Opakování základů teorie pravděpodobnosti

Petr Pošík

Části dokumentu jsou převzaty (i doslovně) z
Mirko Navara: Pravděpodobnost a matematická statistika,
`https://cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33ssl/pms_print.pdf`
s laskavým svolením autora.

Motivace

- Běžný život: *Štěstí. Náhoda. Nejistota. Risk. Pochybnost. Šance.* Vágní termíny.
- **Teorie pravděpodobnosti** je matematický rámec pro popis a vyčíslení nejistoty a náhody.
- Aplikace:
  1. *Statistika:* Pst je základem a jazykem pro statistiku, tj. pro využití pozorovaných dat k poznávání světa.
  2. *Fyzika:* Pstní popis už těch nejzákladnějších úrovní přírody v kvantové fyzice. Statistická mechanika.
  3. *Biologie:* Popisu a modelování dědičnosti genů i náhodných mutací v genetice.
  4. *Medicína:* Randomizované klinické studie.
  5. *Počítačové vědy:* Studium výkonnosti algoritmů. Základ mnoha metod ve strojovém učení a umělé inteligenci. Pstní a stochastické algoritmy dělají při svém běhu náhodná rozhodnutí; v mnoha aplikacích jsou jednodušší/efektivnější než deterministické algoritmy.
  6. *Meteorologie:* Předpovědi počasí jsou (nebo by měly být) počítány a vyjádřeny pomocí pravděpodobnosti.
  7. *Hazardní hry, sázky:* Motivace pro vznik pravděpodobnosti.
  8. *Finance:* Modelování cen akcií a komodit v čase, určování "férových" cen peněžních nástrojů.
  9. *Politické vědy:* Předpovědi výsledků voleb, simulace chování voličů.
  10. ...

Pokus, jev

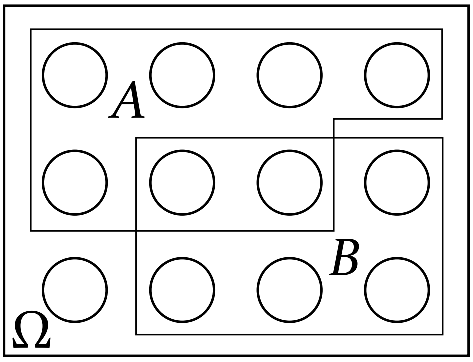
Pokus (experiment):

- Vágně: provedení pozorování nějaké vlastnosti světa.
- V psti: procedura, kterou lze nekonečně opakovat za stejných podmínek a která má dobře definovanou množinu možných výsledků.
- **Náhodný pokus** má více než jeden možný výsledek (**deterministický pokus** má pouze jeden).
- Před provedením náhodného pokusu nevíme, který výsledek nastane. Po provedení tato neurčitost zmizí.

Elementární jevy jsou všechny možné *vzájemně se vylučující výsledky* nějakého experimentu. Jejich množinu označme Ω.

Jev je podmnožina množiny elementárních jevů, $A \subseteq \Omega$.

- Říkáme, že nastal jev A, je-li skutečný výsledek experimentu v množině A.
- Jev je jakýkoli výrok o výsledku experimentu, u něhož lze vždy rozhodnout, zda platí nebo ne (jev nastal nebo nenastal).
- K popisu jevů lze ekvivalentně používat výroky a výrokové operace nebo jim příslušné množiny elementárních jevů a množinové operace. Budeme používat množiny.



Jevy a kombinace

Významné jevy:

- **Jev jistý:** Ω, **1**
- **Jev nemožný:** $\emptyset$, **0**

Kombinace jevů:

- **Konjunkce jevů („and"):** $A \cap B$
- **Disjunkce jevů („or"):** $A \cup B$
- **Jev opačný** k A: $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- **Jevy neslučitelné**: $A_1, \ldots, A_n : \bigcap_{i \le n} A_i = \emptyset$
- **Jevy po dvou neslučitelné** (=**vzájemně se vylučující**): $A_1, \ldots, A_n : \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

Úplný systém jevů tvoří jevy B_i, $i \in I$, jestliže jsou po dvou neslučitelné a $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$.

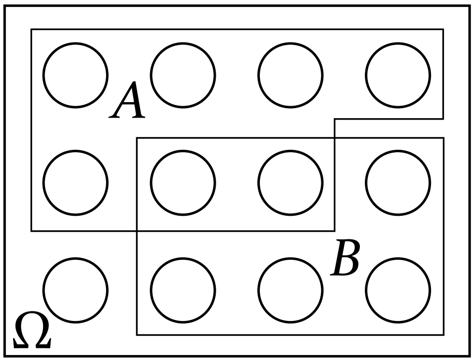
- Množina elementárních jevů Ω je úplným systémem jevů z definice.
- Úplný systém 2 jevů $\{C, \bar{C}\}$: $C \cup \bar{C} = \Omega$.

