

Bayesovské sítě

Kamil Matoušek, Ph.D.

Informační a znalostní systémy

Co jsou Bayesian Networks (BN)

- Pravděpodobnostní modely využívající grafovou reprezentaci
- Znalosti zatížené nejistotou (nepřesné, nejisté, vágní)
- Rozhodování
- Využití po několik století budované teorie pravděpodobnosti
- Práce s mnohorozměrnými pravděpodobnostními distribucemi
- Oblasti jako medicína – deterministická znalost spíše výjimkou

- Problémy PROSPECTORovského odvozovacího pravidla
 - *Pseudobayesovský* způsob odvozování
 - Stupně nutnosti, postačitelnosti, šance
 - Pravděpodobnostně korektní, jen jsou-li evidence přiřazené uzlům vedoucím do stejného následníka podmíněně nezávislé při dané hypotéze přiřazené společnému následníku
 - Problémy při platnosti více evidencí současně – Hájkovy korekce

Z teorie pravděpodobnosti

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A/B) = P(A,B) / P(B)$$

Bayesův vztah

$$P(A/B) = P(A,B) / (P(B/A) + P(B/\neg A))$$

Sdružená (vzájemná) nezávislost

$$P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$$

Podmíněná nezávislost jevů A a B při dané hodnotě jevu C ($A \perp B / C$):

$$P(A,B,C) = P(A,C) \cdot P(B,C) / P(C)$$

Definice bayesovské sítě

Bayesovská síť (*kauzální síť, influenční diagram*)

- Acyklický orientovaný graf $G = (V, E)$
- Uzlům přiřazeny náhodné veličiny (vzájemně jednoznačně)
- Systém podmíněných pravděpodobnostních distribucí

$$\{ P(X_i | (X_j)_{j \in pa(i)}) \}_{i \in V}$$

$$pa(i) = \{ j \in V : (j \rightarrow i) \in E \}.$$

- $(j \rightarrow i) \dots j =$ „rodič“, $i =$ „potomek“
- Tj. pro každý uzel grafu (náhodnou veličinu) je zadána podmíněná pravděpodobnostní distribuce
- *Zdrojové* uzly (nemají rodiče) - distribuce vlastně nepodmíněné.

Výpočet pravděp. distribuce

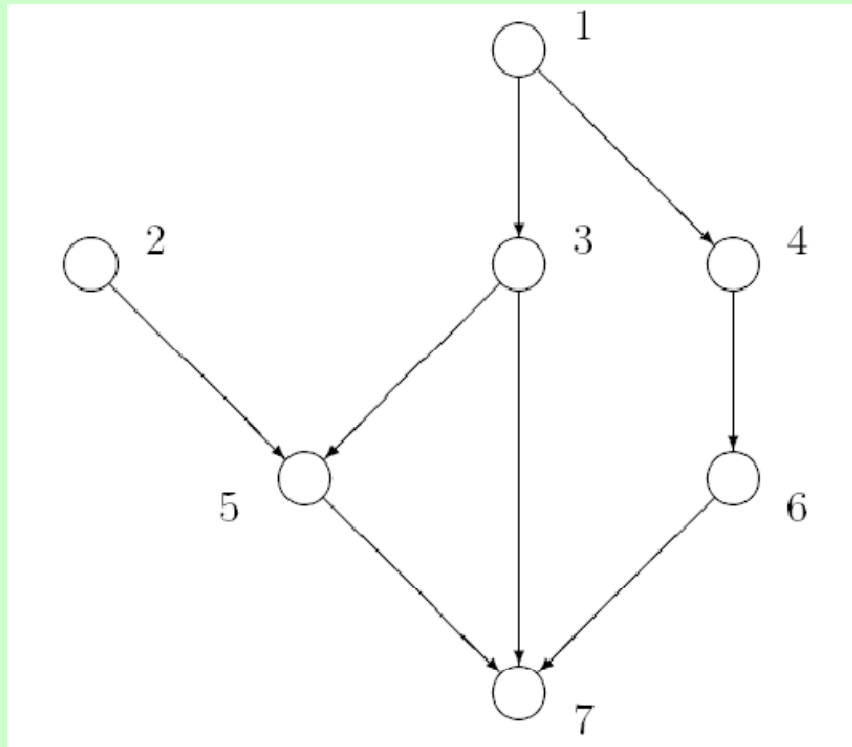
- Pro BN existuje právě jedna pravděpodobnostní distribuce
- Lze ji vypočítat takto:

$$R((X_i)_{i \in V}) = \prod_{i \in V} P(X_i | (X_j)_{j \in pa(i)}).$$

Znalosti dvojího druhu

- **Kvantitativní** – podmíněné distribuce: závislostní vztahy
- **Kvalitativní** = strukturní: graf, je třeba respektovat

Příklad (binární veličiny)



$P(X_1 = 1)$	0.5
$P(X_2 = 1)$	0.5
$P(X_3 = 1 X_1 = 0)$	0.25
$P(X_3 = 1 X_1 = 1)$	0.75
$P(X_4 = 1 X_1 = 0)$	0.35
$P(X_4 = 1 X_1 = 1)$	0.85
$P(X_5 = 1 X_2 = 0, X_3 = 0)$	1
$P(X_5 = 1 X_2 = 0, X_3 = 1)$	0
$P(X_5 = 1 X_2 = 1, X_3 = 0)$	0
$P(X_5 = 1 X_2 = 1, X_3 = 1)$	1
$P(X_6 = 1 X_4 = 0)$	0.25
$P(X_6 = 1 X_4 = 1)$	0.5
$P(X_7 = 1 X_3 = 0, X_5 = 0, X_6 = 0)$	0.3
$P(X_7 = 1 X_3 = 0, X_5 = 0, X_6 = 1)$	0.15
$P(X_7 = 1 X_3 = 0, X_5 = 1, X_6 = 0)$	0
$P(X_7 = 1 X_3 = 0, X_5 = 1, X_6 = 1)$	0.3
$P(X_7 = 1 X_3 = 1, X_5 = 0, X_6 = 0)$	0.15
$P(X_7 = 1 X_3 = 1, X_5 = 0, X_6 = 1)$	0.55
$P(X_7 = 1 X_3 = 1, X_5 = 1, X_6 = 0)$	0.6
$P(X_7 = 1 X_3 = 1, X_5 = 1, X_6 = 1)$	0.1

$$\begin{aligned}
 P(X_1, X_2, \dots, X_7) &= \\
 &= P(X_1)P(X_2)P(X_3|X_1)P(X_4|X_1)P(X_5|X_2, X_3)P(X_6|X_4)P(X_7|X_3, X_5, X_6).
 \end{aligned}$$

