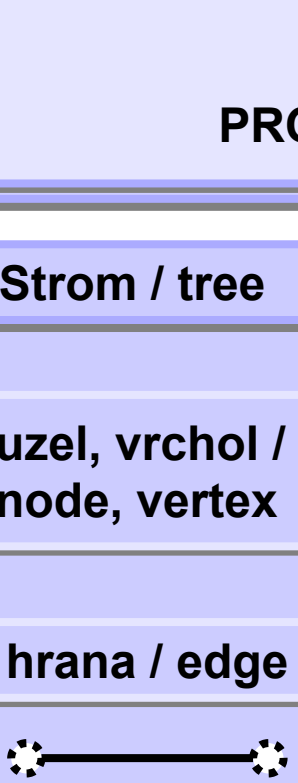
ALGORITMIZACE 2010/03

STROMY, BINÁRNÍ STROMY
VZTAH STROMŮ A REKURZE
ZÁSOBNÍK IMPLEMENTUJE REKURZI
PROHLEDÁVÁNÍ S NÁVRATEM (BACKTRACK)

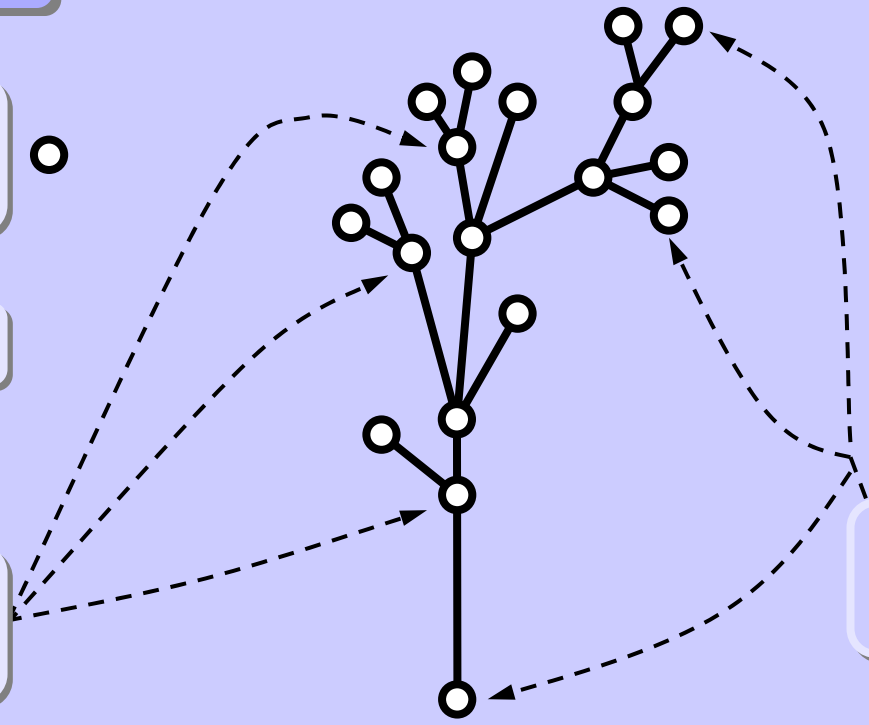
Strom / tree

uzel, vrchol / node, vertex

hrana / edge

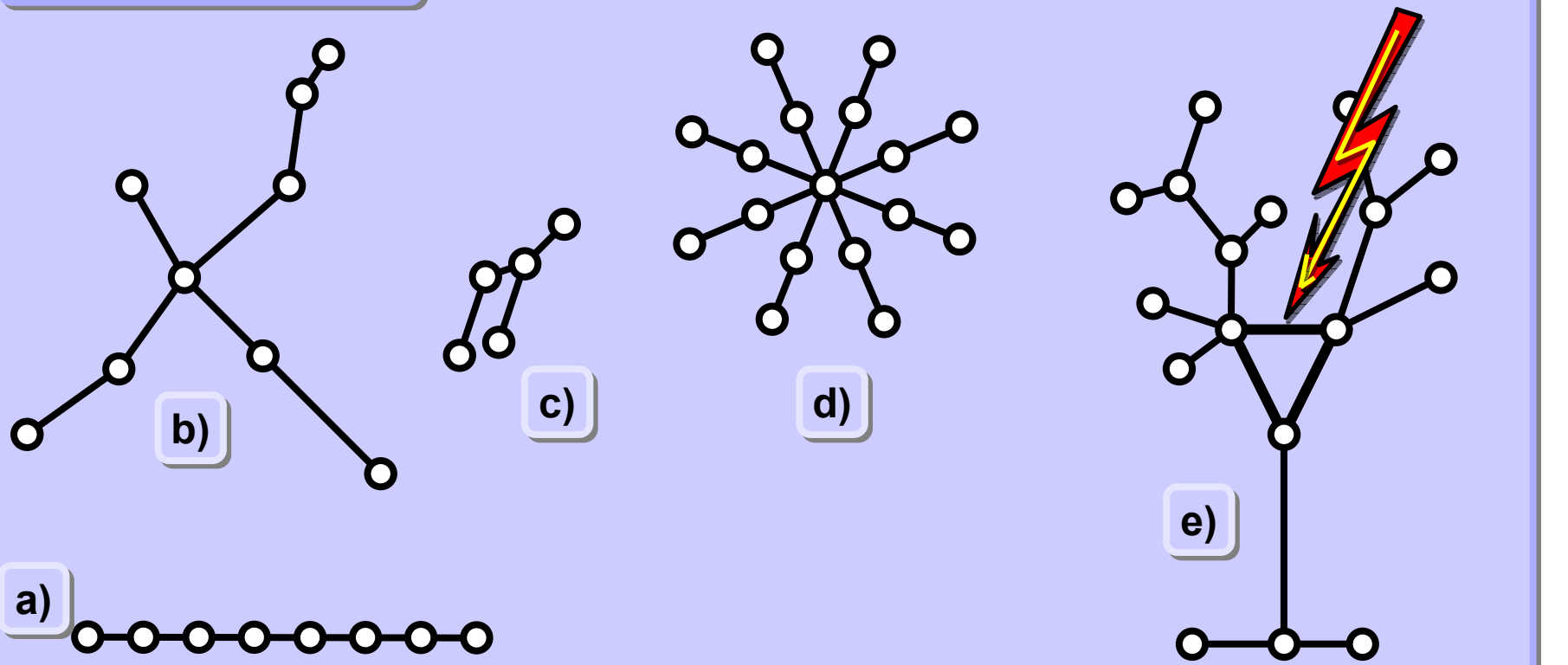


vnitřní uzel / internal node



list / leaf (pl. leaves)

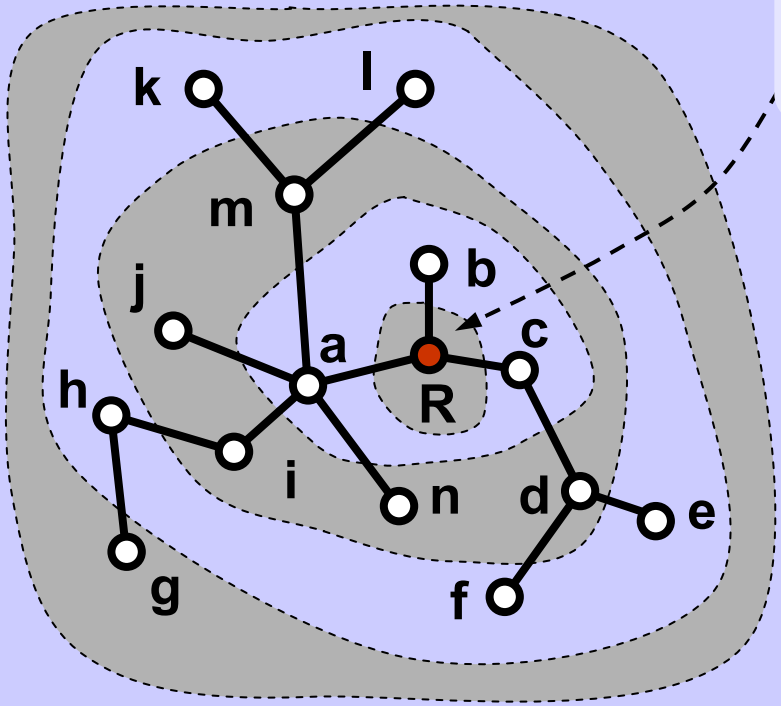
Příklady stromů



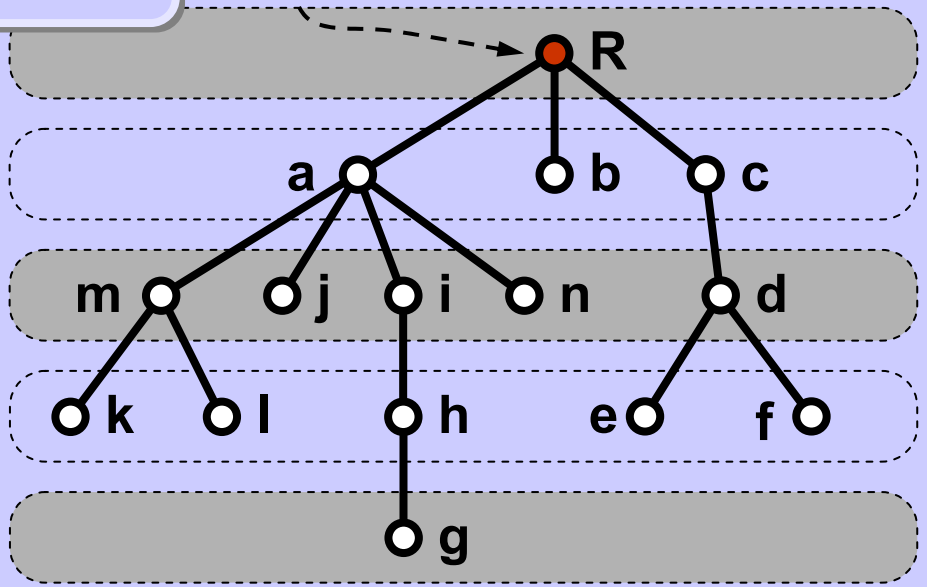
Vlastnosti stromů

1. Strom je souvislý, tj. mezi každými dvěma jeho uzly vede cesta.
2. Mezi každými dvěma uzly ve stromu vede jen jediná cesta.
3. Po odstranění libovolné hrany se strom rozpadá na dvě části.
4. Počet hran ve stromu je vždy o 1 menší než počet uzlů.