Definice pravděpodobnosti

Klasická **Laplaceova definice pravděpodobnosti**:

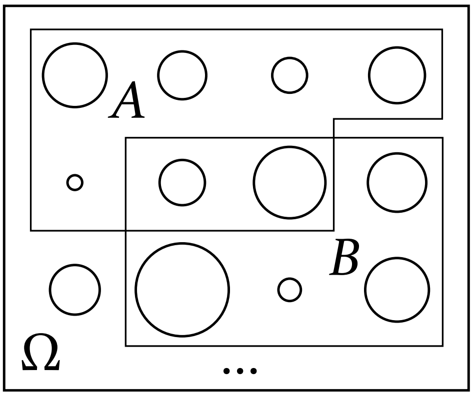
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Platí jen pro n *stejně možných* elementárních jevů. (Stejně možných?)
- Nedovoluje nekonečné množiny jevů, geometrickou pravděpodobnost, ...
- Nedovoluje iracionální hodnoty pravděpodobnosti.



Kolmogorovova definice pravděpodobnosti:

- Množina elementárních jevů Ω může být nekonečná a el. jevy nemusí být stejně pravděpodobné.
- Axiomatická: sestavíme seznam pravidel, jak se má pst chovat, a pak najdeme funkci, která tyto požadavky splňuje (viz další slidy).



Pravděpodobnost

Jevové pole $\mathcal{A}$: jevy jsou podmnožiny množiny Ω, ale *ne nutně všechny*; tvoří podmnožinu $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$:

- (2^{Ω} je potenční množina, powerset, množina všech podmnožin množiny Ω.)
- Chceme být schopni definovat pravděpodobnost pro jakoukoli konjunkci a disjunkci jevů z $\mathcal{A}$; **jevové pole $\mathcal{A}$** proto nemůže být jakékoli, musí to být **σ-algebra**, tj. musí splňovat podmínky:
  1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$.
  3. $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. (Uzavřenost na *spočetná* sjednocení.)
- **Borelova σ-algebra** je nejmenší σ-algebra podmnožin $\mathbb{R}$, která obsahuje všechny intervaly.

Pravděpodobnost (=pravděpodobnostní míra) je funkce $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$ splňující podmínky (axiomy)

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$,
   pokud jsou množiny (=jevy) $A_n, n \in \mathbb{N}$, po dvou neslučitelné (*spočetná aditivita*).

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin množiny Ω a $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$ je pravděpodobnost.

Interpretace pravděpodobnosti

Frekventistická:

- Relativní četnost výskytu jevu při mnoha opakováních náhodného pokusu.

Bayesovská:

- Stupeň důvěry v to, že jev nastane.
- To nám umožňuje přiřadit pst hypotézám typu “kandidát A vyhraje volby” nebo “obžalovaný X je vinen”, ačkoli není možné opakovat stejné volby nebo stejný zločin znovu a znovu.

Vlastnosti pravděpodobnosti

Vlastnosti jakékoli funkce splňující axiomy pravděpodobnosti:

- $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$
- $P(\mathbf{0}) = 0, \qquad P(\mathbf{1}) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (*aditivita*)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Poznámka: Je-li $\{B_1, \ldots, B_n\}$ *úplný systém jevů*, pak

- $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$ a
- pro libovolný jev A platí

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \,.$$

Speciálně pro $\{C, \bar{C}\}$:

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \bar{C}) \,.$$

Nezávislé jevy

Definice: Jevy A a B jsou **nezávislé**, pokud platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A, B nezávislé, pak

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- jsou nezávislé taky dvojice $A, \bar{B}$ a $\bar{A}, B$ a $\bar{A}, \bar{B}$.

Jevy $A_1, \ldots, A_n$ se nazývají **po dvou nezávislé**, jestliže každé dva z nich jsou nezávislé.

Množina jevů $\mathcal{M}$ se nazývá **nezávislá**, jestliže

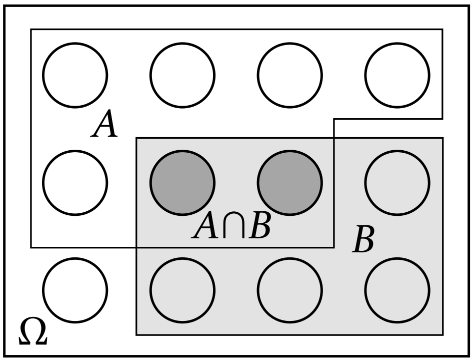
$$P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{K}} A\right) = \prod_{A \in \mathcal{K}} P(A)$$

pro všechny konečné podmnožiny $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$.

Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B je definována jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0.$$



- $P(A)$ známe z pstního popisu systému. Dostaneme-li navíc informaci o tom, že nastal jev B, podmíněná pst $P(A|B)$ je naše aktualizovaná znalost o psti jevu A.
- Všechny psti jsou vlastně podmíněné: $P(A) = P(A|\Omega)$.
- Pro jakýkoli jev A platí: $P(A|A) = 1$, $P(\bar{A}|A) = 0$.
- Podm. pst je stále pravděpodobnost; je to funkce $P(.|B) : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$.

Vlastnosti:

- $P(\Omega|B) = 1$, $P(\emptyset|B) = 0$.
- $B \subseteq A \Rightarrow P(A|B) = 1$.
- $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A|B) = 0$.
- Pokud se jevy $A_1, \ldots, A_n$ vzájemně vylučují, pak $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,|B\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n|B)$.
- Je-li $P(A|B)$ definována, jsou **jevy A, B nezávislé** právě tehdy, když $P(A|B) = P(A)$.

Bayesova věta

Věta o úplné pravděpodobnosti: Je-li $B_i, i \in I$, (spočetný) úplný systém jevů a $\forall i \in I : P(B_i) \neq 0$, pak pro každý jev A platí

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Platí:

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Bayesova věta: Je-li $B_i, i \in I$, (spočetný) úplný systém jevů a $\forall i \in I : P(B_i) \neq 0$, pak pro každý jev A, $P(A) \neq 0$, platí

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j\in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}.$$

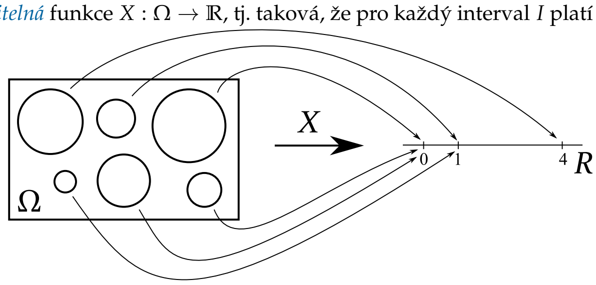
Význam: Pravděpodobnosti $P(A|B_i)$ odhadneme z pokusů nebo modelu, pomocí nich určíme pravděpdobnosti $P(B_i|A)$, které slouží k „optimálnímu" odhadu, který z jevů B_i nastal.

Problém: Ke stanovení **aposteriorních pravděpodobností $P(B_i|A)$** potřebujeme znát **apriorní pravděpodobnosti $P(B_i)$**.

Náhodná veličina

Náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je *měřitelná* funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$, tj. taková, že pro každý interval I platí

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}.$$



Rozdělení náhodné veličiny je popsáno praděpodobnostmi

$$P_X(I) = P[X \in I] = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\})$$

definovanými pro lib. interval I. Funkce P_X je **pravděpodobnostní míra** na Borelově σ-algebře a splňuje

- $P_X(\mathbb{R}) = 1$, $P_X(\emptyset) = 0$,
- $P_X(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_X(I_n)$, pokud jsou množiny $I_n, n \in \mathbb{N}$, navzájem disjunktní,
- $P_X(\mathbb{R} \setminus I) = 1 - P_X(I)$,
- jestliže $I \subseteq J$, pak $P_X(I) \leq P_X(J)$ a $P_X(J \setminus I) = P_X(J) - P_X(I)$.

Distribuční funkce

Distribuční funkce (cumulative distribution function, CDF) náhodné veličiny X je funkce $F_X : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná jako

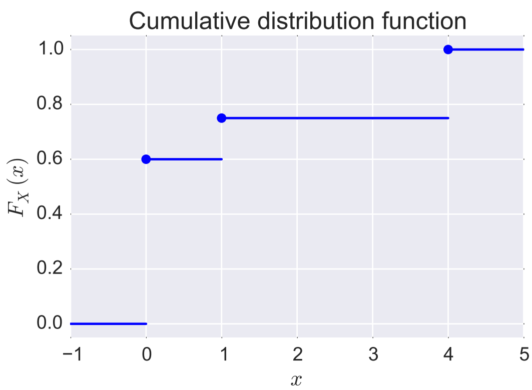
$$F_X(t) = P[X \in (-\infty, t)] = P[X \leq t] = P_X((-\infty, t\rangle).$$

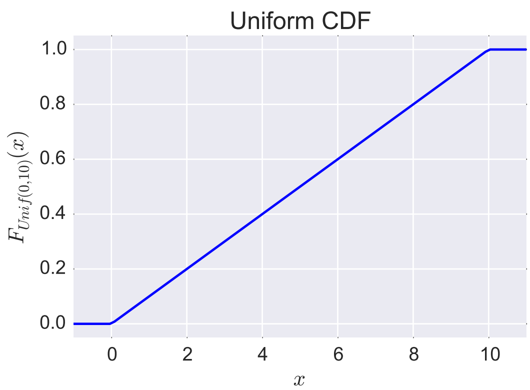
Distribuční funkce je

- neklesající,
- zprava spojitá,
- $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.