Podmínka podmíněné nezávislosti

- Očíslování uzlů, rodiče vždy nižší číslo, než potomek:

$$no : V \longrightarrow \{1, \dots, |V|\}$$

- Pro všechna $i \in V$:

$$X_i \perp (X_j)_{j \in (\{k \in V : no(k) < no(i)\} - pa(i))} \mid (X_j)_{j \in pa(i)}$$

- Ekvivalentní požadavky nezávislé na uspořádání:

Podmíněné nezávislosti pro uspořádání	
1 2 3 4 5 6 7	1 4 6 3 2 5 7
$X_2 \perp X_1$	$X_6 \perp X_1 \mid X_4$
$X_3 \perp X_2 \mid X_1$	$X_3 \perp (X_4, X_6) \mid X_1$
$X_4 \perp (X_2, X_3) \mid X_1$	$X_2 \perp (X_1, X_3, X_4, X_6)$
$X_5 \perp (X_1, X_4) \mid (X_2, X_3)$	$X_5 \perp (X_1, X_4, X_6) \mid (X_2, X_3)$
$X_6 \perp (X_1, X_2, X_3, X_5) \mid X_4$	$X_7 \perp (X_1, X_2, X_4) \mid (X_3, X_5, X_6)$
$X_7 \perp (X_1, X_2, X_4) \mid (X_3, X_5, X_6)$	

Odvozování – inference

- Zadané hodnoty některých veličin



- Výpočet podmíněné distribuce veličiny (hypotézy)

A. Metoda postupných modifikací

B. Transformace na rozložitelný model

A. Metoda postupných modifikací

R.D.Schachter

- Modifikace sítě
 - Vypuštění uzlů (*z nichž* nevede hrana)
 - Otočení hrany (uzly vzájemně dědí své *rodiče*)
- Výsledná distribuce
 - se nezmění nebo
 - je marginálem k původní (po vypuštění uzlů)

A. Změny při otočení hrany

Hranu ($k \rightarrow l$) otáčíme na ($l \rightarrow k$)

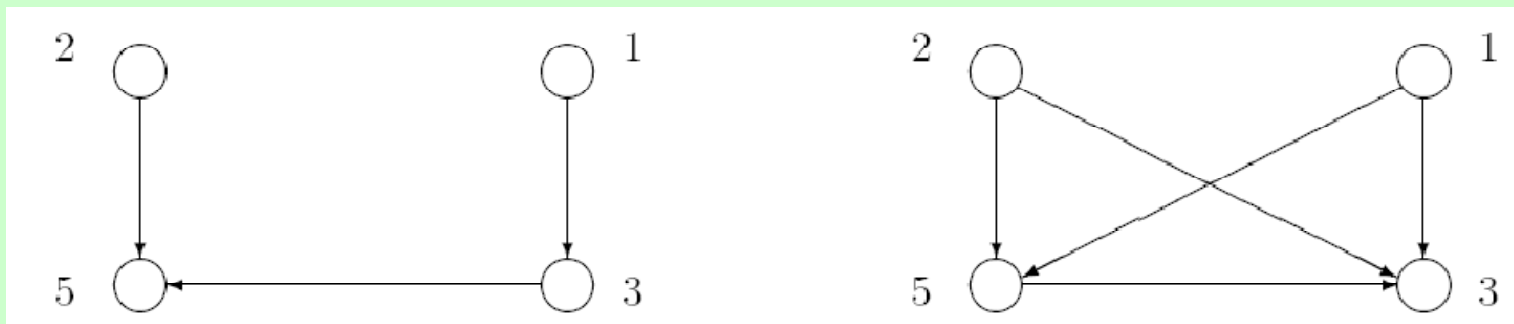
$$\begin{aligned} P(X_l | (X_i)_{i \in pa_{new}(l)}) &= \\ &= \sum_{x \in \mathbf{X}_k} P(X_k = x | (X_i)_{i \in pa_{old}(k)}) \cdot P(X_l | (X_i)_{i \in pa_{old}(l) - \{k\}} \& X_k = x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_k | (X_i)_{i \in pa_{new}(k)}) &= \frac{P(X_k | (X_i)_{i \in pa_{old}(k)}) \cdot P(X_l | (X_i)_{i \in pa_{old}(l)})}{P(X_l | (X_i)_{i \in pa_{new}(l)})} = \\ &= \frac{P(X_k | (X_i)_{i \in pa_{old}(k)}) \cdot P(X_l | (X_i)_{i \in pa_{old}(l)})}{\sum_{x \in \mathbf{X}_k} P(X_k = x | (X_i)_{i \in pa_{old}(k)}) \cdot P(X_l | (X_i)_{i \in pa_{old}(l) - \{k\}} \& X_k = x)}. \end{aligned}$$

\mathbf{X}_k ... množina hodnot veličiny X_k

A. Příklad – pokračování

- Spočítejme distribuci $P(X_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_5 = x_5)$ pro zadané hodnoty x_1, x_2, x_5



$$P(X_5|X_1, X_2) = \sum_{x \in X_3} P(X_3 = x|X_1) \cdot P(X_5|X_2, X_3 = x)$$

$$P(X_3|X_1, X_2, X_5) = \frac{P(X_3|X_1)P(X_5|X_2, X_3)}{\sum_{x \in X_3} P(X_3 = x|X_1) \cdot P(X_5|X_2, X_3 = x)}$$