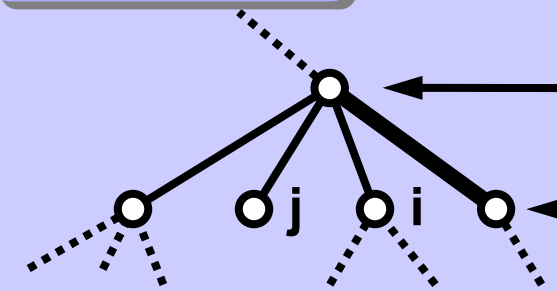
Kořenový strom / rooted tree



Kořen / root



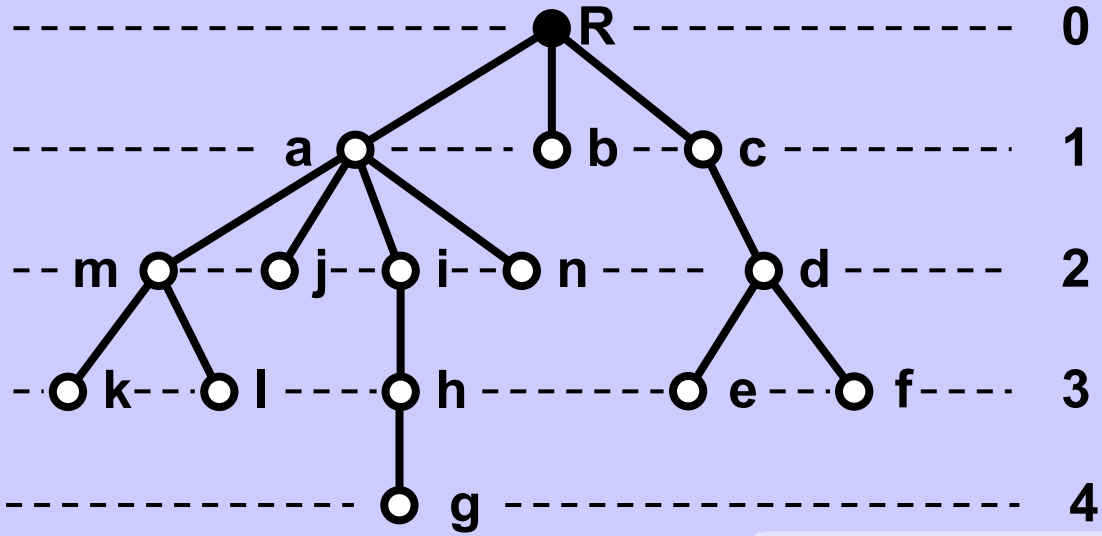
Názvosloví



Předchůdce, rodič / predecessor, parent

Následník, potomek / successor, child

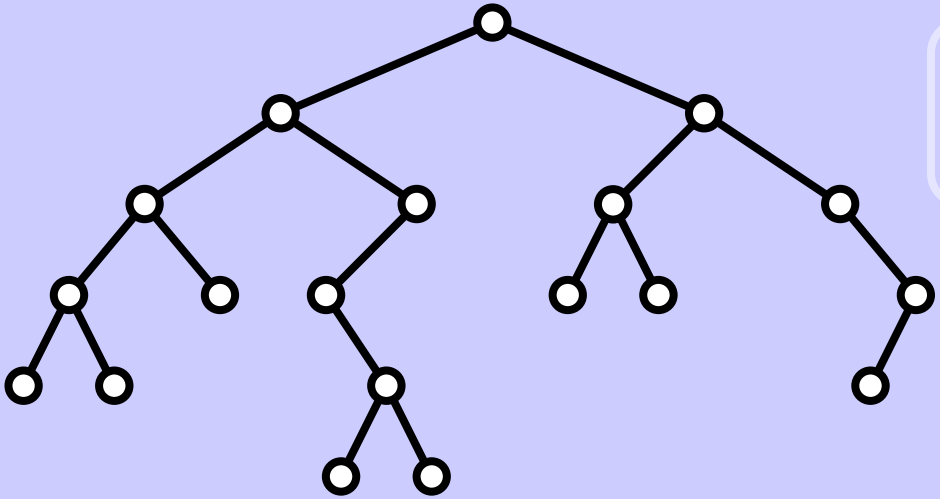
Hloubka / depth



Hloubka uzlu / node depth

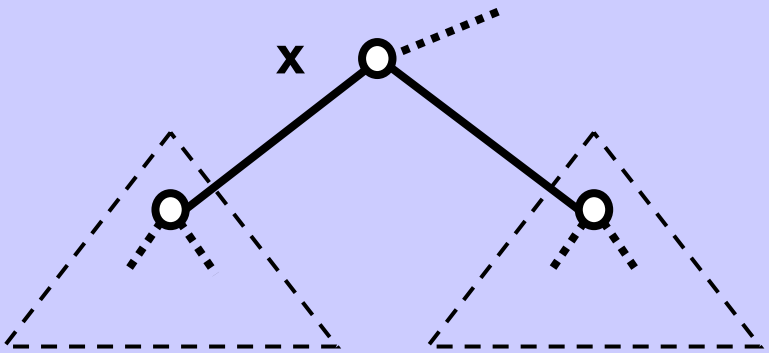
Hloubka stromu / tree depth

Binární (kořenový!!) strom / binary (rooted!!) tree



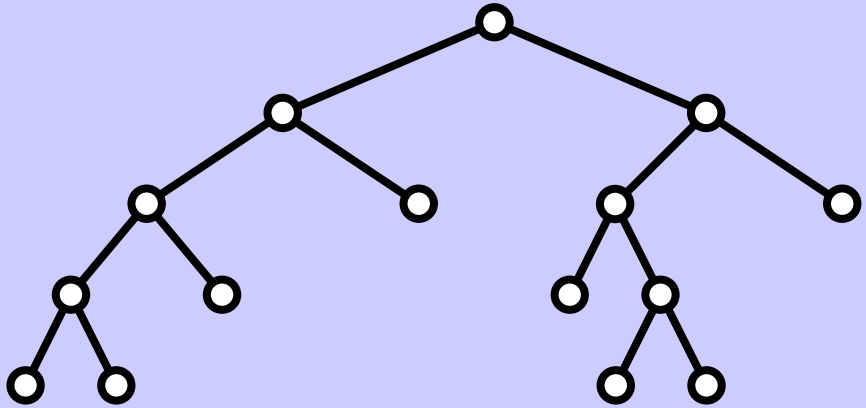
Počet potomků každého uzlu je 0,1, nebo 2.

Levý a pravý podstrom / left and right subtree



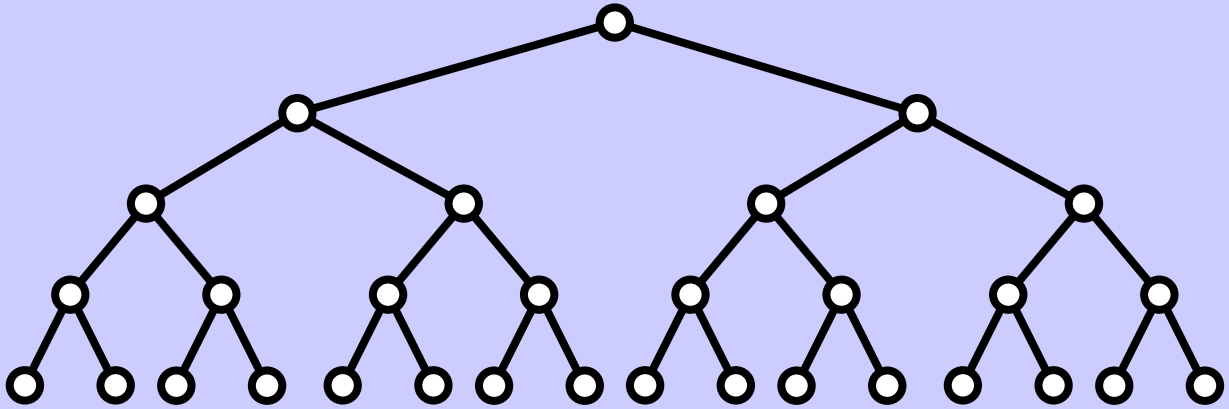
Podstrom uzlu x ..... levý ..... pravý

Pravidelný binární strom / regular binary tree



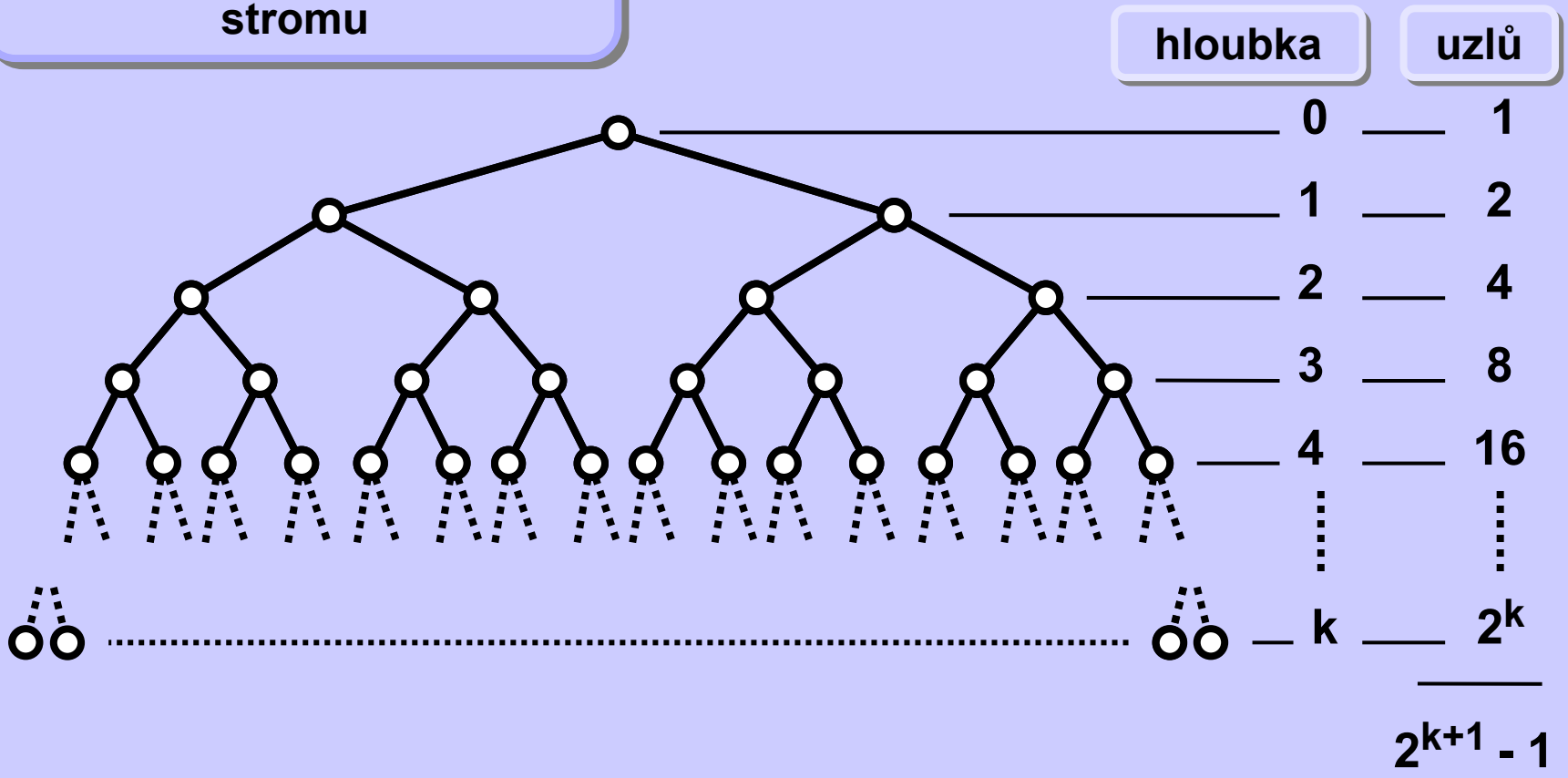
Počet potomků každého uzlu je jen 0 nebo 2.

Vyvážený strom / balanced tree



Hloubky všech listů jsou (víceméně) stejné.

Hloubka vyváženého (binárního a pravidelného !) stromu



$(2^{(\text{hloubka vyváženého stromu})+1} - 1) \sim$ uzlů

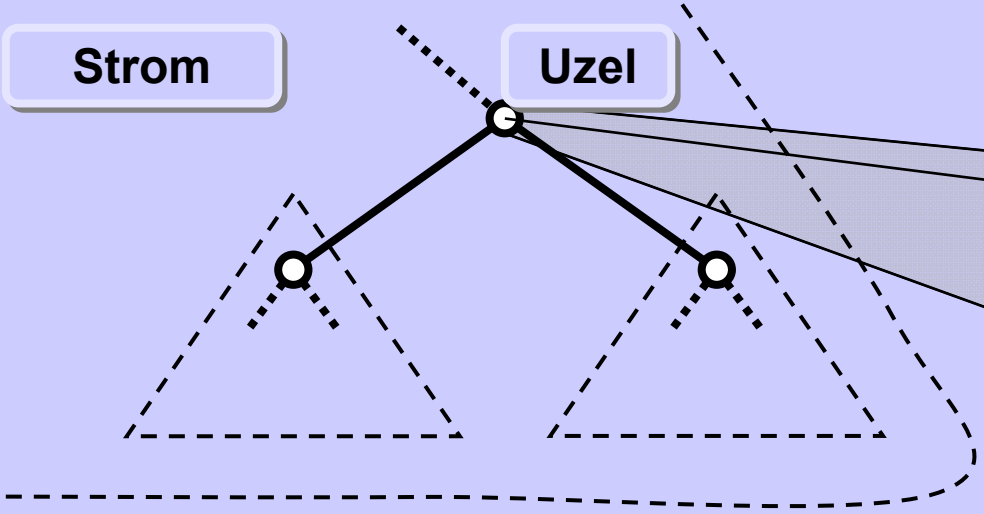
hloubka vyváženého stromu $\sim \log_2(\text{uzlů}+1) - 1 \sim \log_2(\text{uzlů})$