Diskrétní náhodná veličina má *po částech konstantní distribuční funkci*.
Spojitá náhodná veličina má *spojitou distribuční funkci*.

Příklady:





Nezávislost náhodných veličin

Náh. veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou **nezávislé**, pokud pro libovolné intervaly $I_1, \ldots, I_n$ platí

$$P[X_1 \in I_1, \ldots, X_n \in I_n] = P[X_1 \in I_1] \cdot \ldots \cdot P[X_n \in I_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in I_i].$$

Ekvivalentně stačí pro všechna $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ požadovat

$$P[X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \le t_i],$$

takže pro sdruženou distribuční funkci *nezávislých* náhodných veličin musí platit

$$F_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i).$$

Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou **po dvou nezávislé**, pokud jsou každé dvě z nich nezávislé. To je slabší podmínka než **nezávislost všech veličin** $X_1, \ldots, X_n$.

Diskrétní náhodná veličina

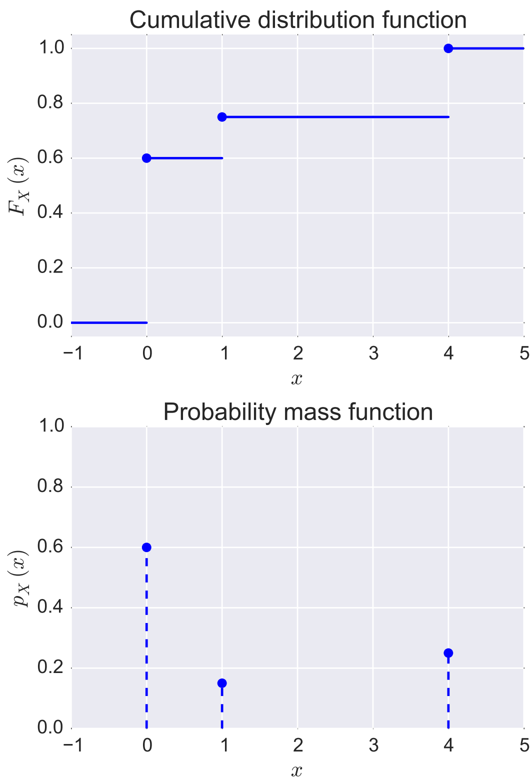
Diskrétní náhodná veličina má *po částech konstantní distribuční funkci*.

- Existuje pro ně nejvýše spočetná množina O_X taková, že $P[X \notin O_X] = P_X(\mathbb{R} \setminus O_X) = 0$. Nejmenší taková množina (pokud existuje) je $\Omega_X = \{t \in \mathbb{R} : P_X(\{t\}) \neq 0\} = \{t \in \mathbb{R} : P[X = t] \neq 0\}$.
- Popisuje ji **pravděpodobnostní funkce (probability mass function, PMF)** $p_X(t) = P_X(\{t\}) = P[X = t]$, která nabývá nenulových hodnot na nejvýše spočetné množině Ω_X a která splňuje

$$\sum_{t \in \mathbb{R}} p_X(t) = \sum_{t \in \Omega_X} p_X(t) = 1.$$

- Vztah mezi F_X a p_X:

$$F_X(x) = \sum_{t \in \Omega_x : t <= x} p_X(t).$$



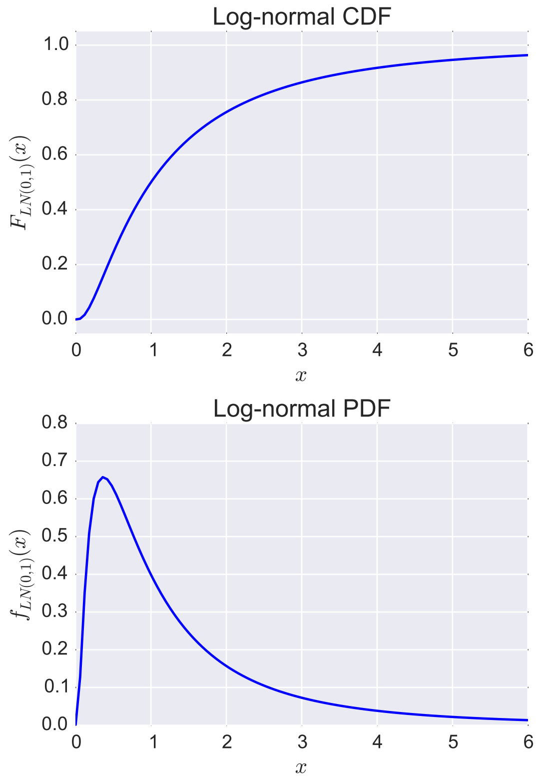
Spojitá náhodná veličina

Spojitá náhodná veličina má *spojitou distribuční funkci*.

