Hledání k-tého nejmenšího prvku

1. Seřaď seznam/pole a vyber k-tý nejmenší, složitost $\Theta(N*\log(N))$.

Nevýhodou je zbytečné řazení úplně všech dat.

2. Využij Randomized select založený na principu Quick sortu. Očekávaná složitost $\Theta(N)$, nejhorší možná $\Theta(N^2)$.

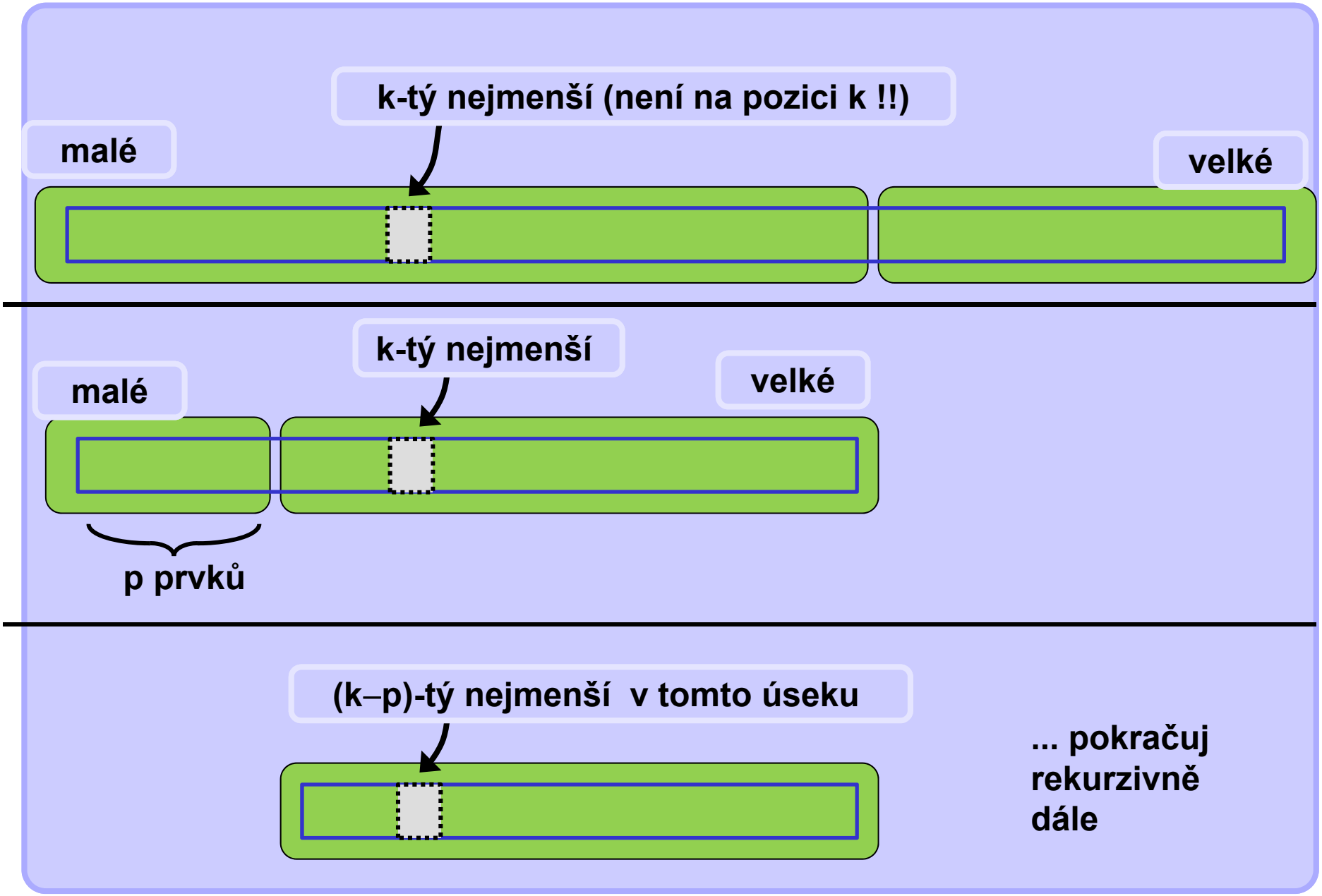
3. Využij Select založený na principu Quick sortu s výběrem pivota metodou medián z mediánů.

Randomized select

Partition -- dělení na "malé" a "velké" v Quicksortu

Randomized partition
-- prohoď první prvek pole/úseku s náhodně zvoleným prvkem pole/úseku,
-- proveď partition s tím, že pivotem je prvek na první pozici pole/úseku.

