

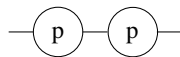
Statistika a spolehlivost v lékařství

Spolehlivost soustav

1 Spolehlivost soustav

Předpoklad: uvažujeme dvou-stavové prvky (tj. každý prvek je buď funkční, nebo v poruše). Obdobně předpokládáme, že celá soustava je buď funkční, nebo v poruše.

- **Příklad 1 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sériová soustava)** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p (prvky jsou stejné).



Řešení:

Pravděpodobnost poruchy jednoho prvku: $q = 1 - p$.

Pravděpodobnost bezporuchového provozu celé soustavy — oba prvky musí fungovat:

$$R = P(X_1 \cap X_2) = P(X_1|X_2) \cdot P(X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2) = p^2$$

Pravděpodobnost poruchy celé soustavy — alespoň jeden prvek je v poruše:

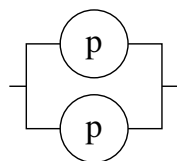
$$Q = 1 - R = P(\overline{X_1} \cup \overline{X_2}) = P(\overline{X_1}) + P(\overline{X_2}) - P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) = 2(1 - p) - (1 - p)^2 = 1 - p^2$$

Obecné vztahy R, Q , pro n stejných prvků:

$$R = p^n$$

$$Q = 1 - p^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (1 - p)^i$$

- **Příklad 2 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - paralelní soustava)** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p (prvky jsou stejné).



Soustava funguje, pokud alespoň jeden prvek funguje, tedy

$$R = P(X_1 \cup X_2) = 1 - Q = P(X_1) + P(X_2) - P(X_1 \cdot X_2) = 2p - p^2.$$

Naopak, soustava je v poruše, pokud všechny prvky jsou současně rozbité:

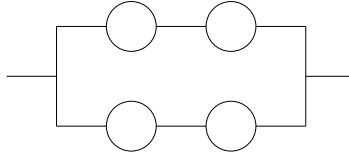
$$Q = P(\overline{X_1} \cap \overline{X_2}) = (1 - p)(1 - p) = 1 - 2p + p^2.$$

Obecné vztahy R , Q , pro n stejných prvků:

$$R = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} p^i$$

$$Q = (1 - p)^n$$

- **Příklad 3** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p (prvky jsou stejné).

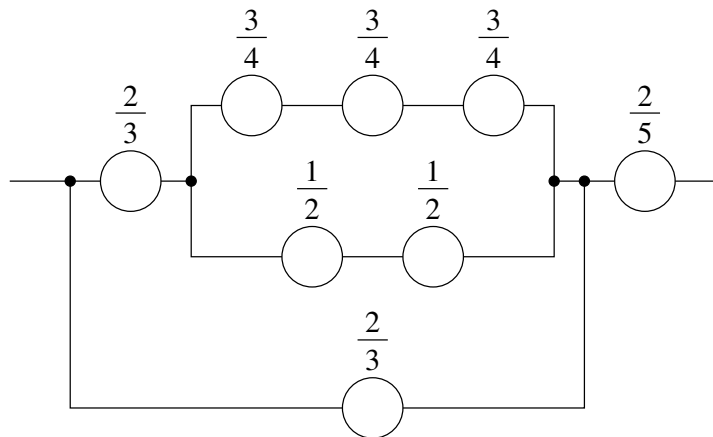


Řešení:

$$R = 2p^2 - p^4,$$

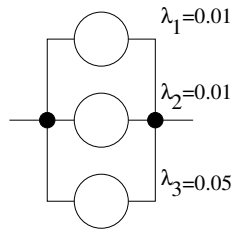
$$Q = (1 - p^2)(1 - p^2) = 1 - 2p^2 + p^4.$$

- **Příklad 4** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy.