Absolutně spojité náhodné veličiny jsou ty, které mají **hustotu pravděpodobnosti (probability density function, PDF)**, což je nezáporná funkce $f_X : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$ taková, že

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)du.$$

- Hustota splňuje $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$.
- Není určena jednoznačně, lze volit $f_X(t) = \frac{\mathrm{d}F_X(t)}{\mathrm{d}t}$, pokud existuje.
- $P_X(\{t\}) = 0$ pro všechna t.
- Pokud má n.v. X fyzikální rozměr (jednotky), mají fyzikální rozměr i hodnoty hustoty.



Kvantilová funkce

Distribuční funkce $F_X(t)$ říká, jak velká část populace má hodnotu proměnné X menší nebo rovnu určitému limitu t (např. kolik procent studentů FEL má vážený průměr 1.5 nebo lepší).

Obráceně se lze ptát, jaká hodnota náhodné veličiny odpovídá určité části populace (např. jaký vážený průměr je třeba, aby se student dostal mezi 5 % nejlepších). Pro určité $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ tak hledáme takové t, pro které $F_X(t) = \alpha$. Protože ale distribuční funkce může být na nějakém intervalu konstantní, nemusí být hledané t jediné, mohou tvořit omezený interval. Proto:

Kvantilová funkce $q_X : (0, 1) \to \mathbb{R}$ je definována jako

$$q_X(\alpha) = \frac{1}{2}(\sup\{t \in \mathbb{R} : P[X < t] \le \alpha\} + \inf\{t \in \mathbb{R} : P[X \le t] \ge \alpha\})$$

- Číslo $q_X(\alpha)$ se nazývá **α-kvantil** náhodné veličiny X.
- **Medián** náhodné veličiny je $q_X(0.5)$.
- **Dolní**, $q_X(0.25)$, a **horní kvartil**, $q_X(0.75)$, dále **decily**, **centily** neboli **percentily**, . . .
- q_X je neklesající.
- F_X a q_X jsou navzájem inverzní tam, kde jsou spojité a rostoucí.

Střední hodnota

Střední hodnota náhodné proměnné X se značí $\mathrm{E}\,X$ nebo μ_X a je definována zvlášť pro

- *diskrétní* náhodnou veličinu X:

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \Omega_X} t \cdot p_X(t),$$

- *spojitou* náhodnou veličinu Y:

$$\mathrm{E}\,Y = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Y(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Pro oba případy platí vzorec využívající kvantilovou funkci

$$\mathrm{E}\,Z = \int_0^1 q_Z(\alpha)\,\mathrm{d}\,\alpha.$$

Vlastnosti:

- $\mathrm{E}\,r = r$, $\mathrm{E}(\mathrm{E}\,X) = \mathrm{E}\,X$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y$, $\mathrm{E}(X+r) = \mathrm{E}\,X + r$, $\mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}\,X - \mathrm{E}\,Y$
- $\mathrm{E}(rX+sY) = r\,\mathrm{E}\,X + s\,\mathrm{E}\,Y$
- Pouze pro *nezávislé* veličiny: $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y$.

Rozptyl (disperze)

Rozptyl náhodné proměnné X se značí $\mathrm{D}\,X$, σ_X^2, var X, nebo $Var(X)$ a je definován jako

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,X)^2\right) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}\,X)^2,$$

$$\mathrm{E}(X^2) = (\mathrm{E}\,X)^2 + \mathrm{D}\,X,$$

nebo také

$$\mathrm{D}\,X = \int_0^1 (q_X(\alpha) - \mathrm{E}\,X)^2\,\mathrm{d}\,\alpha.$$

Vlastnosti:

- $\mathrm{D}\,X \geq 0$
- $\mathrm{D}\,r = 0$
- $\mathrm{D}(X+r) = \mathrm{D}\,X$
- $\mathrm{D}(rX) = r^2\,\mathrm{D}\,X$
- Pouze pro *nezávislé* veličiny: $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}\,X + \mathrm{D}(Y)$, $\mathrm{D}(X-Y) = \mathrm{D}\,X + \mathrm{D}(Y)$.

Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka náhodné proměnné X se značí σ_X, je definována jako

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}\,X} = \sqrt{\mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,X)^2\right)}$$

a *má stejný fyzikální rozměr* jako původní náhodná veličina (na rozdíl od rozptylu).

Vlastnosti:

- $\sigma_X \geq 0$
- $\sigma_r = 0$
- $\sigma_{X+r} = \sigma_X$
- $\sigma_{rX} = |r|\sigma_X$
- Pouze pro *nezávislé* náhodné veličiny: $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\mathrm{D}\,X + \mathrm{D}\,Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

Normovaná náhodná veličina

Normovaná náhodná veličina je taková, která má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl:

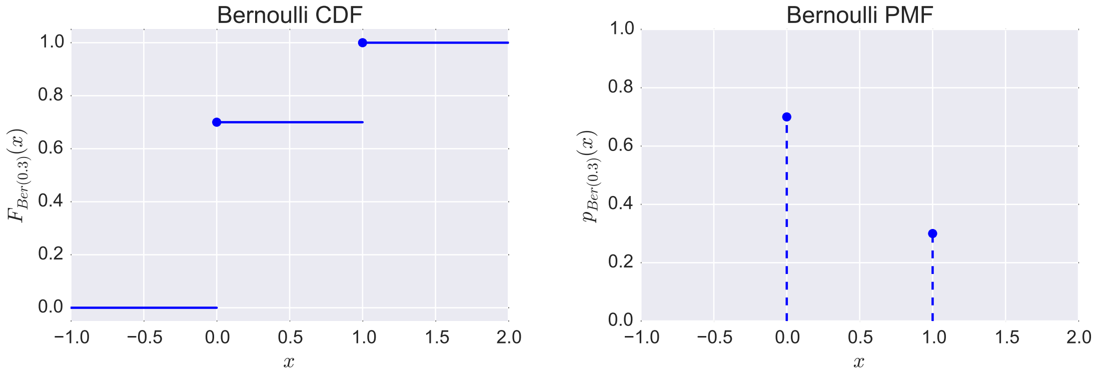
$$\operatorname{norm} X = \frac{X - \mathrm{E}\,X}{\sigma_X},$$

má-li vzorec smysl. Zpětná transformace je

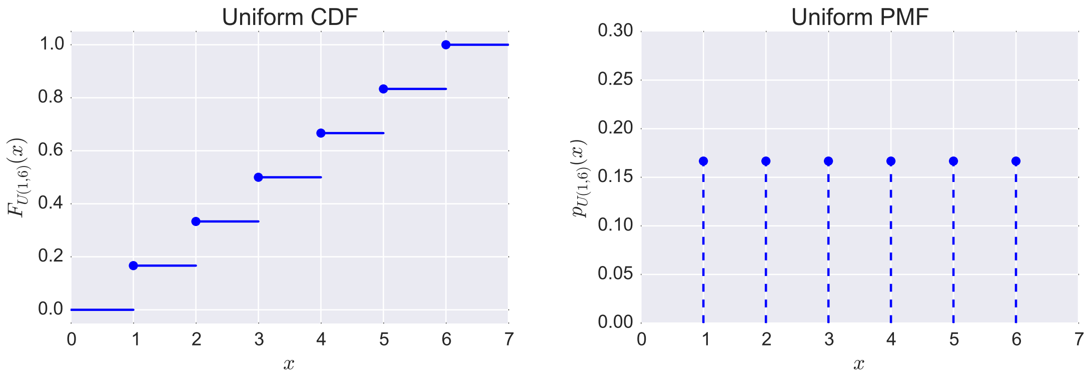
$$X = \mathrm{E}\,X + \sigma_X \operatorname{norm} X.$$

Diskrétní rozdělení

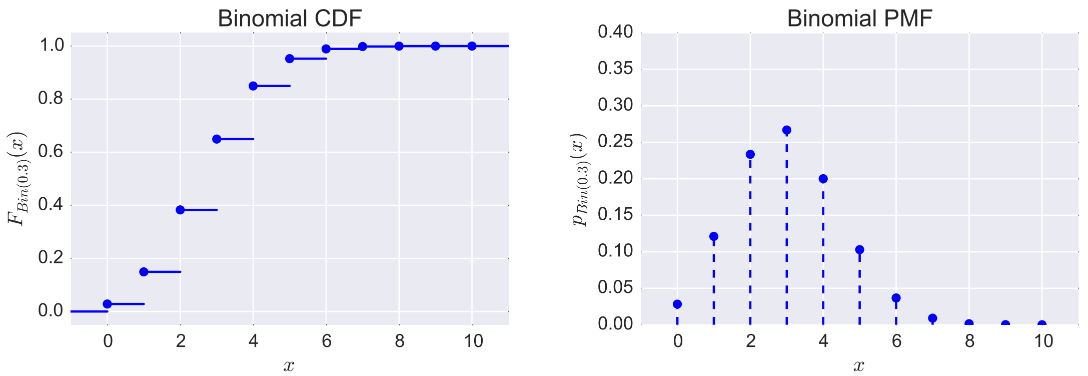
- **Diracovo:** jediný možný výsledek $r \in \mathbb{R}$.
- **Alternativní (Bernoulliho):** dva možné výsledky (obvykle označené 0 a 1), jeden z nich (1) má pravděpodobnost q.