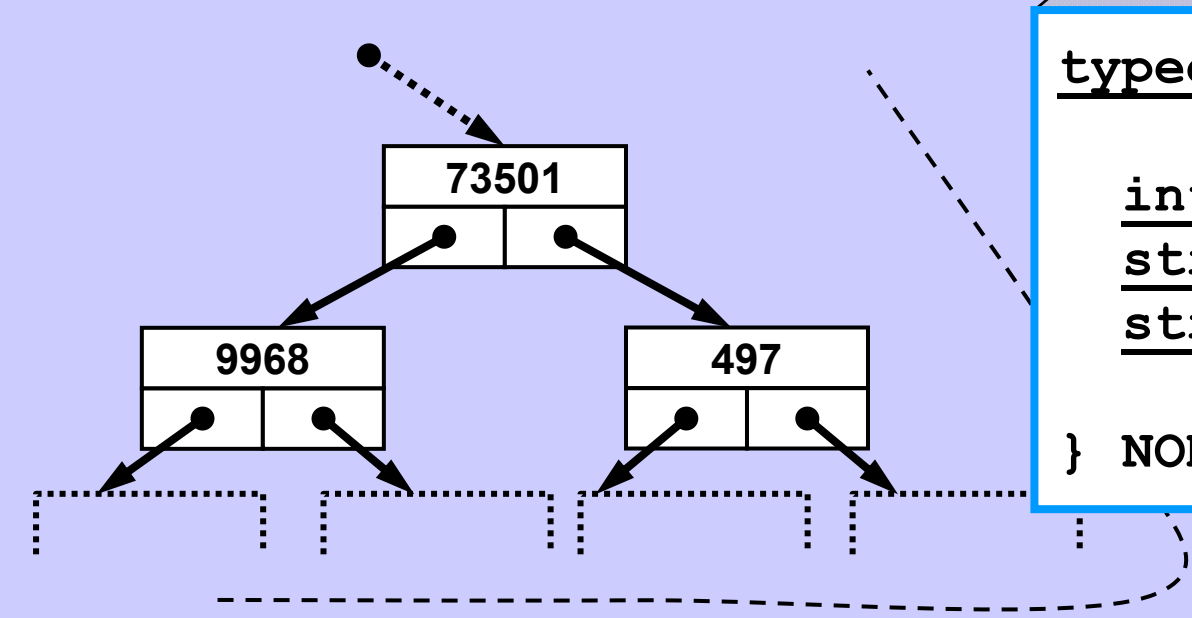
Implementace binárního stromu -- C

Strom

Uzel

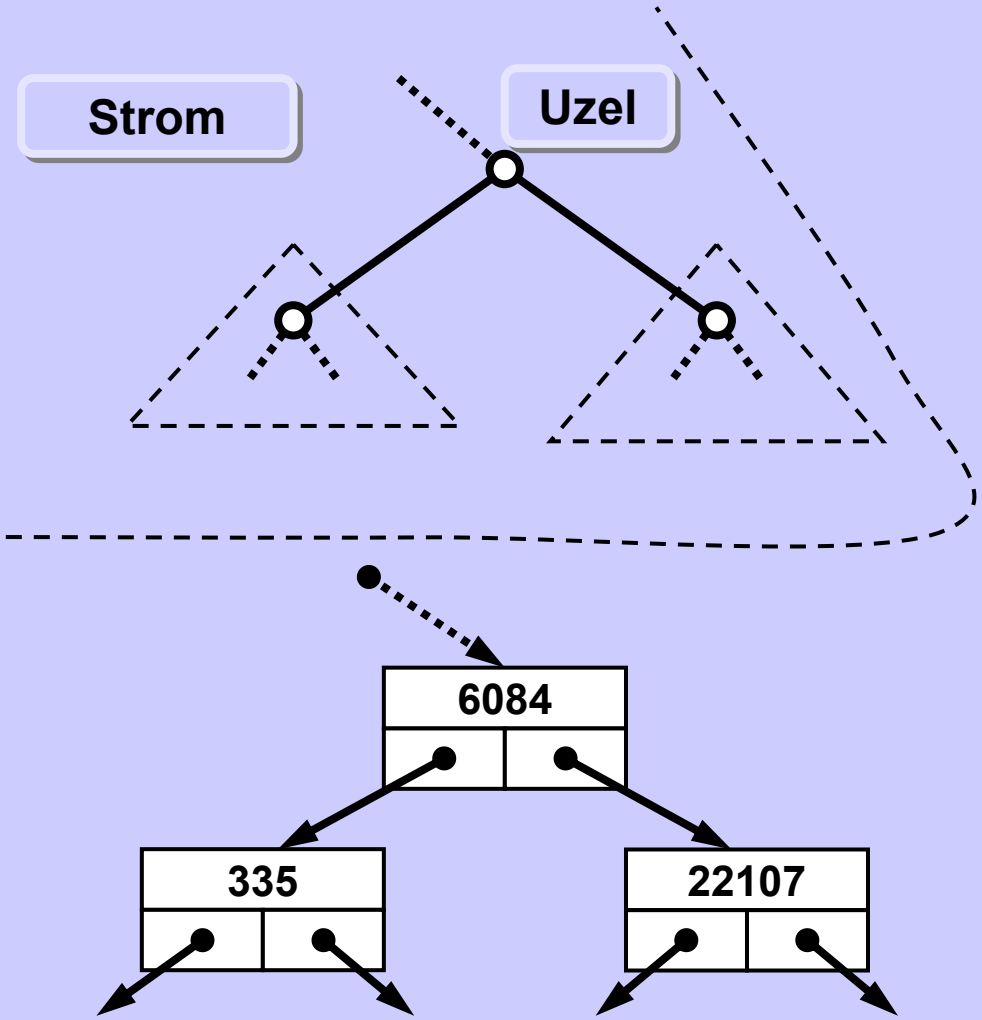
Reprezentace uzlu






```
typedef struct node {

   int key;
   struct node *left;
   struct node *right;

} NODE;
```

Implementace binárního stromu -- Java




```
public class Node {
   public Node left;
   public Node right;
   public int key;
   public Node(int k) {
      key = k;
      left = null;
      right = null;
   }
}

public class Tree {
   public Node root;
   public Tree() {
      root = null;
   }
}
```

Vybudování náhodného binárního stromu -- C

```
NODE *randTree(int depth) {
   NODE *pnode;
   if ((depth <= 0) || (random(10) > 7))
      return  (NULL);                          //stop recursion
   pnode = (NODE *) malloc(sizeof(NODE)); // create node
   if (pnode == NULL) {
      printf("%s", "No memory.");
      return NULL;
      }
  pnode->left = randTree(depth-1);      // make left subtree
  pnode->key = random(100);             // some value
  pnode->right = randTree(depth-1);     // make right subtree
  return pnode;                         // all done
 }
```

Příklad volání funkce

```
NODE *root;
root = randTree(4);
```

Poznámka. Volání random(n) vrací náhodné celé číslo od 0 do n-1. Zde neimplementováno.

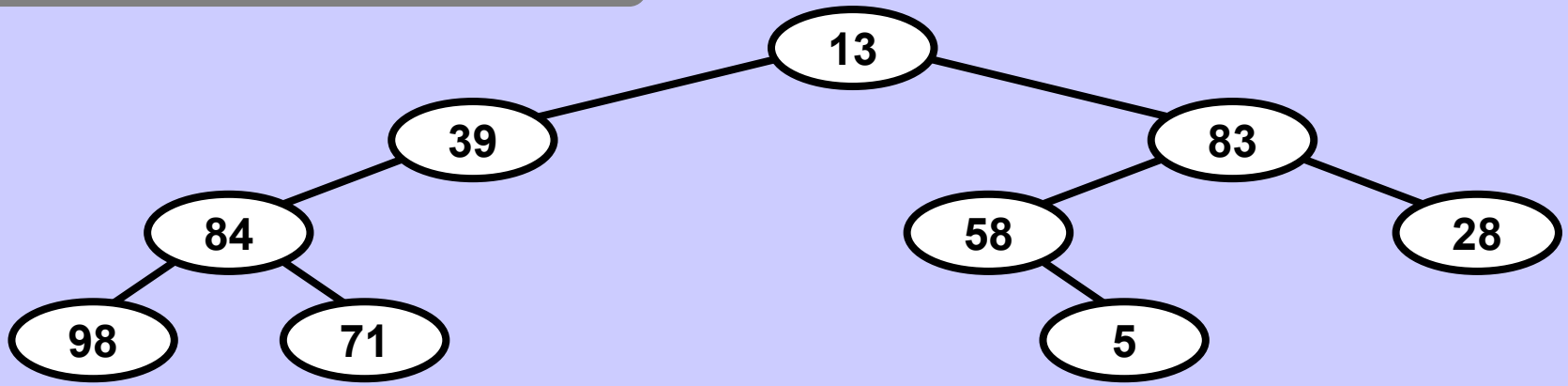
Vybudování náhodného binárního stromu -- Java

```
public Node randTree(int depth) {
  Node node;
  if ((depth <= 0) || ((int) Math.random()*10 > 7)
     return null;
                              // create node with a key value
  node = new Node((int)(Math.random()*100));

  node.left = randTree(depth-1);  // create left subtree
  node.right = randTree(depth-1); // create right subtree
  return node;                    // all done
}
```

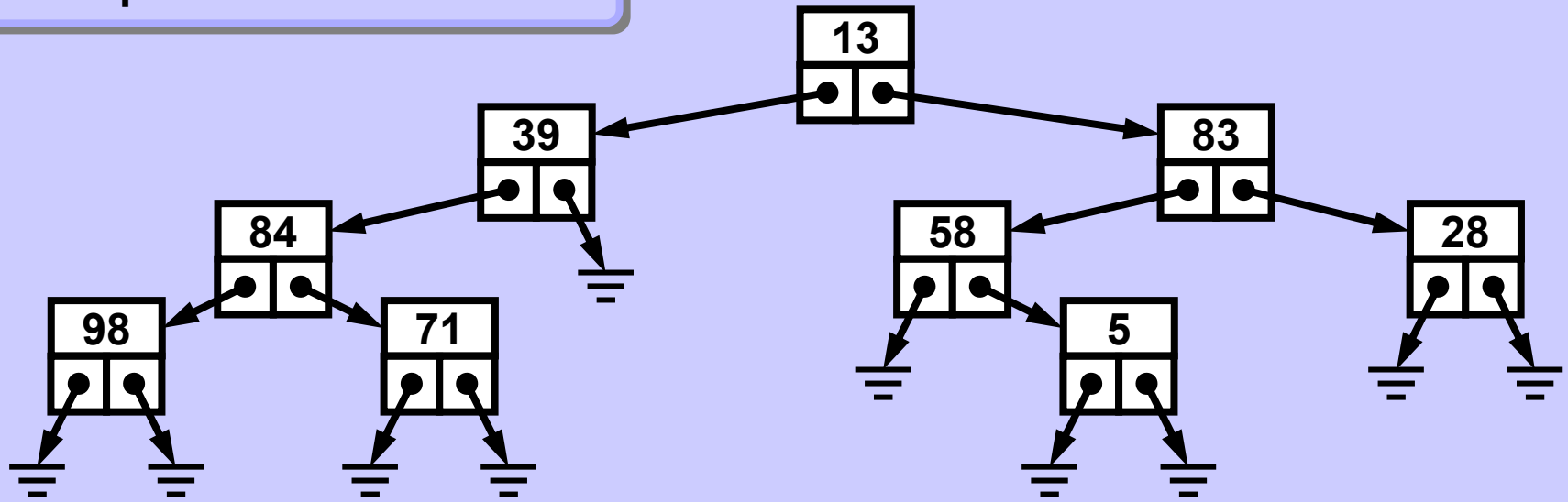
Příklad volání funkce

```
Node root;
root = randTree(4);
```

Náhodný binární strom

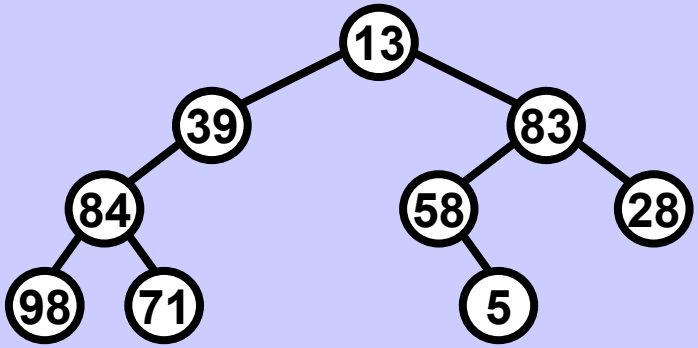


Reprezentace stromu



Průchod (binárním) stromem v pořadí Inorder

Strom



Průchod stromem v pořadí

INORDER

```
void listInorder( NODE *ptr) {
   if (ptr == NULL) return;
   listInorder(ptr->left);
   printf("%d ", ptr->key);
   listInorder(ptr->right);
}
```