Řešení:

$$R = \left\{ 1 - \left[1 - \left(1 - \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \right) \cdot \frac{2}{3} \right] \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \right) \right\} \cdot \frac{2}{5} = \frac{913}{2888} = 0,317.$$



Obrázek 1: Paralelní zapojení s třemi různými prvky

- **Příklad 5 (Paralelní soustava se třemi prvky)** Vypočítejte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy $R(50)$ na Obr. 1.

Řešení:

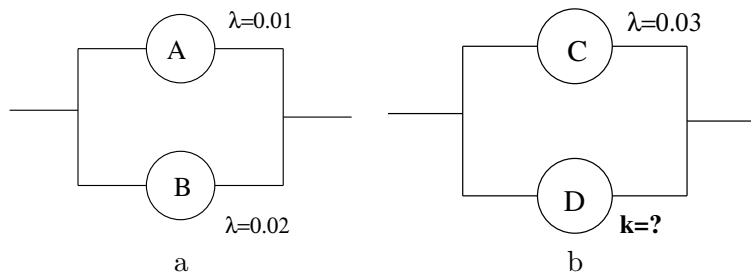
Je nutné si uvědomit že pravděpodobnost bezporuchového provozu je funkce času – budeme hledat pravděpodobnost v konkrétním čase $t = 50$. Dále je nutné si ujasnit, jakému rozdělení pravděpodobnosti podléhají prvky soustavy. Jejich intenzity jsou zadány jako konstanty a proto se jedná o exponenciální rozdělení poruch. Pro jednotlivé prvky v čase $t=50$ platí:

$$\begin{aligned} R_1(50) &= e^{-\lambda_1 \cdot 50} = e^{-0.5} = 0.607, \\ R_2(50) &= R_1(50) = e^{-0.5} = 0.607, \\ R_3(50) &= e^{-\lambda_3 \cdot 50} = e^{-2.5} = 0.082. \end{aligned}$$

Pro soustavu potom bude platit

$$R(50) = 1 - [(1 - R_1(50))(1 - R_2(50))(1 - R_3(50))] = 1 - [0.393 \cdot 0.393 \cdot 0.918] = 0.858.$$

- **Příklad 6 (Paralelní soustava se třemi prvky)** Uvažujme obvody na obr.2. Prvky, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení, jsou označeny parametrem λ . Spodní prvek na obr.2 vykazuje poruchy podléhající Rayleighovu rozdělení s parametrem k . Určete tento parametr tak, aby pravděpodobnost bezporuchového provozu obou soustav byla v čase $t = 10$ s stejná.



Obrázek 2:

Řešení:

Nejprve si spočítáme pravděpodobnost bezporuchového provozu jednotlivých prvků:

$$\begin{aligned} R_A(t) &= e^{-\lambda_A t} \rightarrow R_A(10) = e^{-0.01 \cdot 10} = 0.904 \\ R_B(t) &= e^{-\lambda_B t} \rightarrow R_B(10) = e^{-0.02 \cdot 10} = 0.818 \\ R_C(t) &= e^{-\lambda_C t} \rightarrow R_C(10) = e^{-0.03 \cdot 10} = 0.740 \\ R_D(t) &= e^{-\frac{kt^2}{2}} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu levé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_1(10) = R_A(10) + R_B(10) - R_A(10)R_B(10) = 0.904 + 0.818 - 0.904 \cdot 0.818 = 0.983$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu pravé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_2(10) = R_C(10) + R_D(10) - R_C(10)R_D(10) = 0.740 + R_D(10) - 0.740R_D(10)$$

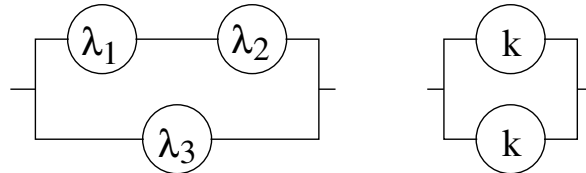
Určíme $R_D(10)$:

$$R_D(10) = \frac{R_2(10) - R_C(10)}{1 - R_C(10)} = \frac{0.983 - 0.740}{1 - 0.740} = 0.934.$$