A. Příklad – pokračování

$$P(X_5 = 0|X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{3}{4}0 + \frac{1}{4}1 = \frac{1}{4}$$

$$P(X_5 = 1|X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{3}{4}1 + \frac{1}{4}0 = \frac{3}{4}$$

$$P(X_5 = 0|X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{3}{4}1 + \frac{1}{4}0 = \frac{3}{4}$$

$$P(X_5 = 1|X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{3}{4}0 + \frac{1}{4}1 = \frac{1}{4}$$

$$P(X_5 = 0|X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{4}0 + \frac{3}{4}1 = \frac{3}{4}$$

$$P(X_5 = 1|X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}0 = \frac{1}{4}$$

$$P(X_5 = 0|X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}0 = \frac{1}{4}$$

$$P(X_5 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4}0 + \frac{3}{4}1 = \frac{3}{4}$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 0, X_2 = 0, X_5 = 0) = \frac{\frac{1}{4}1}{\frac{3}{4}0 + \frac{1}{4}1} = 1$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 0, X_2 = 0, X_5 = 1) = \frac{\frac{1}{4}0}{\frac{3}{4}1 + \frac{1}{4}0} = 0$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 0, X_2 = 1, X_5 = 0) = \frac{\frac{1}{4}0}{\frac{3}{4}1 + \frac{1}{4}0} = 0$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 0, X_2 = 1, X_5 = 1) = \frac{\frac{1}{4}1}{\frac{3}{4}0 + \frac{1}{4}1} = 1$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 0, X_5 = 0) = \frac{\frac{3}{4}1}{\frac{1}{4}0 + \frac{3}{4}1} = 1$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 0, X_5 = 1) = \frac{\frac{3}{4}0}{\frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}0} = 0$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1, X_5 = 0) = \frac{\frac{3}{4}0}{\frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}0} = 0$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1, X_5 = 1) = \frac{\frac{3}{4}1}{\frac{1}{4}0 + \frac{3}{4}1} = 1$$

atd...

B. Transformace na rozložitelný model

Lauritzen a Spigelhalter (33SPR)

- 1) Moralizace

- Spojíme všechny dvojice uzlů, které mají společného přímého následníka (*rodiče* stejného *dítěte*), neorientovanou hranou a všechny původně orientované hrany nahradíme neorientovanými.

- 2) Triangularizace

- Doplníme některé hrany: triangulovaný graf

- 3) Strom spojení (junction tree)

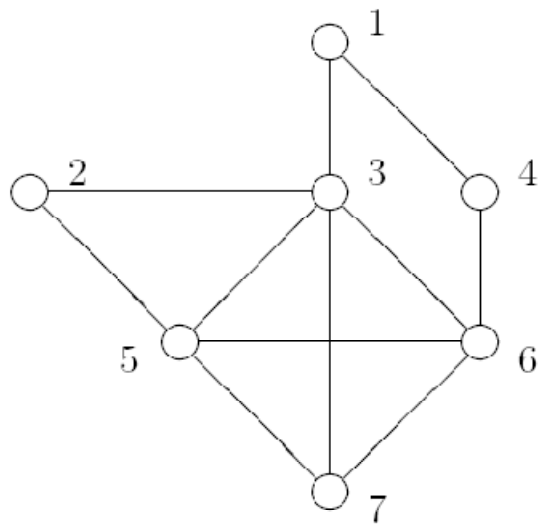
- uzly tvořeny klikami triangulovaného grafu C_1, \dots, C_K

- spojení podle uspořádání odpovídajícího „running intersection property“: i spojíme s j , pokud:

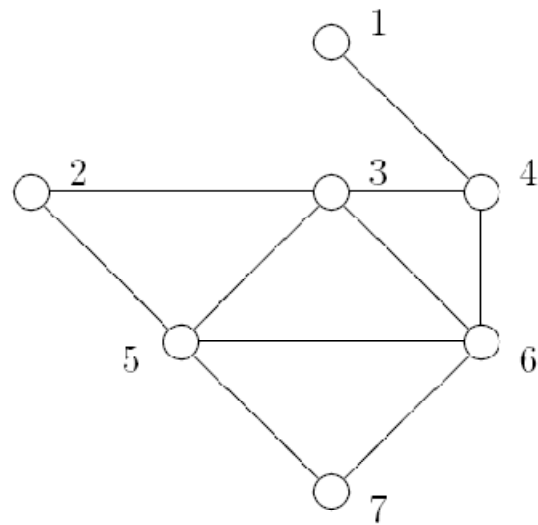
$$(C_i \cap (\bigcup_{k=1}^{i-1} C_k) \subseteq C_j).$$