Výstup

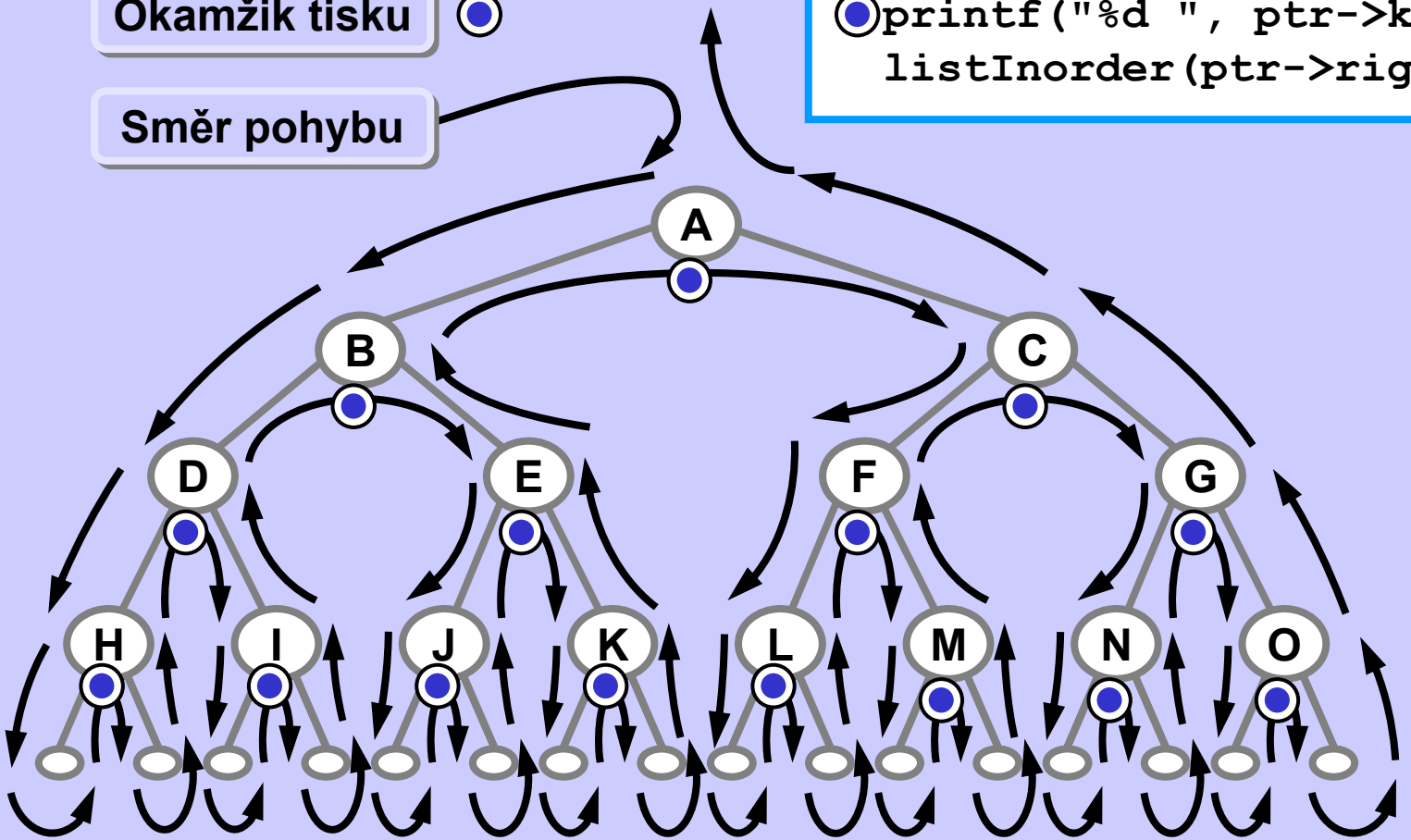
98 84 71 39 13 58 5 83 28

Pohyb ve stromu v průchodu Inorder

```
  listInorder(ptr->left);
  printf("%d ", ptr->key);
  listInorder(ptr->right);
```

Okamžik tisku

Směr pohybu

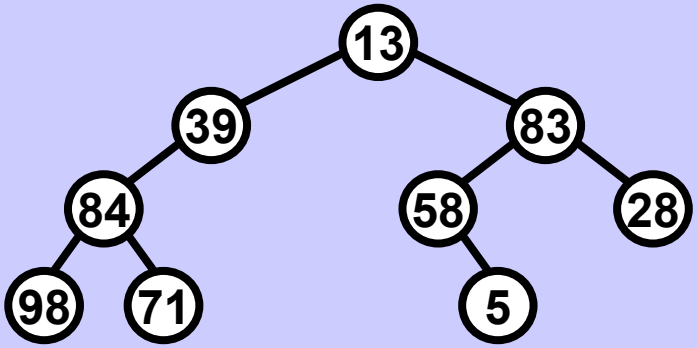


Výstup

H D I B J E K A L F M C N G O

Průchod (binárním) stromem v pořadí Preorder

Strom



Průchod stromem v pořadí

PREORDER

```
void listPreorder( NODE *ptr) {
  if (ptr == NULL) return;
  printf("%d ", ptr->key);
  listPreorder(ptr->left);
  listPreorder(ptr->right);
}
```

Výstup

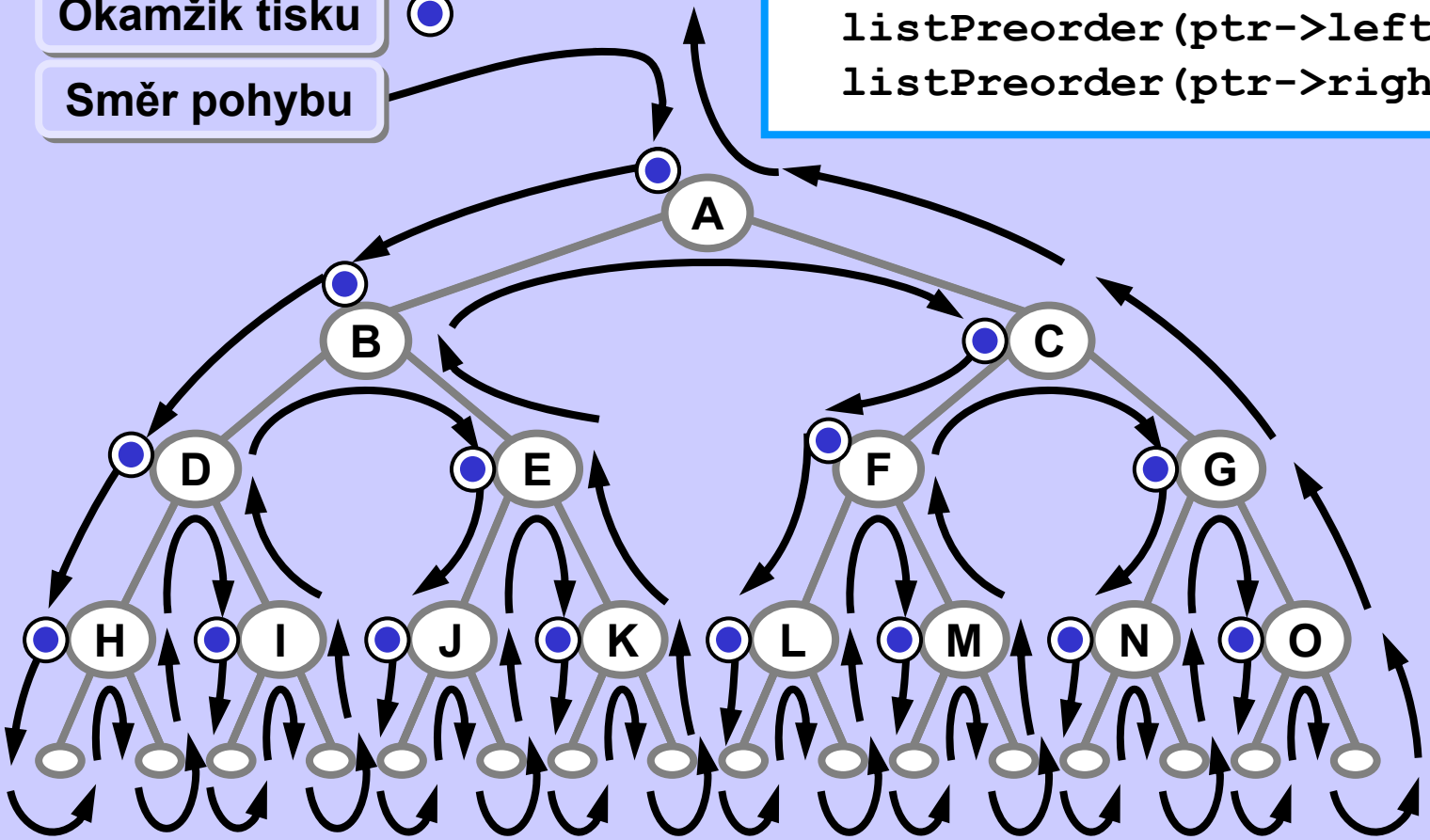
13 39 84 98 71 83 58 5 28

Pohyb ve stromu v průchodu Preorder

```
printf("%d ", ptr->key);
listPreorder(ptr->left);
listPreorder(ptr->right);
```

Okamžik tisku

Směr pohybu

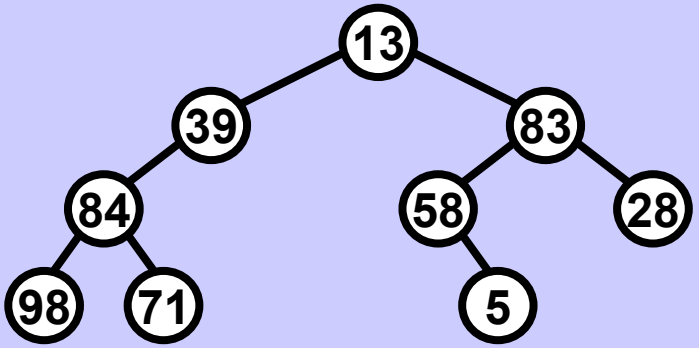


Výstup

A B D H I E J K C F L M G N O

Průchod (binárním) stromem v pořadí Postorder

Strom



Průchod stromem v pořadí

POSTORDER

```
void listPostorder( NODE *ptr) {
   if (ptr == NULL) return;
   listPostorder(ptr->left);
   listPostorder(ptr->right);
   printf("%d ", ptr->key);
}
```

Výstup

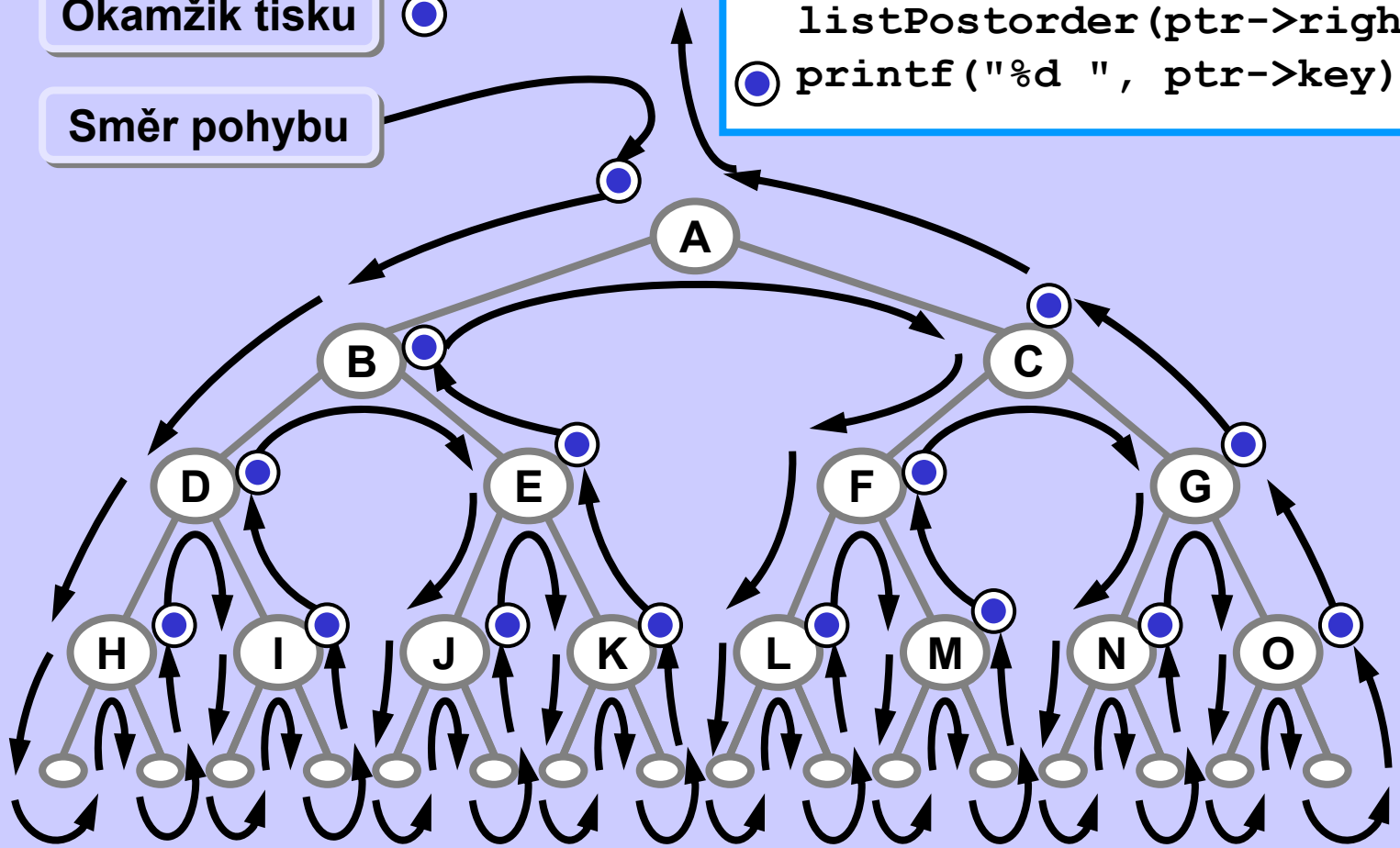
98 71 84 39 5 58 28 83 13

Pohyb ve stromu v průchodu Postorder

```
listPostorder(ptr->left);
listPostorder(ptr->right);
printf("%d ", ptr->key);
```