Randomized select
-- když je délka úseku rovna 1, vrať jeho jediný prvek,
-- proveď randomized partition tohoto úseku, vznikne levý a pravý podúsek,
-- aplikuj randomized select rekurzivně buď na levý nebo pravý podúsek, podle toho, v kterém z nich může ležet k-tý nejmenší prvek celého pole.


k-tý nejmenší (není na pozici k !!)
malé
velké
k-tý nejmenší
malé
velké
p prvků
(k–p)-tý nejmenší v tomto úseku
... pokračuj rekurzivně dále

Select metodou medián z mediánů

Select se od Quicksortu liší hlavně tím, že nevolá rekurzi na úsek s "malými" a "velkými" hodnotami, ale jen na jeden z nich, podle toho, v kterém z nich lze očekávat výskyt hledaného k-tého nejmenšího prvku.

Jak si pamatujeme z Quicksortu, pokud je úsek "maých" nebo "velkých" hodnot opakovaně extrémně krátký, může to vést až na kvadratickou složitost Quicksortu.

Stejná potíž by mohla nastat i metodě select.

Je nutno zajistit, aby v metodě partition byl vybrán pokaždé dostatečně vhodný pivot, tj. takový, který dobře rozdělí daný úsek na "malé" a "velké", tj. takový, který je pokud možno co nejblíže mediánu hodnot tohoto úseku.

Select metodou medián z mediánů

0. Pokud má aktuální úsek pole délku 1, vrať jeho jediný prvek.

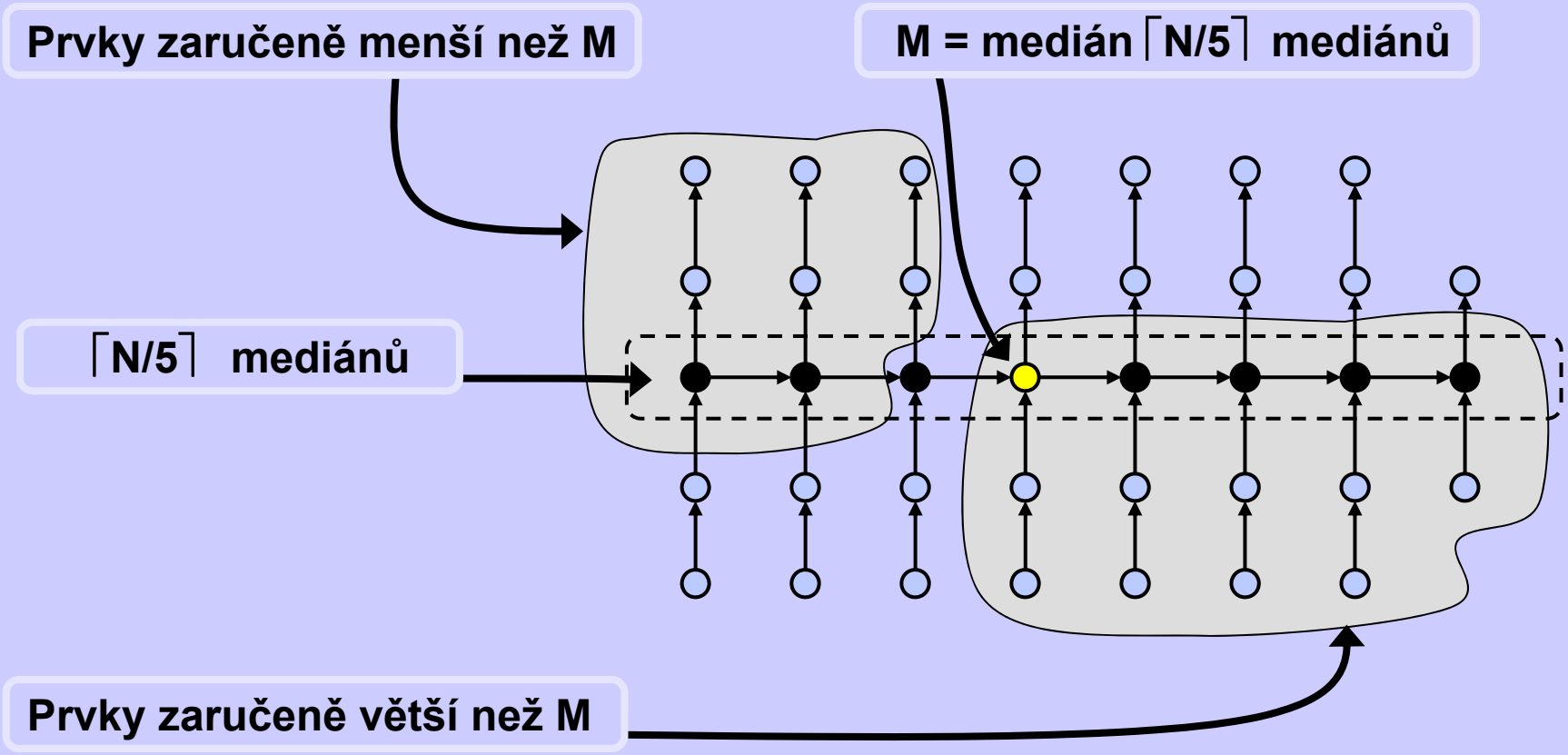
1. Rozděl pole nebo úsek pole délky N na ⌊N/5⌋ skupin po pěti prvcích a nejvýše jednu zbylou s méně než 5 prvky.