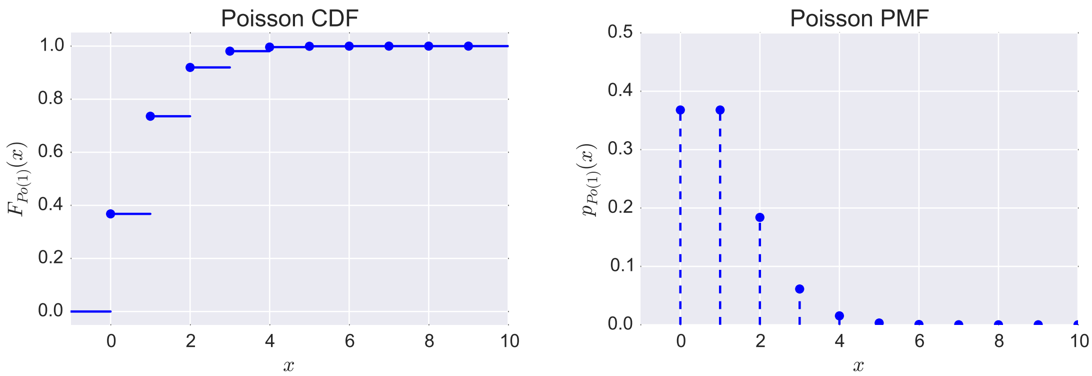
- **Rovnoměrné:** m možných, stejně pravděpodobných výsledků.



- **Binomické:** počet úspěchů z m nezávislých pokusů, je-li v každém stejná pravděpodobnost úspěchu $q \in \langle 0, 1 \rangle$. Součet m nezávislých alternativních rozdělení.



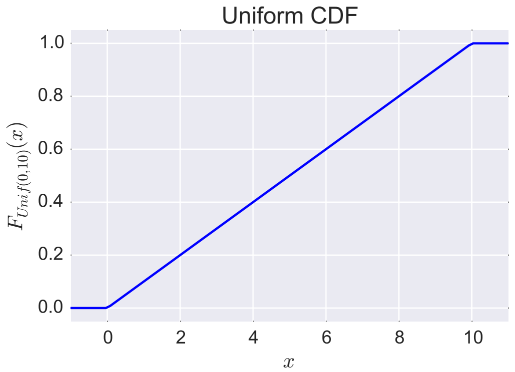
- **Poissonovo:** limitní případ binomického rozdělení pro $m \to \infty$ při konstantním $mq = \lambda > 0$ (tedy $q \to 0$).

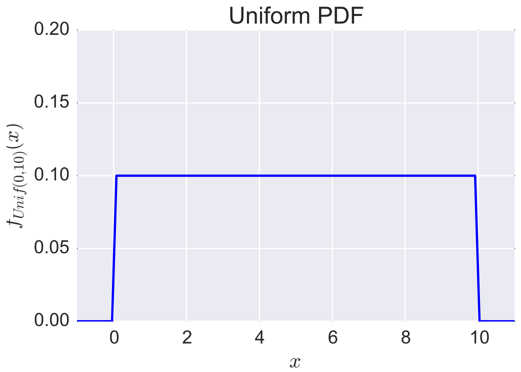


- **Geometrické:** počet úspěchů do prvního neúspěchu, je-li v každém pokusu stejná pravděpodobnost úspěchu $q \in (0, 1)$.
- **Hypergeometrické:** Počet výskytů v m vzorcích vybraných z M objektů, v nichž je celkem K výskytů ($1 \leq m \leq K \leq M$).
- …