- doplníme množinou *spojovacích uzlů* „uprostřed“ dosavadních hran

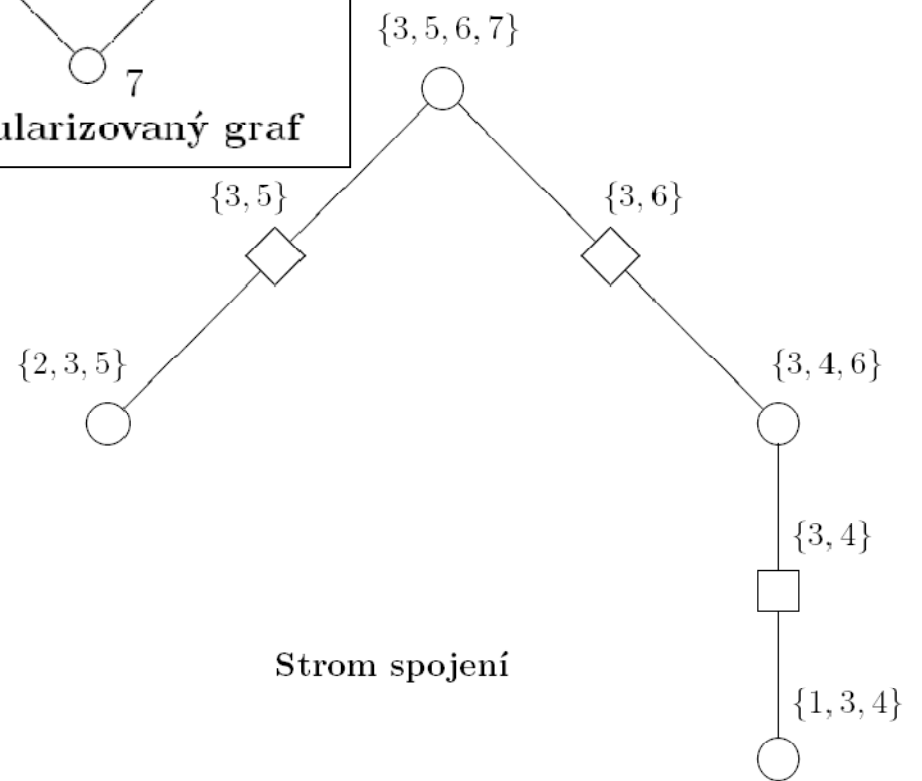
B. Příklad – pokračování



Moralizovaný graf



Triangularizovaný graf



Strom spojení

B. Výpočet ve stromech spojení

- Splňuje-li systém klik C_1, \dots, C_K

„running intersection property“

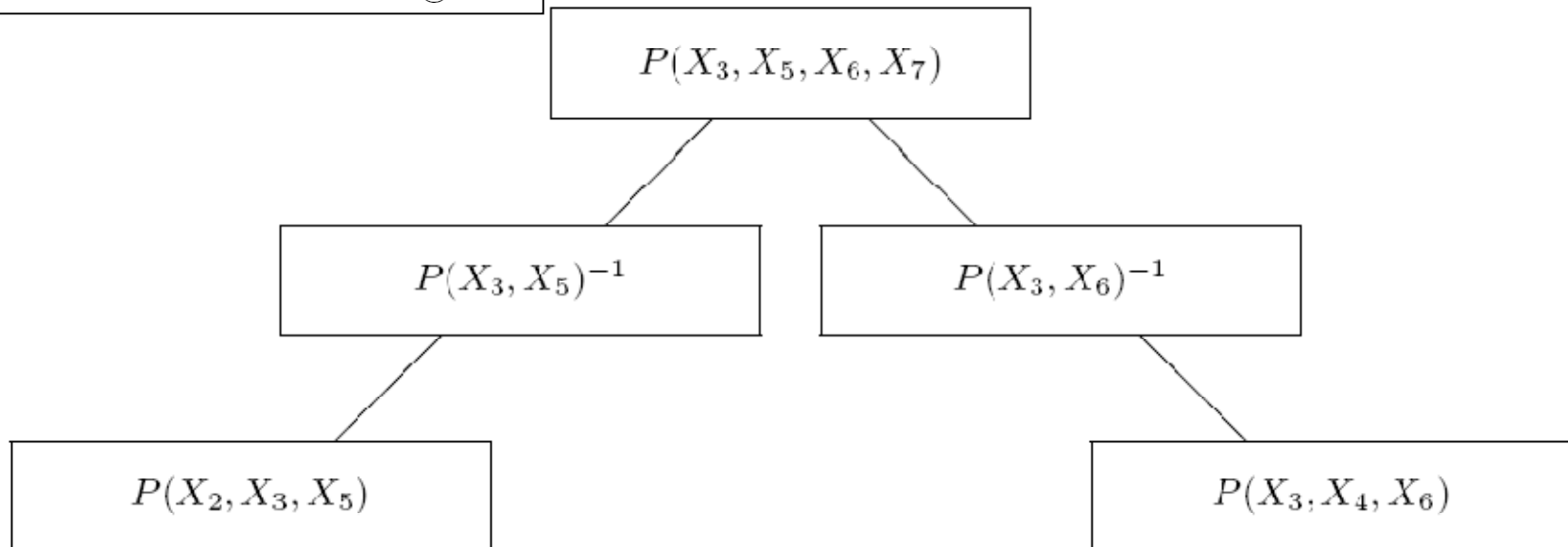
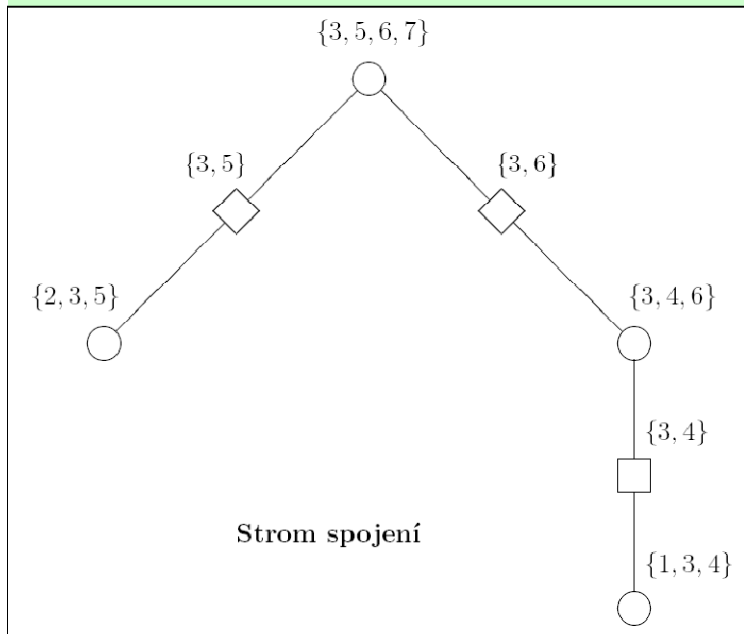
$$(C_i \cap (\bigcup_{k=1}^{i-1} C_k) \subseteq C_j).$$

pak distribuce P se vypočte:

$$P^{C_1} \frac{P^{C_2}}{P^{C_2 \cap C_1}} \frac{P^{C_3}}{P^{C_3 \cap (C_1 \cup C_2)}} \cdots \frac{P^{C_K}}{P^{C_K \cap (C_1 \cup \dots \cup C_{K-1})}}$$