Okamžik tisku

Směr pohybu

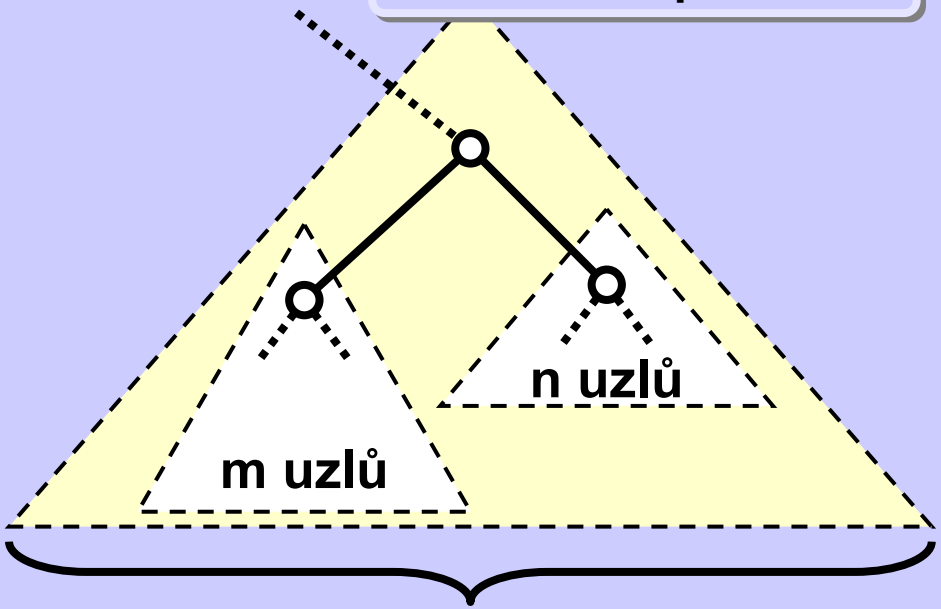


Výstup

H I D J K E B L M F N O G C A

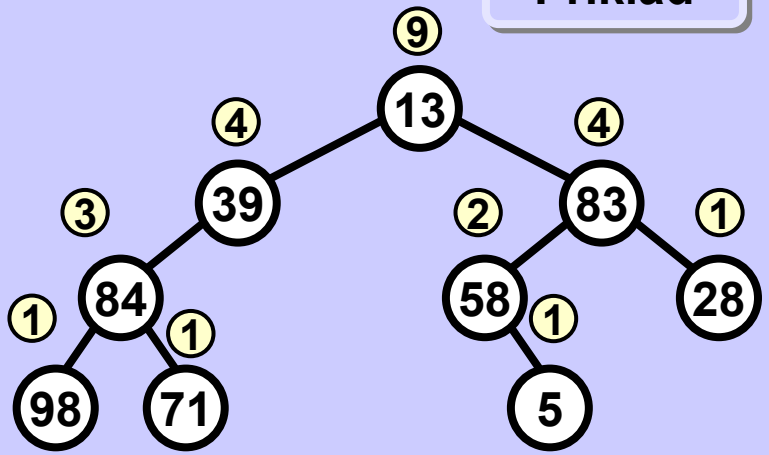
Velikost stromu (= počet uzlů) rekurzivně

Strom nebo podstrom



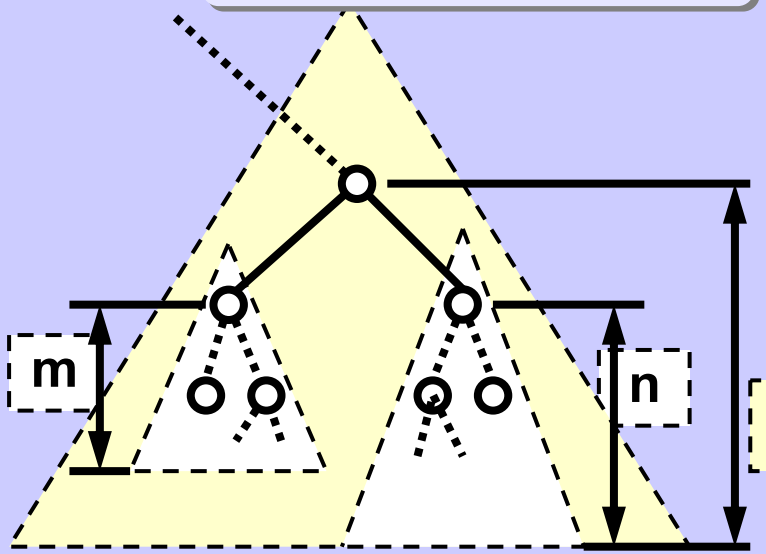
celkem ... m+n+1 uzlů

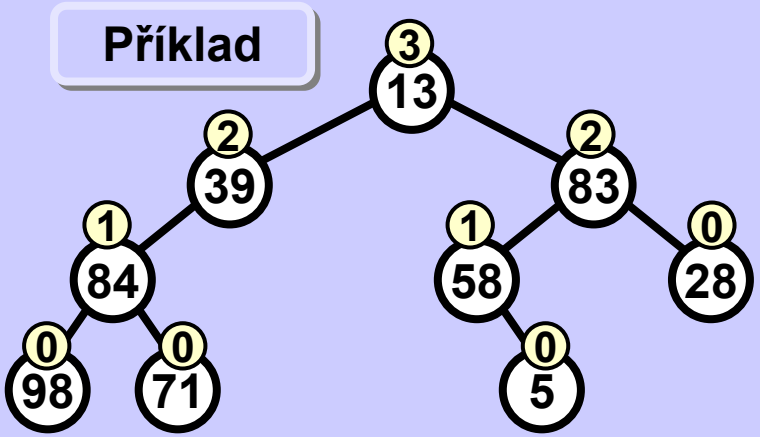
Příklad




```
int count(NODE *ptr) {
  if (ptr == NULL) return (0);
  return (count(ptr->left) + count(ptr->right)+1);
}
```

Hloubka stromu (= max hloubka uzlu) rekurzivně



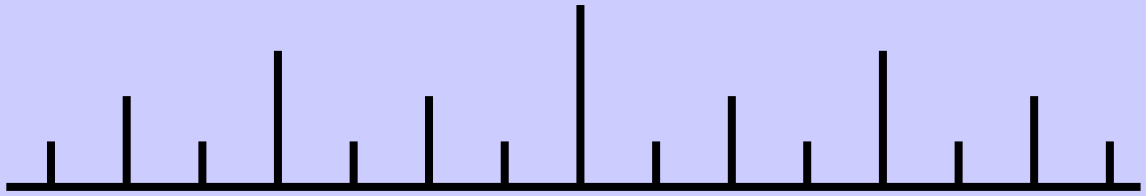



```
int depth(NODE *ptr) {
  if (ptr == NULL) return (-1);
  return ( max(depth(ptr->left), depth(ptr->right) )+1 );
}
```

Jednoduchý příklad rekurze

Binární pravítko

Rysky pravítka



Délky rysek

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

Kód vypíše délky rysek pravítka

```
void ruler(int val) {
  if (val < 1) return;

  ruler(val-1);
  print(val);
  ruler(val-1);
}
```

```
Call: ruler(4);
```

Domácí úkol: Ternárně!:

Jednoduchý příklad rekurze

Binární pravítko vs. průchod inorder

Pravítko

```
void ruler(int val) {
  if (val < 1) return;

  ruler(val-1);
  print(val);
  ruler(val-1);
}
```

Inorder

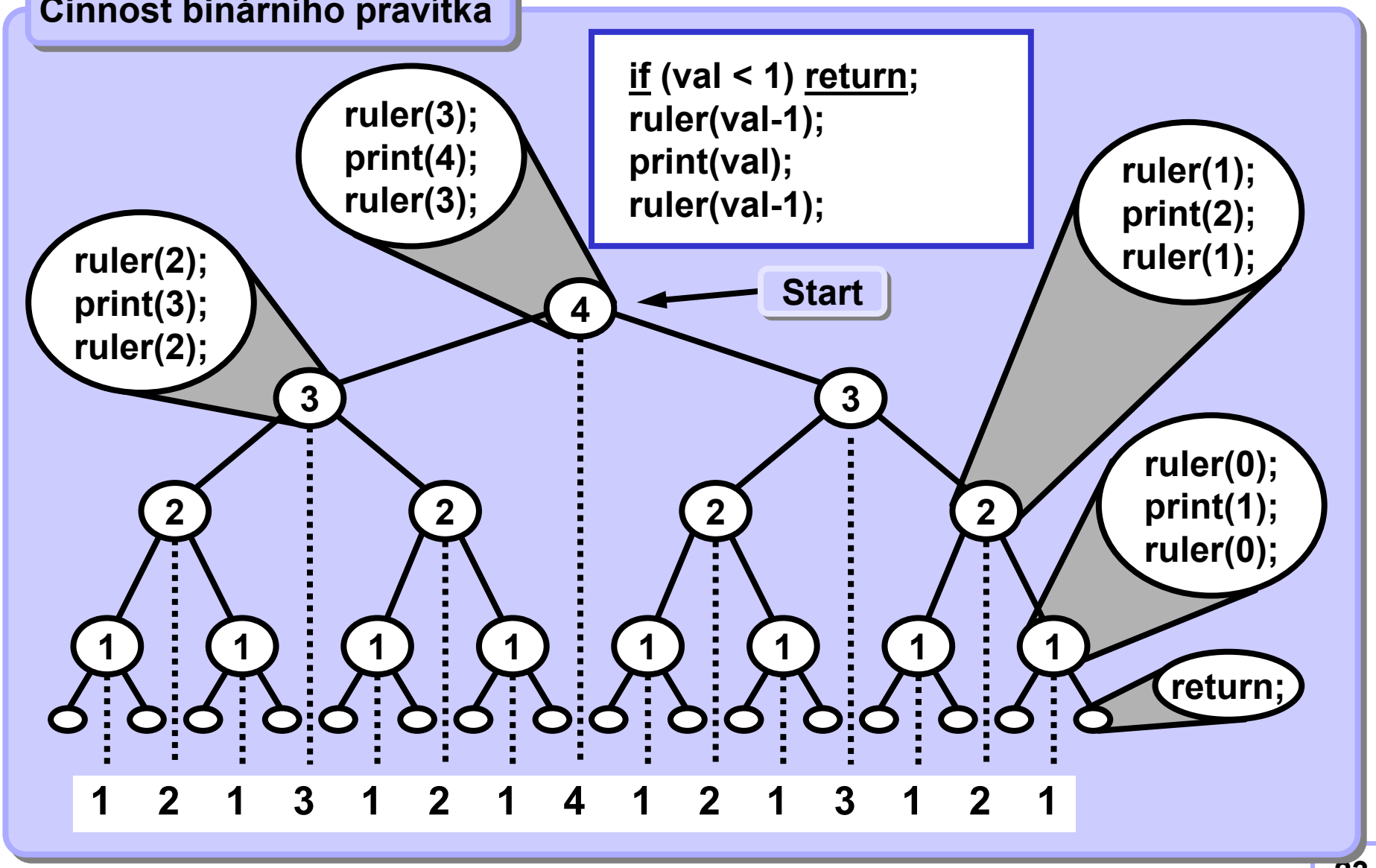
```
void listInorder( NODE *ptr) {
  if (ptr == NULL) return;

  listInorder(ptr->left);
  printf("%d ", ptr->key);
  listInorder(ptr->right);
}
```

Strukturní podobnost, shoda!