2. Každou skupinu seřaď (např. Insert sort) a vyber z ní její medián. Všechny tyto mediány přesuň na začátek pole/úseku.

3. Aplikuj 1. až 5. rekurzivně na úsek obsahující právě nalezené mediány, dokud nezískáš medián původních ⌈N/5⌉ mediánů z bodu 2. Tento medián M bude pivotem.

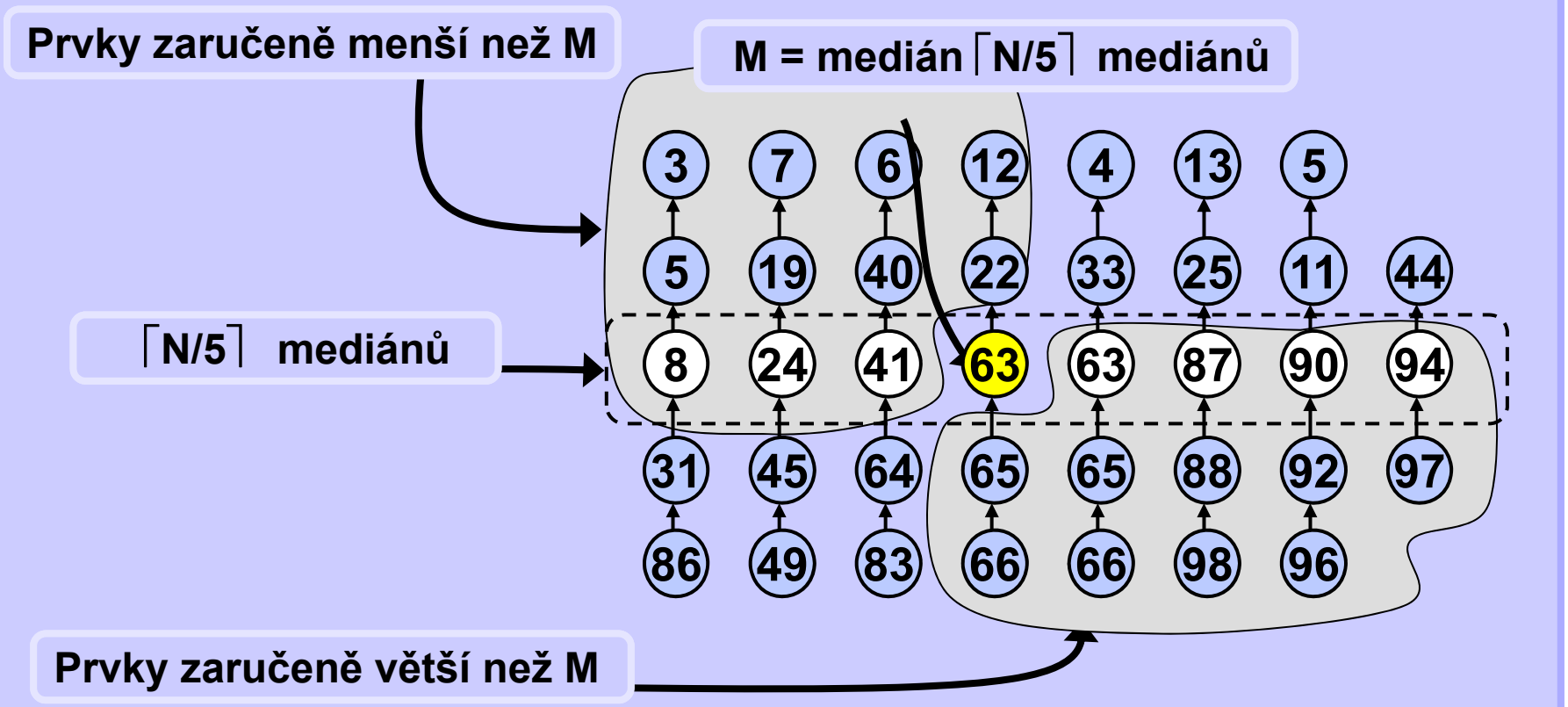
4. Řozděl pole/úsek na "malé" a "velké" pomocí metody partition s pivotem M.