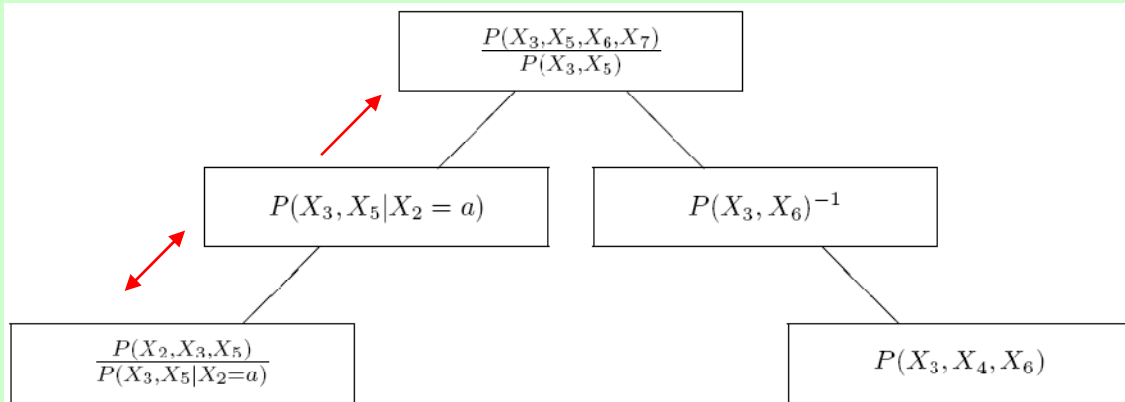
B. Příklad – pokračování

Pro jednoduchost
bez $\{1,3,4\}$



B. Příklad – pokračování

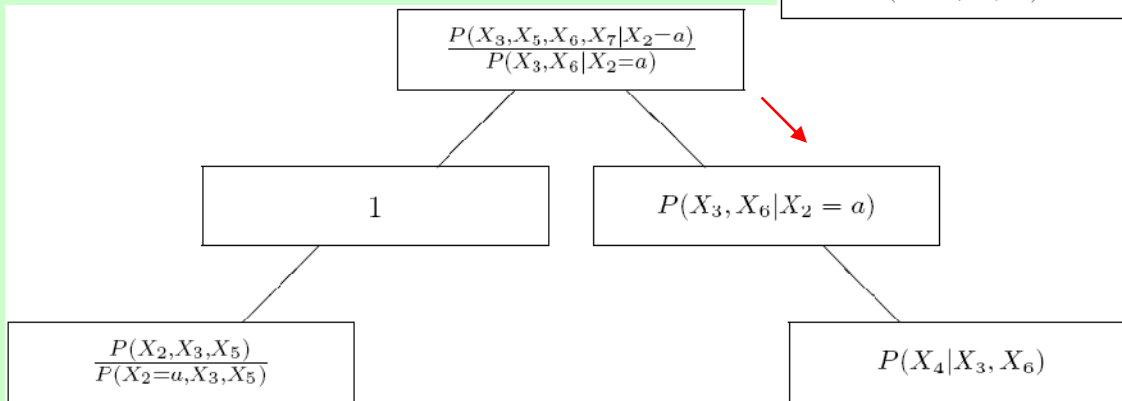
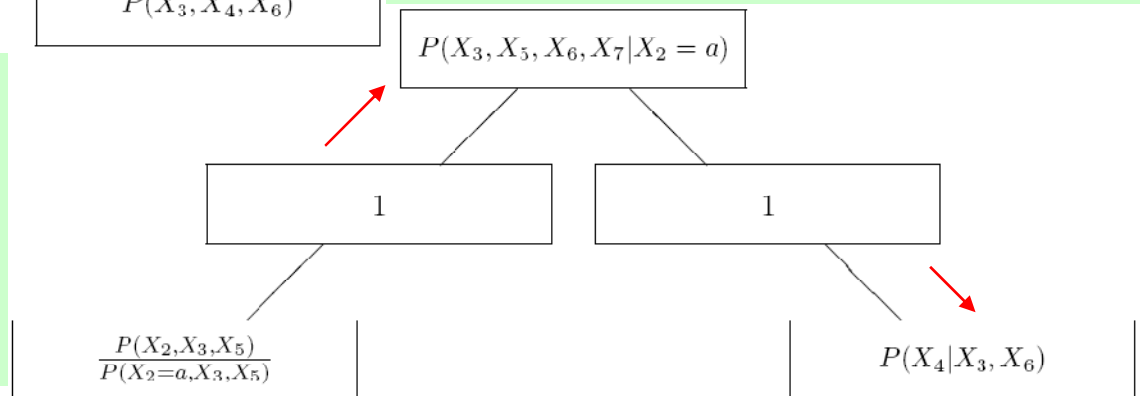
- Zajímá nás $P(X_7|X_2 = a, X_4 = b)$