Výstup pravítka 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

Jednoduchý příklad rekurze

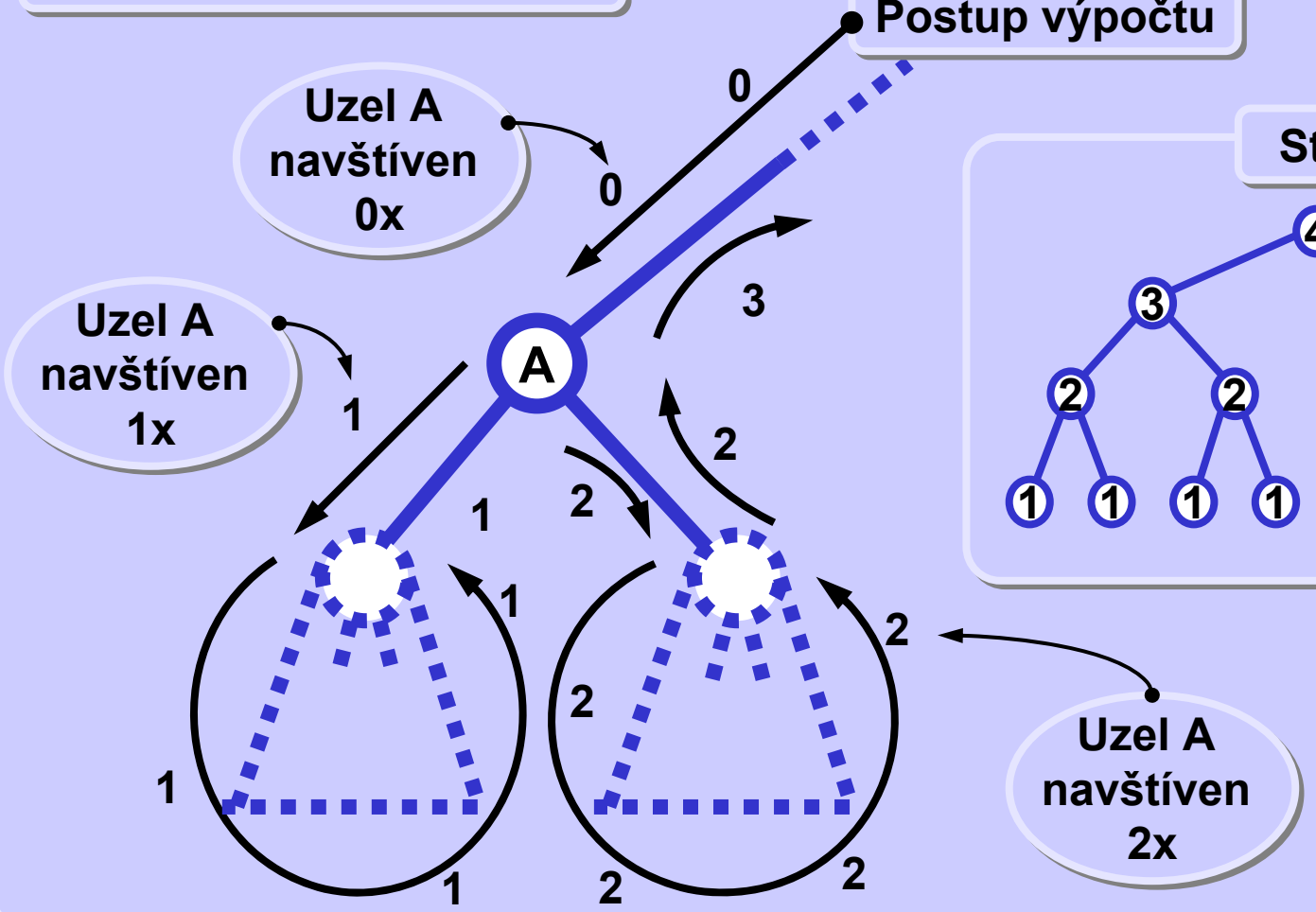
Činnost binárního pravítka



Zásobník implementuje rekurzi

Binární pravítko bez rekurze

Detail stromu rekurze



Zásobník implementuje rekurzi

Standardní strategie

Při používání zásobníku:

Je-li to možné, zpracovávej jen data ze zásobníku.

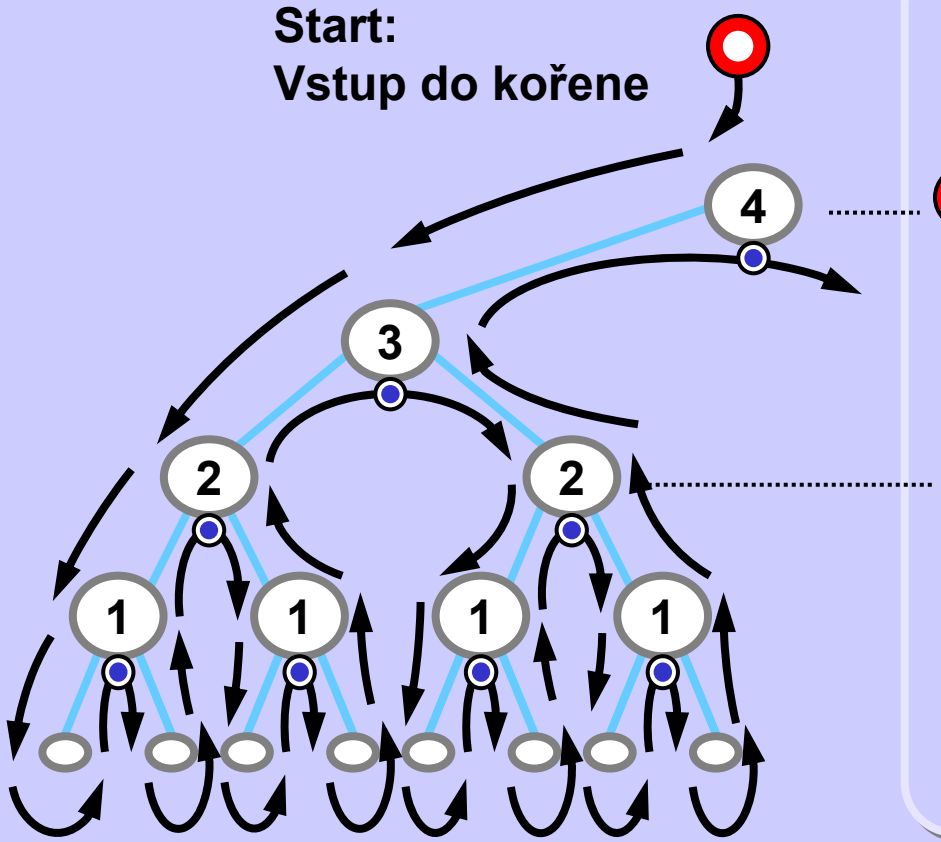
Standardní postup

Ulož první uzel (první zpracovávaný prvek) do zásobníku.
Každý další uzel (zpracovávaný prvek) ulož také na zásobník.
Zpracovávej vždy pouze uzel na vrcholu zásobníku.
Když jsi s uzlem (prvkem) hotov, ze zásobníku ho odstraň.
Skonči, když je zásobník prázdný.

Zásobník implementuje rekurzi

Každý záběr v následující sekvenci předvádí situaci PŘED zpracováním uzlu.

Aktuální pozice



Zásobník

hodnota	návštěv
4	0

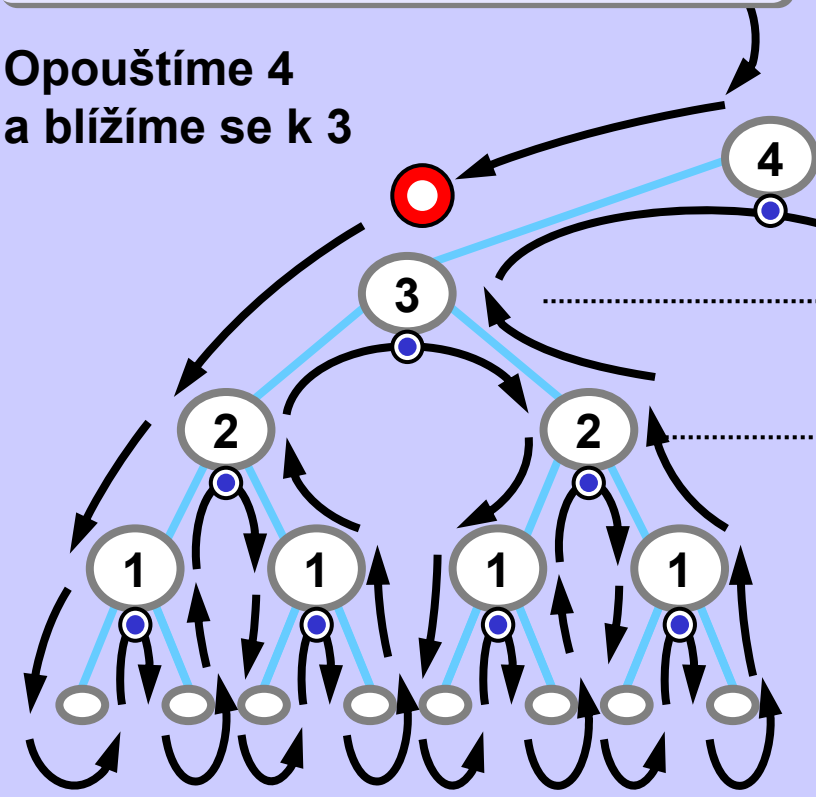
push(4,0)

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze

Opouštíme 4
a blížíme se k 3



Zásobník

hodnota	návštěv
4	1
3	0

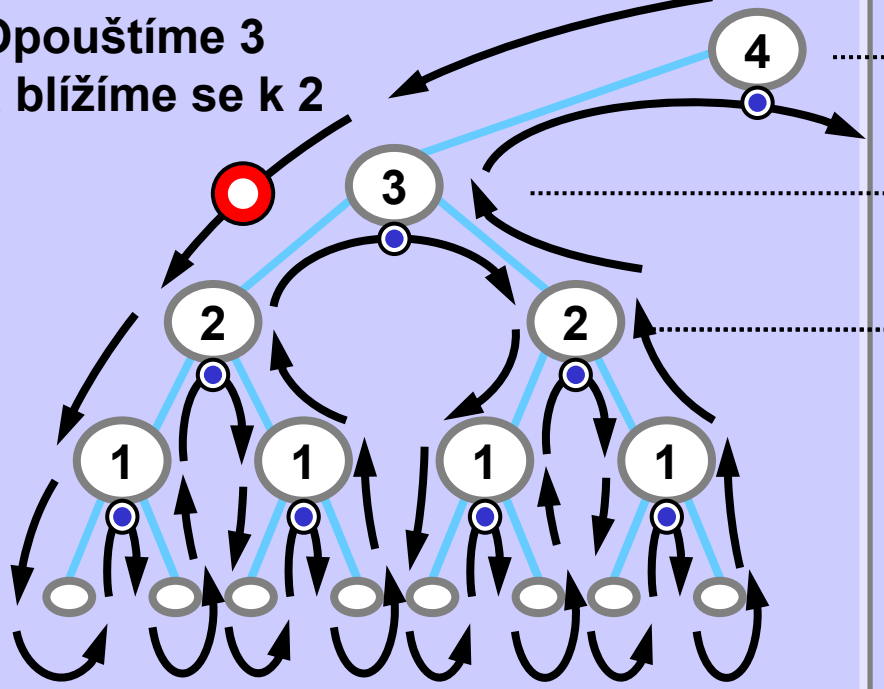
push(3,0)

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze

Opouštíme 3
a blížíme se k 2



Zásobník

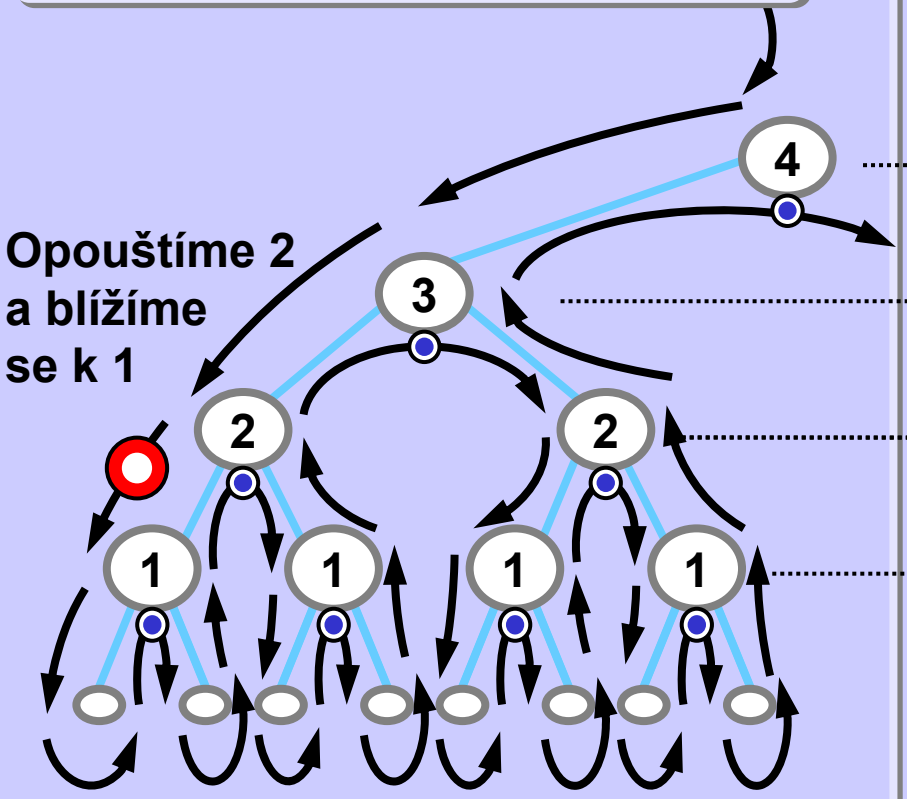
hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	0

push(2,0)