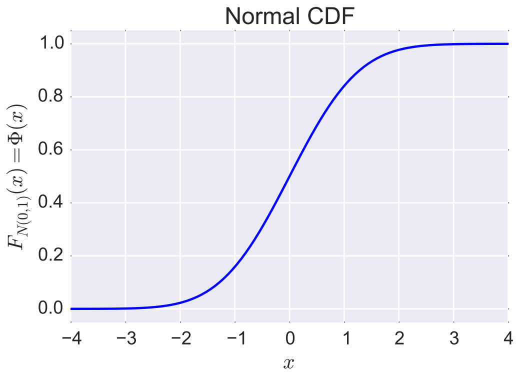
Spojitá rozdělení

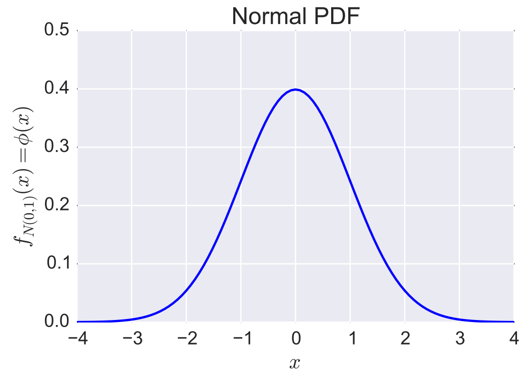
- **Rovnoměrné** $R(a,b)$**:** p_X je konstantní na intervalu $\langle a,b\rangle$. Hustota $f_{R(a,b)}$, distribuční funkce $F_{R(a,b)}$.



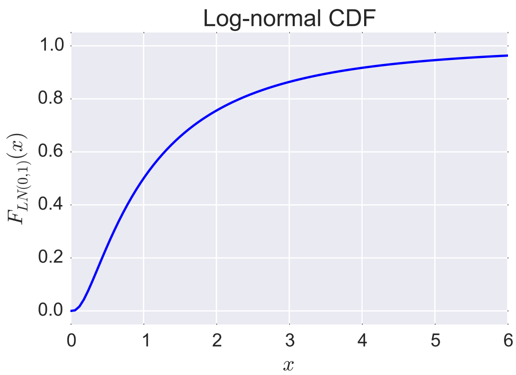


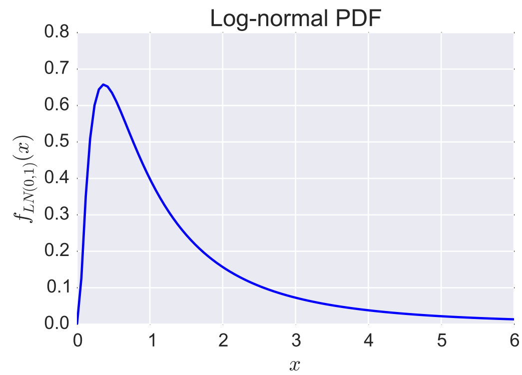
- **Normální (Gaussovo)**
  - **normované** $\mathrm{N}(0,1)$**:** hustota ϕ, distribuční funkce Φ.
  - **obecné** $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$**:** hustota $f_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}$, distribuční funkce $F_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}$.



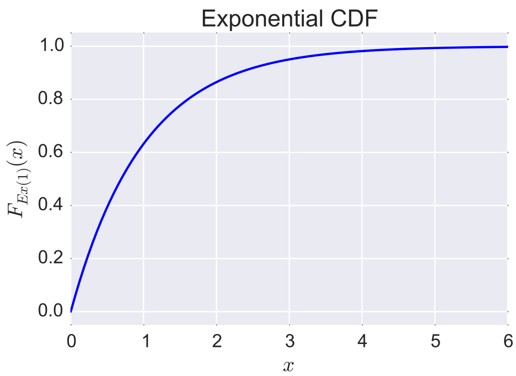


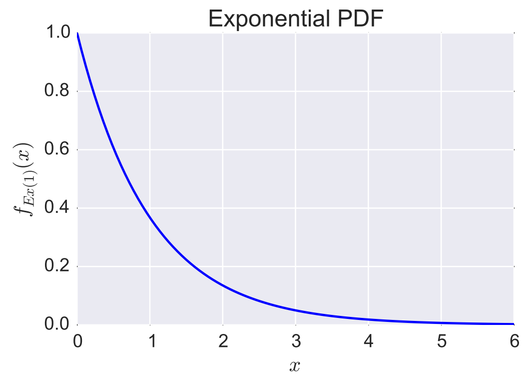
- **Logaritmickonormální (lognormální)** $\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$**:** rozdělení náhodné veličiny $X = e^Y$, kde Y má $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.





- **Exponenciální** $\mathrm{Ex}(\tau)$**:** např. rozdělení času do první poruchy, jestliže (podmíněná) pravděpodobnost poruchy za časový interval $\langle t, t+\delta\rangle$ závisí jen na δ, nikoli na t.





- …

A dále nás čeká statistika…

Existují tři druhy lží: lži, naprosté lži a statistiky.

Benjamin Disraeli