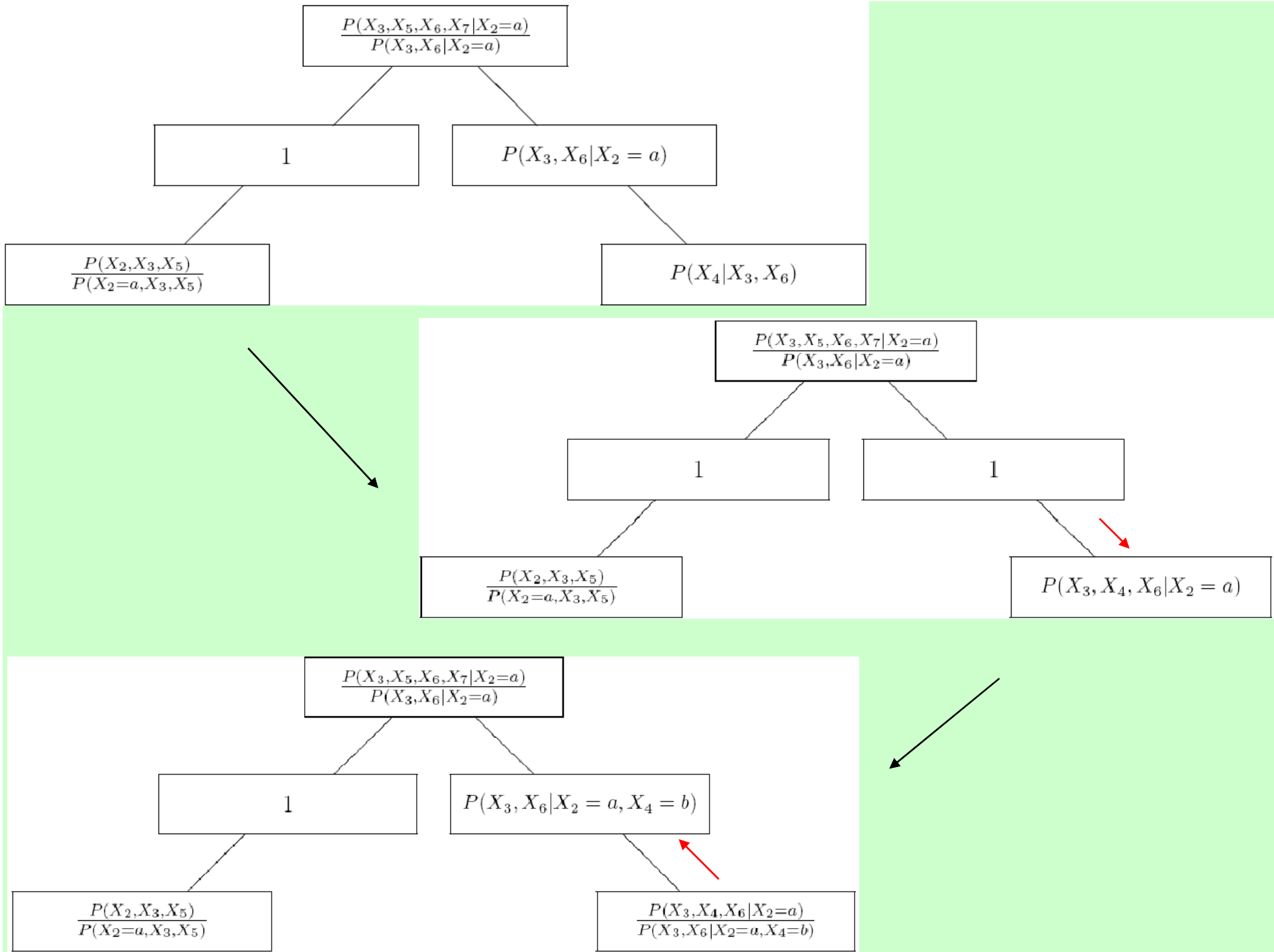


„Posílání zpráv“

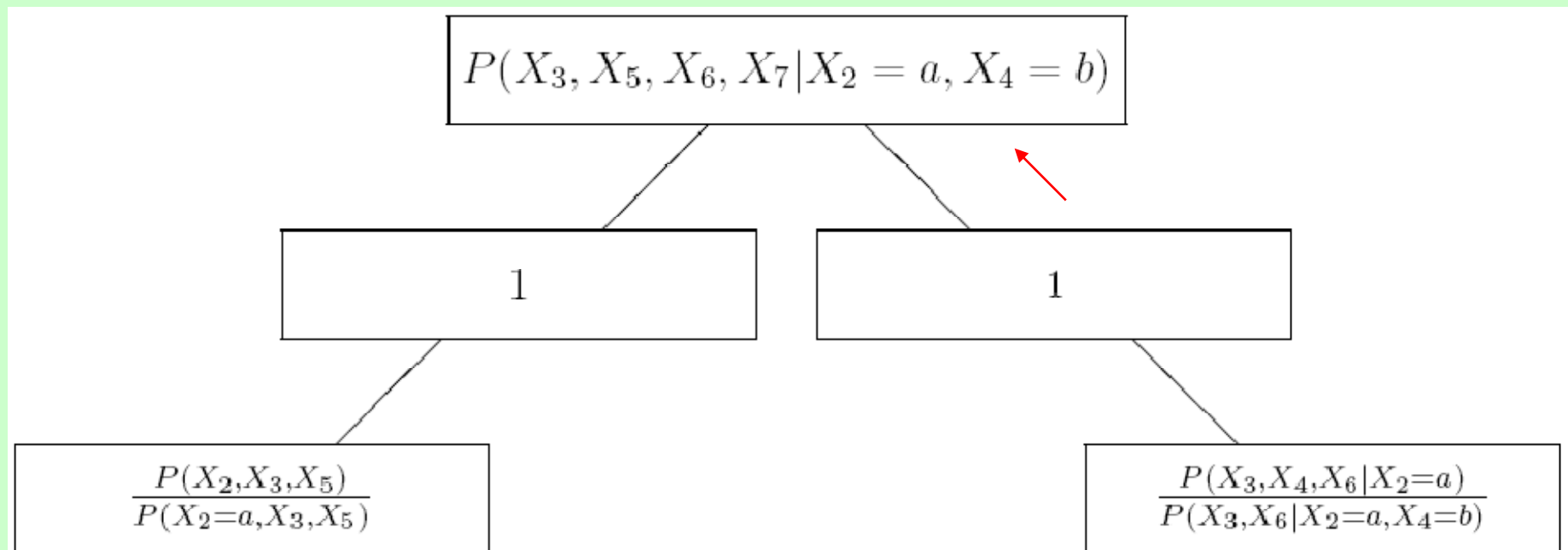
$$P(X_6, X_7|X_2, X_3, X_5) = P(X_6, X_7|X_3, X_5)$$

$$P(X_6, X_7, X_3, X_5|X_2) = P(X_6, X_7|X_3, X_5)P(X_3, X_5|X_2).$$





B. Příklad – pokračování



- Požadovaná distribuce $P(X_7 | X_2 = a, X_4 = b)$
 - snadno vypočítáme z $P(X_3, X_5, X_6, X_7 | X_2 = a, X_4 = b)$ sčítáním (marginalizací) přes zbývající tři veličiny

Praktické ukázky

- Hugin Expert (www.hugin.com)
 - Návrh bayesovských sítí
 - Řešení jednoduchých problémů
 - Demonstrační Hugin Lite
- Program Netica (www.norsys.com)

Knihovny pro Javu: BNJ

- **B**ayesian **N**etwork Tools in **J**ava pro výzkum a vývoj grafových modelů pravděpodobnosti
- Kansas State University
Laboratory for Knowledge Discovery in Databases
- Licence GNU GPL – k dispozici na Sourceforge.net
- BNJ využívá další knihovny, které jsou šířeny pod různými licencemi:
 - jxl.jar LGPL
 - log4j.jar Apache
 - log4j-core.jar Apache
 - metouia.jar LGPL
 - mysql.jar GPL proprietární
 - ojdbc14_g.jar proprietární
 - openjgraph.jar LGPL
 - postgresql.jar BSD
 - skinlf.jar mění se

KLiSt: Statistická podpora pro klinické studie

The image displays the KLiSt software interface, which is used for statistical support in clinical studies. The main window is titled "KLiSt" and contains several panes and controls.