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze



Opouštíme 2
a blížíme
se k 1

Zásobník

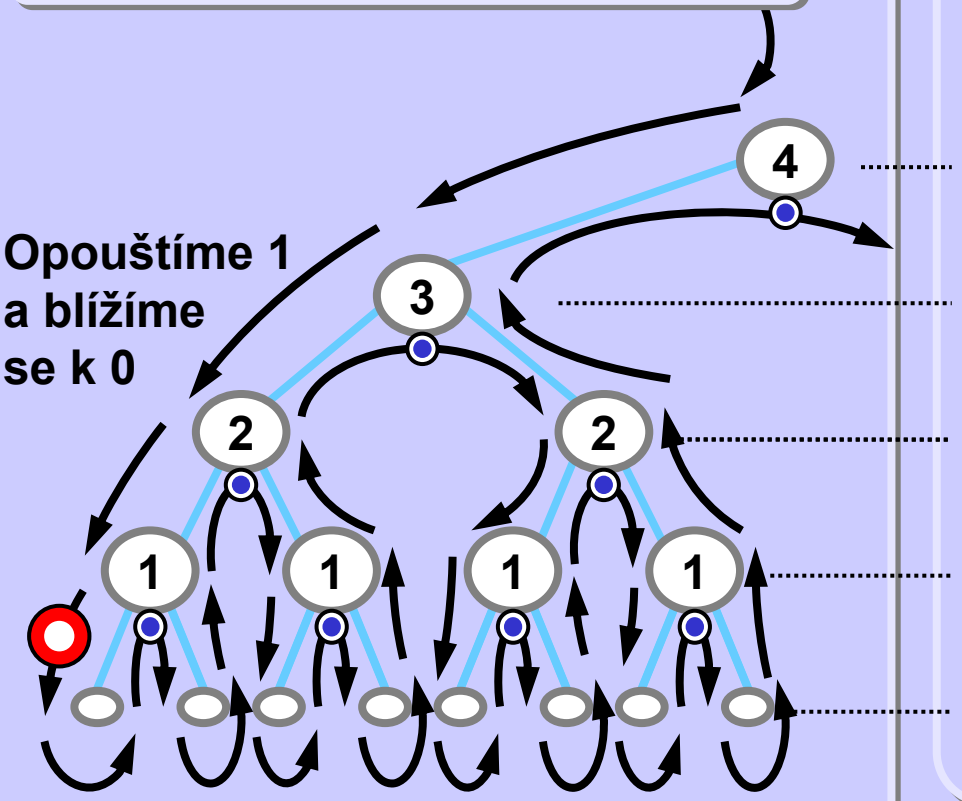
hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	1
1	0

push(1,0)

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze



Opouštíme 1
a blížíme
se k 0

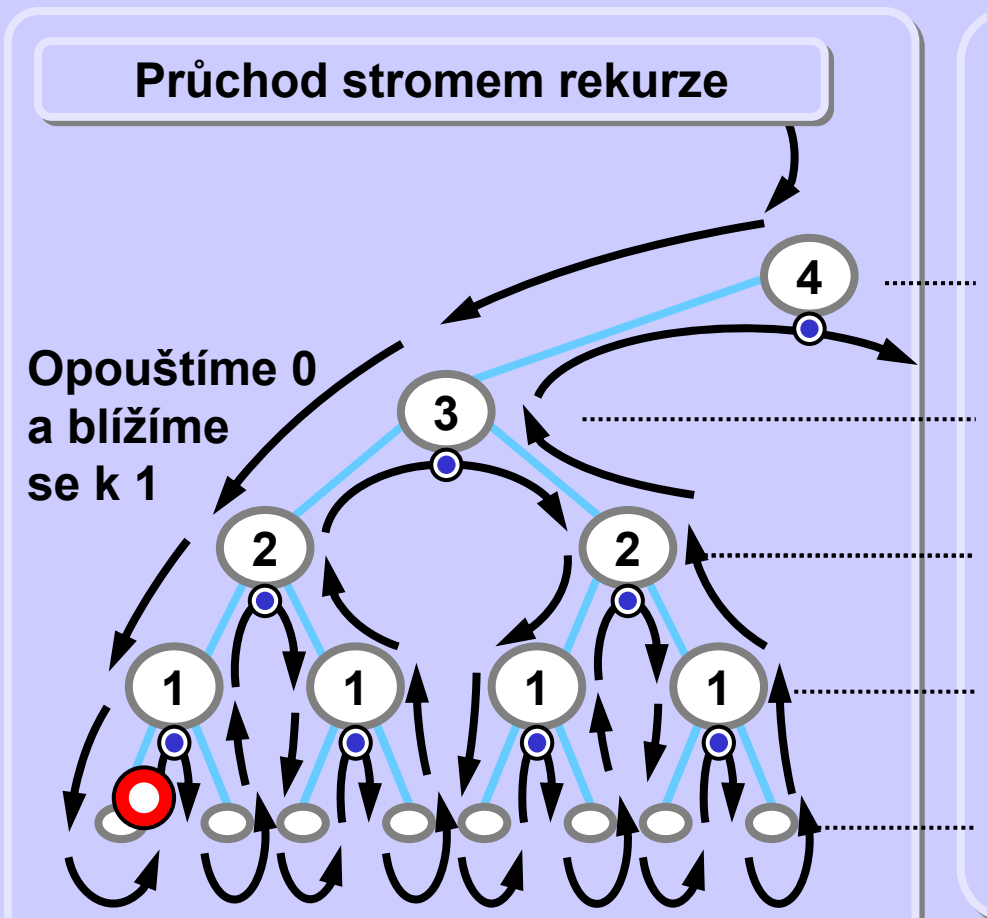
Zásobník

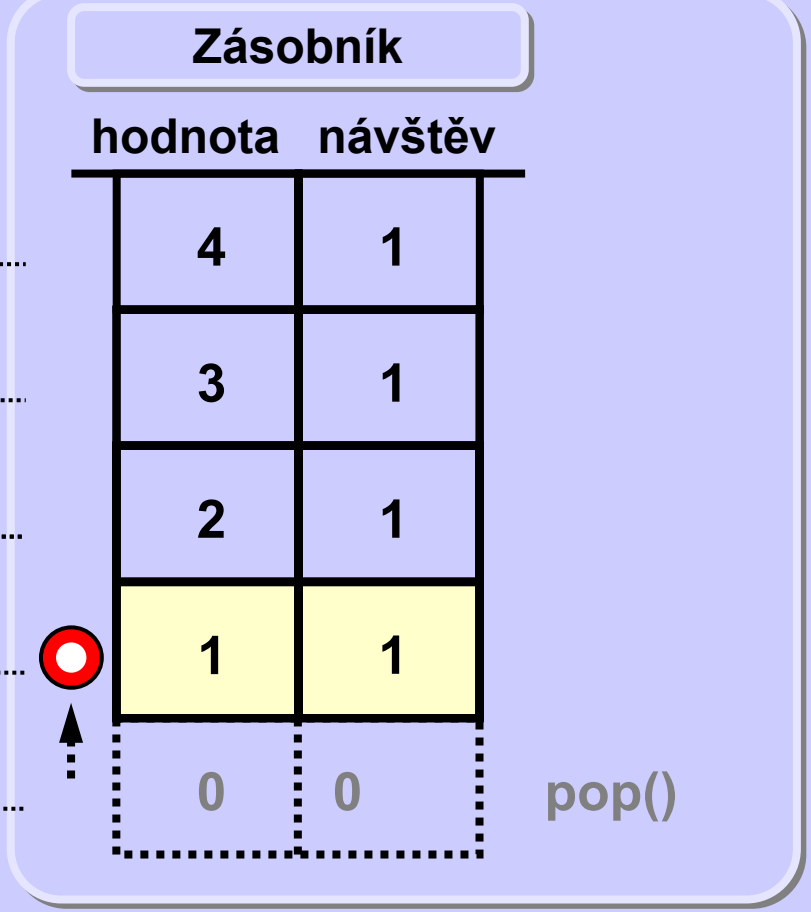
hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	1
1	1
0	0

push(0,0)

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

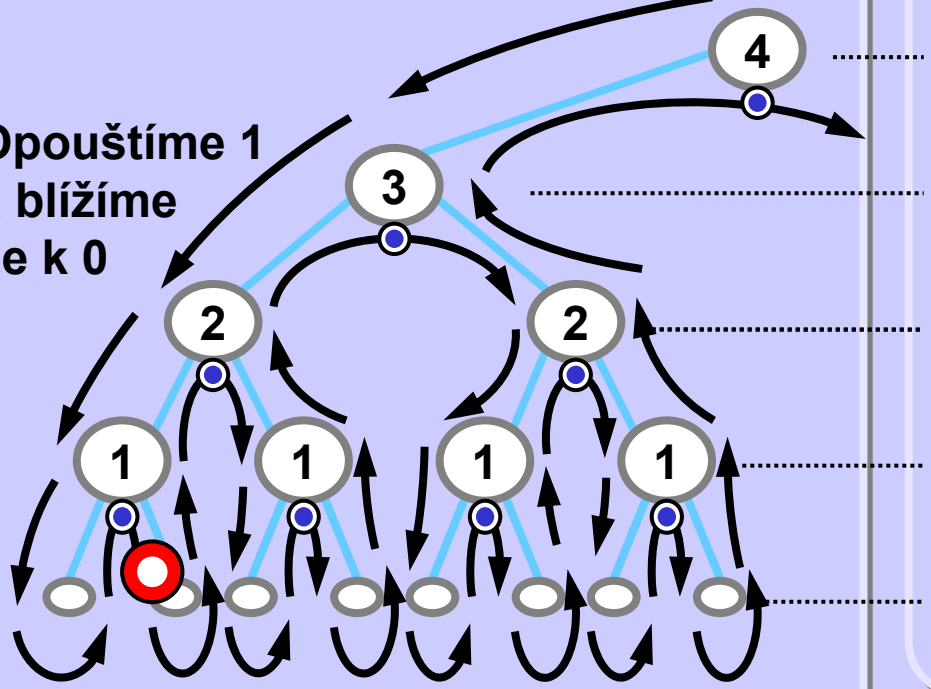




Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze



Zásobník

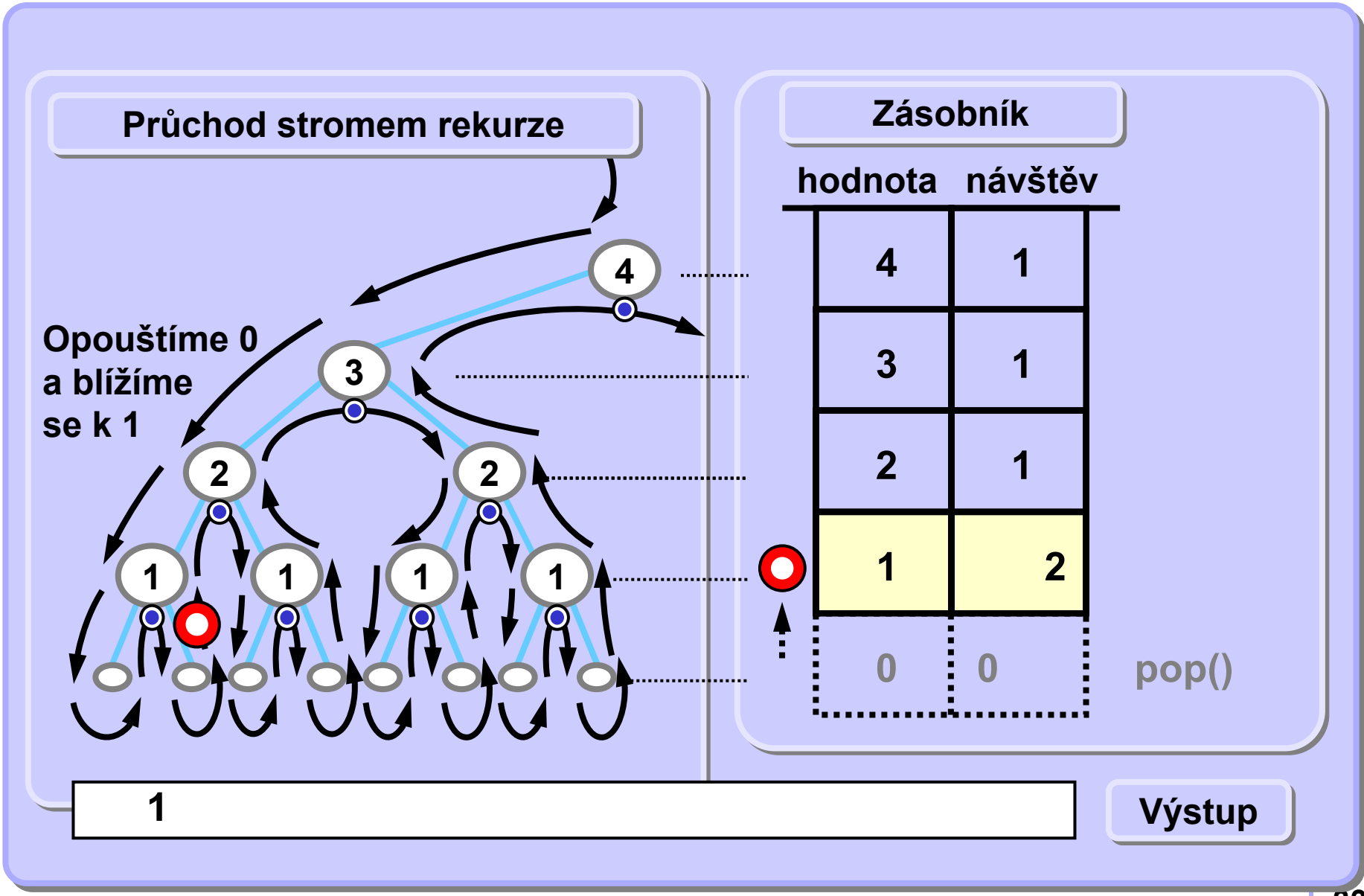
hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	1
1	2
0	0

push(0,0)

