} c d e +$           | 9. $\bar{a} b c d e +$            |
| 2. $a b c \bar{d} e +$     | 6. $a \bar{b} c \bar{d} e$       | 10. $\bar{a} b c \bar{d} e +$     |
| 3. $a b \bar{c} d e +$     | 7. $a \bar{b} \bar{c} d e +$     | 11. $\bar{a} b \bar{c} d e +$     |
| 4. $a b \bar{c} \bar{d} e$ | 8. $a \bar{b} \bar{c} \bar{d} e$ | 12. $\bar{a} b \bar{c} \bar{d} e$ |

$$R = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) + P(A_9) + P(A_{10}) + P(A_{11})$$

vzájemně vylučující se jevy, pravděpodobnosti mohou sčítat

$$\begin{aligned}
 R &= P(A_1) + P(A_2) + \dots \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} + \dots \\
 &= 0,6563.
 \end{aligned}$$

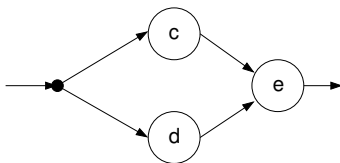
V případě, že jsou prvky stejné, je řešení:

$$R = p^5 + 4p^4(1-p) + 3p^3(1-p)^2 = p^5 + 4p^4 - 4p^5 + 3p^3 - 6p^4 + 3p^5 = -2p^4 + 3p^3 = p^3(3-2p).$$

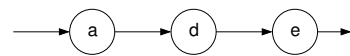
► **Příklad 4 (Metoda rozkladu)** zadání viz předchozí příklad, všechny prvky jsou stejné ( $P(a) = P(b) = \dots = P(e) = p$ ).

**Řešení:**

$$R = P(b) \cdot P(\text{soustava funguje}|b) + P(\bar{b}) \cdot P(\text{soustava funguje}|\bar{b})$$



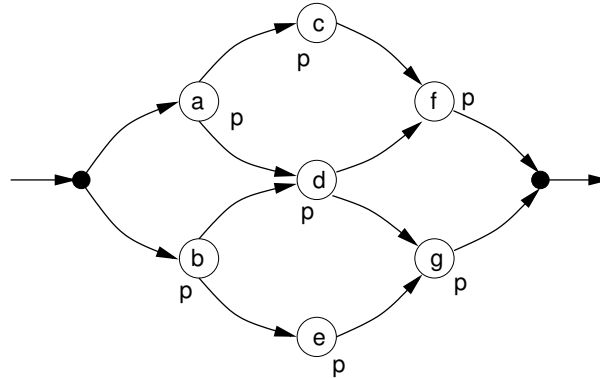
$P(\text{soustava funguje}|b)$



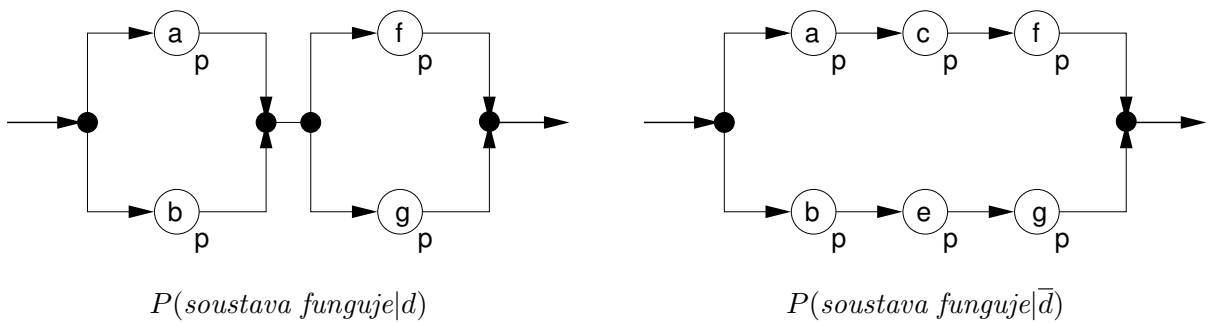
$P(\text{soustava funguje}|\bar{b})$

$$R = p \cdot (1 - (1 - p)^2) \cdot p + (1 - p) \cdot p^3 = 2p^3 - p^4 + p^3 - p^4 = p^3 \cdot (3 - 2p).$$

- **Příklad 5 (Kombinované soustavy - metoda rozkladu)**  $R = ?$



Řešení:

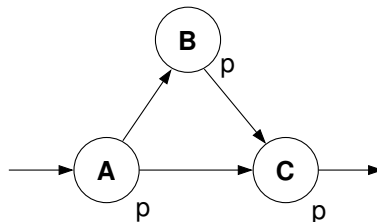


$P(\text{soustava funguje}|d)$

$P(\text{soustava funguje}|\bar{d})$

$$\begin{aligned} R &= P(d) \cdot P(\text{soustava}|d) + P(\bar{d}) \cdot P(\text{soustava}|\bar{d}) \\ &= p \cdot [1 - (1 - p^2)]^2 + (1 - p) \cdot [1 - (1 - p^3)]^2 \\ &= p \cdot (4p^2 - 4p^3 + p^4) + (1 - p) \cdot (2p^3 - p^6) \\ &= p^5 - 4p^4 + 4p^3 + p^7 - p^6 - 2p^4 - 2p^3 \\ &= p^7 - p^6 + p^5 - 6p^4 + 6p^3 \end{aligned}$$

- **Příklad 6 (Soustavy)**  $R = ?$



Řešení:

$$R = P(AC \cup ABC) = P(AC) + P(ABC) - P(ABC) = P(AC) = p^2$$