Bayesian Net Inference Wizard:

- Typ Inference:** Kterou inferenční metodu chce použít?
 - Approximate Inference
 - Likelihood Weighting
 - Logic Sampling
 - Self-Importance Sampling
 - Adaptive-Importance Sampling
 - Pearl MCMC Method
- Počet vygenerovaných hodnot:** 1,000
- Jméno souboru pro generovaná data:** [Text input field]
- Procházet** button

Bayesian Network Diagram:

The diagram shows a Bayesian network with nodes: VisitAsia, Tuberculosis, Cancer, and Smoking. The nodes are connected as follows: VisitAsia is a parent of Tuberculosis and Cancer. Tuberculosis is a parent of Cancer. Smoking is a parent of Cancer. A context menu is open over the VisitAsia node, showing options: Smazat, Uložit, Smazat uzel, Auto rozložení, and Vlastnosti.

Bayesian Network Explorer:

- bayesiannetwork
 - Bronchitis
 - Cancer
 - Dyspnea
 - Smoking
 - TbOrCa
 - Tuberculosis
 - VisitAsia
 - Visit
 - No_Visit
 - XRay

Generování dat z BN (1)

Logic Sampling (M. Henrion, 1988)

- Nejprimitivnější algoritmus pro získání vzorků, kde je zohledněná podmíněná pravděpodobnost hodnoty v daném uzlu, která je podmíněná hodnotou evidence (pozorování) v uzlu rodiče
- Vygeneruje se vzorek dat a postupně se testuje průchodem sítí, zda hodnota podmíněné pravděpodobnosti dané vzorkem odpovídá pro každý uzel hodnotě původní, pokud ne, vzorek je zahozen a generuje se další.

Výhody: Navzájem nezávislé vzorky

Nevýhody:

- Je-li evidence nízká, zahodíme příliš mnoho vzorků.
- Pokud je $P(e)$ nízká, musíme zvolit velký počet vzorků, aby se data shodovala s danou Bayesovskou sítí.
- Podrobnosti:
 - http://www.ics.uci.edu/~dechter/ics-275b/spring-05/handouts/Sampling_IC275b_2005.ppt
 - <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/jair/pub/volume13/cheng00a-html/cheng00a-html.node5.html>

Generování dat z BN (2)

Likelihood weighting (Fung a Cheng, 1989)

- Vylepšení **Logic Sampling**
- Jednotlivé vzorky jsou váženy věrohodností evidence, kterou podmiňují pravděpodobnost dalších uzlů
- Zahodíme méně vzorků
- Vhodná pro pravděpodobné (reálné) hodnoty evidence, pokud je evidence malá, vzorky mají malou váhu a dochází k výrazným odchýlkám v generovaných datech oproti původní Bayesovské síti
- Podrobnosti:
 - http://www.ics.uci.edu/~dechter/ics-275b/spring-05/handouts/Sampling_ICS275b_2005.ppt
 - <http://www.cs.berkeley.edu/~russell/papers/uai95-sampling.ps>
 - <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/jair/pub/volume13/cheng00a-html/cheng00a-html.node5.html>

Generování dat z BN (3)

Self-Importance Sampling (Shachter, Peot 1989)

- Podobný princip jako Logic Sampling
- Snaha o periodickou kontrolu a revizi apriorní pravděpodobnosti vzorků tak, aby rozdělení aposteriorní pravděpodobnosti vzorků postupně dosáhlo aposteriorní pravděpodobnosti Bayesovské sítě.
- K tomu využívá funkci důležitosti – „importance function“.
- Podrobnosti:
 - <http://www.kddresearch.org/Groups/Probabilistic-Reasoning/Papers/KDD-Fall-2001-02a-SSJ.ppt>
 - <http://www.sis.pitt.edu/~cyuan/isprinciple.pdf>
 - <http://people.csail.mit.edu/leortiz/papers/uai2000-paper.pdf>
 - <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/jair/pub/volume13/cheng00a-html/cheng00a-html.node4.html>

Generování dat z BN (4)

Adaptive-Importance Sampling (Jian Cheng a M. J. Druzdzel, 2000)

- Nejefektivnější z rodiny „importance sampling“ algoritmů
- Princip jako **Self-Importance Sampling**
- Modifikace parametrizuje funkci důležitosti množinou parametrů a navrhuje pravidla pro jejich aktualizaci na základě poklesu gradientu k úpravě funkce důležitosti dle aktuálních vzorků
- K modifikaci apriorní pravděpodobnosti vzorků využívá heuristik
- Podrobnosti:
 - <http://www.pitt.edu/~druzdzel/psfiles/uai03a.pdf>
 - <http://www.sis.pitt.edu/~cyuan/isprinciple.pdf>
 - http://www.ics.uci.edu/~dechter/ics-275b/spring-05/handouts/Sampling_IC275b_2005.ppt
 - <http://people.csail.mit.edu/leortiz/papers/uai2000-paper.pdf>
 - <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/jair/pub/volume13/cheng00a-html/cheng00a-html.node7.html>

Generování dat z BN (5)

Pearl MCMC metoda (Pearl 1987)

- Markovovy řetězce a metoda Monte Carlo (**Markov Chain Monte Carlo**).
- Vygeneruje se vzorek s náhodnými hodnotami pravděpodobností.
- Porovná se, zda nejsou hodnoty aposteriorních pravděpodobností větší než původní.
- Pak se vzorek změní a to tak, že se změní hodnoty pravděpodobností pouze v jednom uzlu.
- Tyto změny tedy lze popsat pomocí Markovových řetězců.
- Ke změně stavu dochází právě v jednom uzlu.
- Opět se provede změna v jednom uzlu a pokud došlo k porušení podmínky, že aposteriorní pravděpodobnost je větší než v původní síti nebo je výrazně nižší (nutno zvolit dobře mez) než u předchozího vzorku, algoritmus vychází v dalším kroku z předcházejícího stavu sítě (vzorku).
- Každých k vzorků (např. 100, 1000) si vzorek zapamatujeme – uložíme.
- Po n vzorcích můžeme výpočet zastavit a spustit znovu.