Ted' můžeme vypočítat hodnotu k :

$$R_D(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}} \rightarrow k = \frac{-2 \ln R_D(t)}{t^2} = \frac{-2 \ln 0.934}{10^2} = 0.00136.$$

- **Příklad 7** První obvod na obrázku je složen z prvků, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení poruch s parametry $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.02$, $\lambda_3 = 0.03$. Druhý obvod je složen ze dvou prvků, jejichž poruchy lze popsat Rayleighovým rozdělením s parametrem k . Určete k tak, aby pravděpodobnost bezporuchového provozu obou soustav v čase $t = 10$ byla stejná.



Řešení:

Nejprve určíte spolehlivost levého obvodu:

$$R_{left}(t) = R_1(t)R_2(t) + R_3(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)$$

a dosadíme

$$R_1(t) = e^{-\lambda_1 t} \rightarrow R_1(10) = e^{-0.01 \cdot 10} = 0.905$$

$$R_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \rightarrow R_2(10) = e^{-0.02 \cdot 10} = 0.818$$

$$R_3(t) = e^{-\lambda_3 t} \rightarrow R_3(10) = e^{-0.03 \cdot 10} = 0.741$$

Pravděpodobnost bezporuchového obvodu vlevo je v čase 10:

$$R_{left}(10) = 0.905 \cdot 0.818 + 0.741 - 0.905 \cdot 0.818 \cdot 0.741 = 0.932$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy vpravo (spolehlivost prvků označíme $R_k(t)$) je obecně:

$$R_{right}(t) = R_k(t) + R_k(t) - R_k^2(t) = 2R_k(t) - R_k^2(t)$$

a jelikož má platit $R_{left}(10) = R_{right}(10)$, tak

$$0.932 = 2R_k(10) - R_k^2(10)$$

Dostáváme tedy jednoduchou rovnici s neznámou proměnnou $R_k(10)$:

$$R_k^2(10) - 2R_k(10) + 0.932 = 0$$

která má dva kořeny: 0.739 a 1.26. Správné řešení je 0.739, neboť $R_k(10)$ je pravděpodobnost bezporuchového provozu, tj. číslo v intervalu $< 0, 1 >$. Tato pravděpodobnost je popsána Rayleighovým rozdělením, tedy $R_k(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}$. Odtud:

$$0.739 = R_k(10)$$

$$0.739 = e^{-\frac{k10^2}{2}}$$

a tedy

$$k = \frac{-2 \ln 0.739}{10^2} = 0.00605.$$

2 Soustava m z n

Mějme soustavu s n prvky, přičemž alespoň m z nich musí správně pracovat, aby celá soustava byla funkční. Pokud jsou prvky shodné a nezávislé, pak lze spolehlivost soustavy popsat binomickým rozdělením.

Pravděpodobnost bezporuchového stavu právě m prvků z n je

$$f(m, n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

- **Příklad 8** Jaká je pravděpodobnost bezporuchového stavu nejméně m prvků z n ?

Řešení:

$$R = \sum_{k=m}^n f(k, n, p) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- **Příklad 9** Pro kterou soustavu platí, že $m = 1$?

Řešení:

Paralelní soustava

- **Příklad 10** Pro kterou soustavu platí, že $m = n$?

Řešení:

Sériová soustava

- **Příklad 11 (Ocelové lano - soustava m z n)** Ocelové lano má 4 vlákna, správná funkčnost je zajištěná pokud nejsou přetržena alespoň dvě vlákna. $n = 4$; $m = 2$; Pravděpodobnost nepřetržení jednoho vlákna je $p = 0.9$; $R = ?$

Řešení:

$$R = \binom{4}{2} 0,9^2 \cdot 0,1^2 + \binom{4}{3} 0,9^3 \cdot 0,1 + \binom{4}{4} 0,9^4 = 0,9963.$$