5. Podle velikosti úseků "malých" a "velkých" rozhodni, v kterém z nich se nachází k-tý nejmenší prvek celého pole a
na něj aplikuj rekurzivně postup počínaje bodem 0.



Prvků zaručeně větších než M je alespoň 3N/10–6.
Analogicky, prvků menších než M je také alespoň 3N/10–6.

V bodě 5 se rekurze zavolá na úsek obsahující nejvýše
N–(3N/10–6) = 7N/10+6 prvků.



Prvků zaručeně větších než M je alespoň 3N/10–6.
Analogicky, prvků menších než M je také alespoň 3N/10–6.

V bodě 5 se rekurze zavolá na úsek obsahující nejvýše
N–(3N/10–6) = 7N/10+6 prvků.

Select metodou medián z mediánů

Metoda subSort je obyčejný Insert Sort,
rychlý na malých úsecích pole.
Zde slouží k nalezení mediánu hodnot v úseku délky 5 nebo menší.

```
void subSort(int [] a, int L, int R) {
  int insVal, j;
  for(int i = L+1; i <= R; i++) {
    insVal = a[i];
    j = i-1;
    while ((j >= L) && (a[j] > insVal)) {
      a[j+1] = a[j];
      j--;
    }
    a[j+1] = insVal;
  }
}
```

Select metodou medián z mediánů

Dělení úseku pole od indexu L, až po index R včetně
na "malé" a "velké"hodnoty podle předem zvolené pivotní hodnoty.

Analogicky jako v Quick sortu.

```
int partition( int [] a, int iL, int iR, int piv) {
  do {
    while (a[iL] < piv) iL++;
    while (a[iR] > piv) iR--;
    if (iL < iR)
      swap(a, iL++, iR--);
  } while( iL < iR);
  if (iR > iL) return iR;
  if (a[iR] < piv) iR++;
  return iR;
}
```

Select metodou median z mediánů

Metoda select volá sama sebe dvakrát.
Poprvé pro nalezení mediánu z mediánů úseků délky 5,
podruhé pro hledání k-tého prvku celého pole
mezi buďto "malými nebo "velkými" hodnotami v aktuálním úseku.

```
int select(int [] a, int L, int R, int k) {
  // 0. if the group is short terminate the recursion

  // 1. move medians of groups of 5 to the left

  // 2. also the median of the last possibly smaller group

  // 3. find median M of medians of 5

  // 4. use M for partition

  // 5. recursively call select on the appropriate part

}
```

Select metodou medián z mediánů

```
int select(int [] a, int L, int R, int k) {

  // 0. if the group is short terminate the recursion
  if (L == R) return a[L];
  if (L+1 == R) return (a[L] < a[R]) ? a[L] : a[R];

  // 1. move medians of groups of 5 to the left
  int lastM = L;                    // place for medians
  int i5;                           // 5-elem groups index
  for (i5 = L; i5 <= R-4; i5 += 5) {
    subSort(a, i5, i5+4);           // find median of 5
    swap(a, lastM++, i5+2);         // put it to the left
  }

// 2. also the median of the last possibly smaller group
  if (i5 <= R) {
    subSort(a, i5, R);
    swap(a, lastM, i5+(R-i5)/2 ); // lastM -> last of medians
  }
  ...  // continue
```

Select metodou medián z mediánů

```
 ... // continued:

  // 3 .find median (medmed5) of medians of 5
  int medmed5 = select(a, L, lastM, L+(lastM-L)/2);

  // 4. use medmed5 for partition, iBig -> first "big" value
  int iBig = partition(a, L, R, medmed5);

  // 5. recursively call select on the appropriate part
  if (iBig > k)
    // the k-th elem is among the "small"
    return select(a, L, iBig-1, k);
  else
    // the k-th elem is among the "big"
    return select(a, iBig, R, k);

} // end of select
```

Odvození složitosti

Rekurence:

$$T(N) \leq \begin{cases} O(1) & N < 140 \\ T(\lceil N/5 \rceil) + T(7N/10+6) + O(N) & N \geq 140 \end{cases}$$

bod 3 **bod 5** **body 1, 2, 4**

Řešení substituční metodou, ukážeme
$T(N) \leq cN$,
pro dostatečně velké c a pro $N > 0$.