Výhody: algoritmus konverguje vždy, když hodnoty pravděpodobností jsou větší než nula a také je vhodný na použití sítí o velkém počtu proměnných (uzlů).

Nevýhody: vzorky jsou na sobě závislé, v některých případech může konvergovat příliš dlouho.

- Podrobnosti a detailnější popis:

- http://www.ics.uci.edu/~dechter/ics-275b/spring-05/handouts/Sampling_ICS275b_2005.ppt

Učení BN z dat (1)

K2 algoritmus (G.F. Cooper a E. Herskovits, 1992)

- Hladový algoritmus, maximalizace pravděpodobnosti shody modelu BN a dat.
 - Prochází jednotlivými uzly a hledají se kandidáti na rodiče daného uzlu.
 - Je vybrán uzel a hladově jsou přidány do množiny kandidátů na jeho rodiče všechny uzly, které maximalizují ohodnocení uzlu.
 - Další kandidáti nejsou přidáváni, pokud přesáhneme maximální počet rodičů nebo přidání žádného uzlu do množiny kandidátů již nezvyšuje ohodnocení uzlu.
- Předpoklady:
 - Pokud uzel X_i je před uzlem X_j , nemůže být X_j rodičem X_i
 - V tabulce/databázi/zdrojovém souboru dat nechybí žádné hodnoty
 - Diskrétní hodnoty
- Možné problémy:
 - uvíznutí v lokálním maximu,
 - Záleží na pořadí uzlů, počet upořádání roste exponenciálně – je tedy nemožné procházet všechna
 - Jak zvolit vhodný maximální počet rodičů
- Detailní popis a matematické vyjádření algoritmu:
 - <http://www.kddresearch.org/Groups/Probabilistic-Reasoning/Papers/k2.ppt>
 - <http://www.cis.ksu.edu/~bbp9857/thesis.pdf>

Učení BN z dat – PC

PC algorithm, Peter Spirtes a Clark Glymour - Constraint-Based Learning

Statistické testy vedoucí k množině tvrzení o podmíněné nezávislosti a závislosti (CIDs).

1. Statistické testy podmíněné nezávislosti pro všechny páry proměnných (kromě těch, u kterých je strukturní omezení).
 2. Přidá se neorientovaná vazba mezi každým párem proměnných u kterých nebyla nalezena podmíněná nezávislost. Výsledný neorientovaný graf se nazývá *kostra* naučené struktury.
 3. Identifikují se kolizní uzly (collider – pár vazeb vedených tak, že se setkávají v uzlu), zajišťující, že se nevyskutují orientované cykly.
 - Např., zjistíme-li A a B nezávislé, B a C závislé, ale A a C jsou podmíněně nezávislé, známe-li S, které neobsahuje B, lze to reprezentovat strukturou $A \rightarrow B \leftarrow C$.
 4. Dále jsou zavedeny orientace u vazeb, jejichž směr lze odvodit z nalezených podmíněných nezávislostí identifikovaných kolizních uzlů.
 5. Nakonec jsou náhodně orientovány zbývající neorientované vazby tak, aby nevznikly orientované cykly.
- Obecně nelze odvodit směr všech vazeb z dat - některé orientovány náhodně. Strukturu je třeba prověřit (např. pocení způsobuje horečku), použít NPC.
 - Omezené množiny dat – často odvozeno příliš mnoho podmíněných nezávislostí
 - Někdy zanedbány důležité závislosti

Učení BN z dat – NPC

Necessary Path Condition, Siemens Mnichov

Základní postup jako u PC (statistické testy podmíněné nezávislosti, kostra).

Kostra grafu je konstruována nevložením vazby u podmíněně nezávislých uzlů. Mohou ale vzniknout nekonzistence ve vyvozené množině tvrzení o podmíněné nezávislosti a závislosti (CIDs) z omezených množin dat.

Počet nekonzistencí v CIDs – neurčitost struktury modelu. = míra jistoty naučené struktury a indikace dostatečného počtu vstupních dat

Interakce s uživatelem:

- směr neorientovaných vazeb
- řešení *víceznačných regionů*.

Necessary Path Condition

Aby dvě proměnné X a Y byly podmíněně nezávislé na množině S , (a na žádné jiné její podmnožině), musí existovat cesta mezi X a každým Z v S (neprocházející Y) a mezi Y a každým Z v S (neprocházející X). Aby tvrzení o nezávislosti platilo, v grafu je nutný určitý počet vazeb.

Víceznačné Regiony

- Pokud absence vazby a závisí na přítomnosti jiné vazby b a naopak, říkáme, že a a b jsou *vzájemně závislé*. a a b tvoří *neurčité vazby*. *Víceznačný region* je maximální množinou *vzájemně závislých vazeb*. Skládá se tedy z množiny *neurčitých vazeb*. Cílem je získat co nejméně co nejmenších *Víceznačných regionů*. Deterministické relace mezi proměnnými také produkují *víceznačné regiony*.
- Existují-li *neurčité vazby* (nebo vazby, které je třeba orientovat), uživatel má možnost zadat informaci, jak vyřešit *víceznačné regiony*.

Literatura

- Jensen F.V. *Introduction to Bayesian Networks* 1996
- Frey B. J. *Graphical models for machine learning and digital communication* 1998
- Jensen F. V. *Bayesian Networks and Decision Graphs* 2001
- Neapolitan, R. E. *Probabilistic Reasoning in Expert Systems*, 1990
- Cowell R. G., Dawid, A. P., Lauritzen, S. L., Spiegelhalter, D. J. *Probabilistic Networks and Expert Systems* 1999
- Jiroušek R. *Úvod do teorie bayesovských sítí* 1994
- Jiroušek R.: *Metody reprezentace a zpracování znalostí v umělé inteligenci*
<http://staff.utia.cas.cz/vomlel/r.pdf>
- BNJ: <http://bnj.sourceforge.net/>
- Licence GNU GPL: <http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html>