1

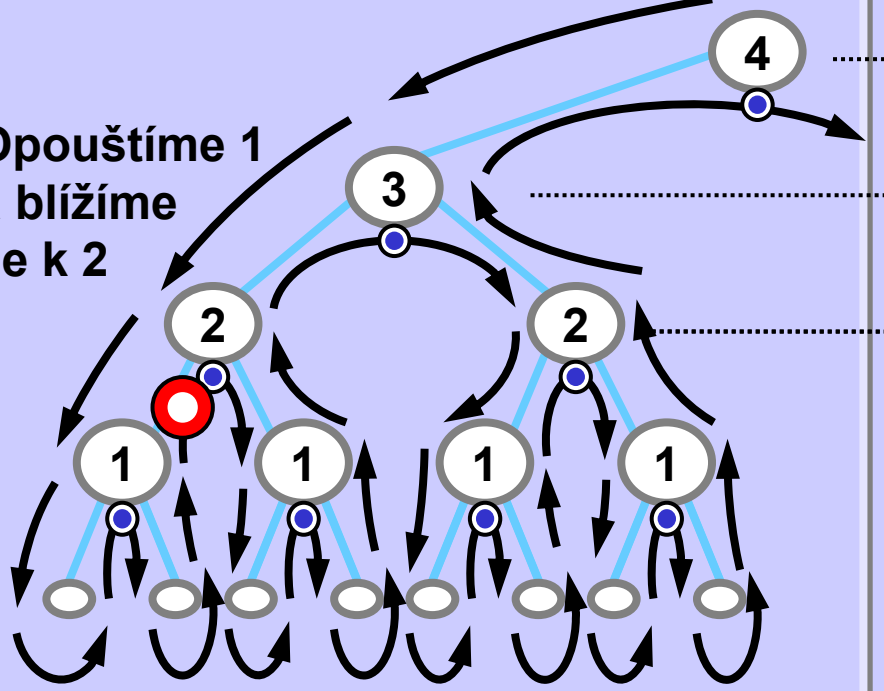
Výstup

Zásobník implementuje rekurzi



Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze



Zásobník

hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	1
1	2

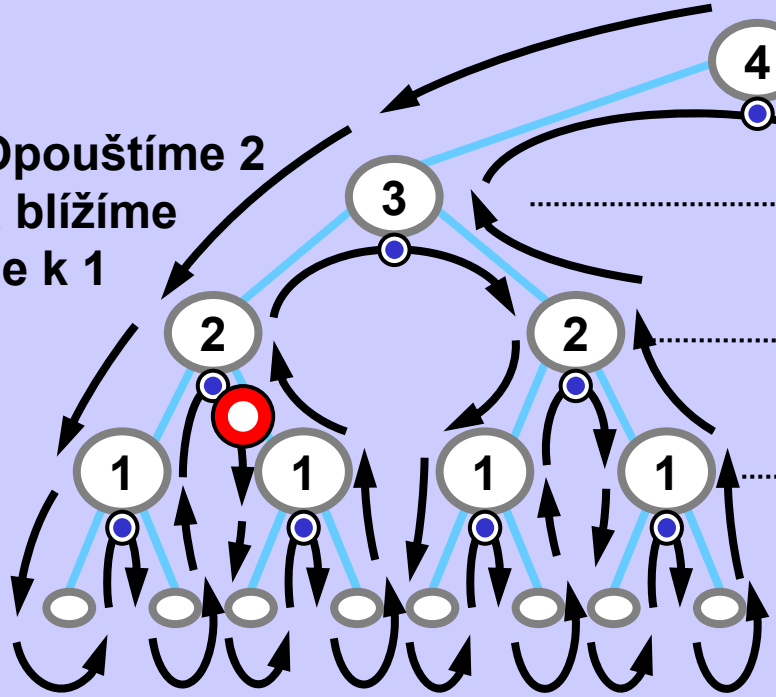
pop()

1

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze



Opouštíme 2
a blížíme
se k 1

Zásobník

hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	2
1	0

push(1,0)

1 2

Výstup

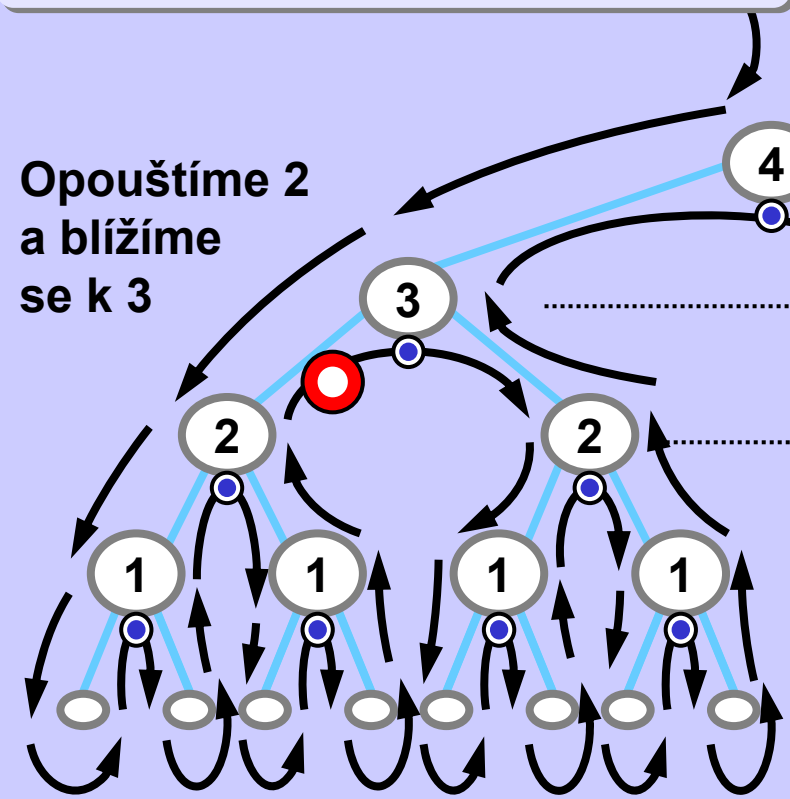
atd…

Zásobník implementuje rekurzi

… po chvíli …

Průchod stromem rekurze

Opouštíme 2
a blížíme
se k 3



Zásobník

hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	2

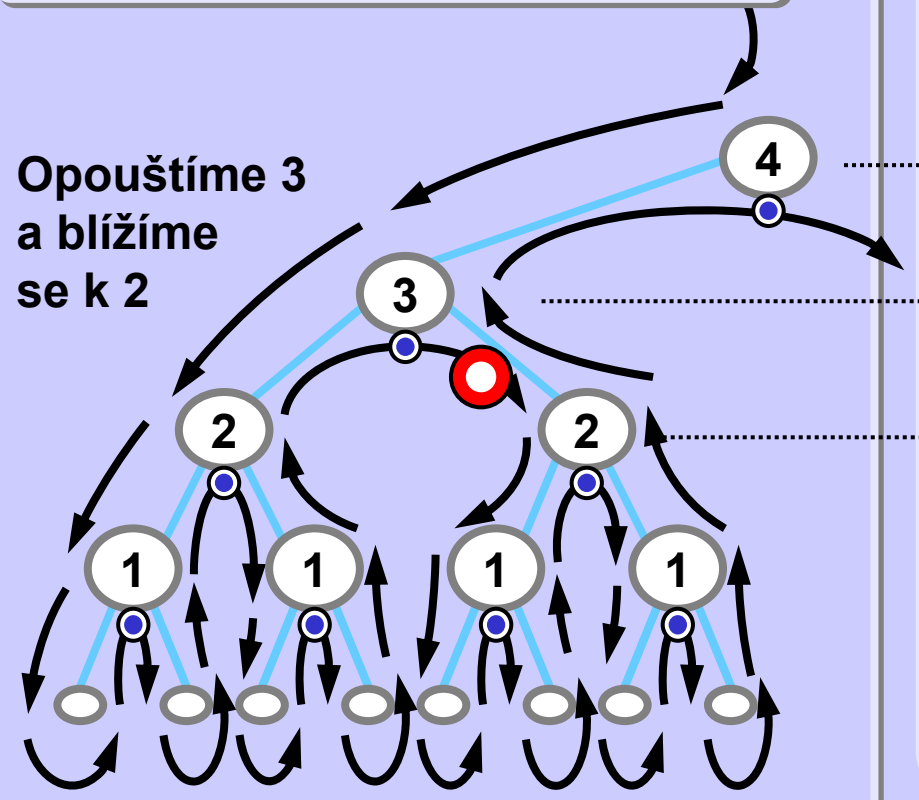
pop()

1 2 1

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Průchod stromem rekurze



Zásobník

hodnota	návštěv
4	1
3	2
2	0

push(2,0)

1 2 1 3

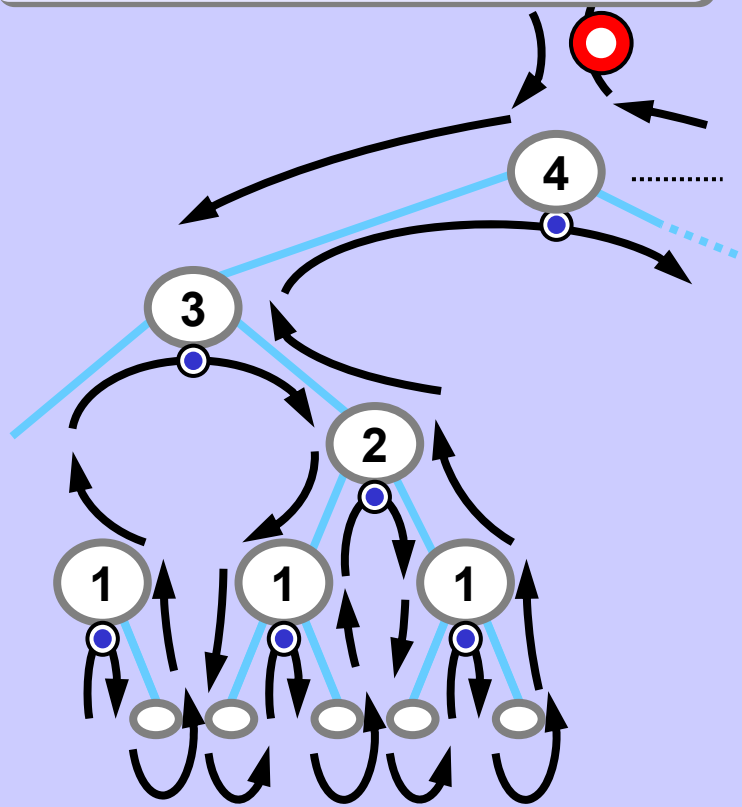
Výstup

atd…

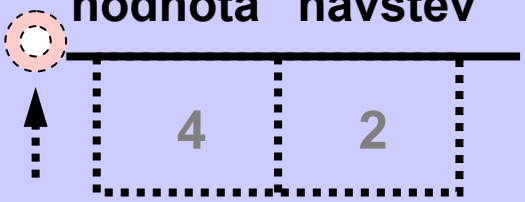
Zásobník implementuje rekurzi

… a je hotovo

Průchod stromem rekurze



Zásobník



(empty == true)

pop()

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

Rekurzivní pravítko bez rekurzivního volání
Pseudokód (skoro kód :-)) pro objektový přístup

```
while (stack.empty() == false) {
      if (stack.top.hodnota == 0) stack.pop();
      if (stack.top.navstev == 0) {
          stack.top.navstev++;
          stack.push(stack.top.hodnota-1,0);
          }
      if (stack.top.navstev == 1) {
          print(stack.top.hodnota);
          stack.top.navstev++;
          stack.push(stack.top.hodnota-1,0);
          }
      if (stack.top.navstev==2) stack.pop();
}
```

Zásobník implementuje rekurzi

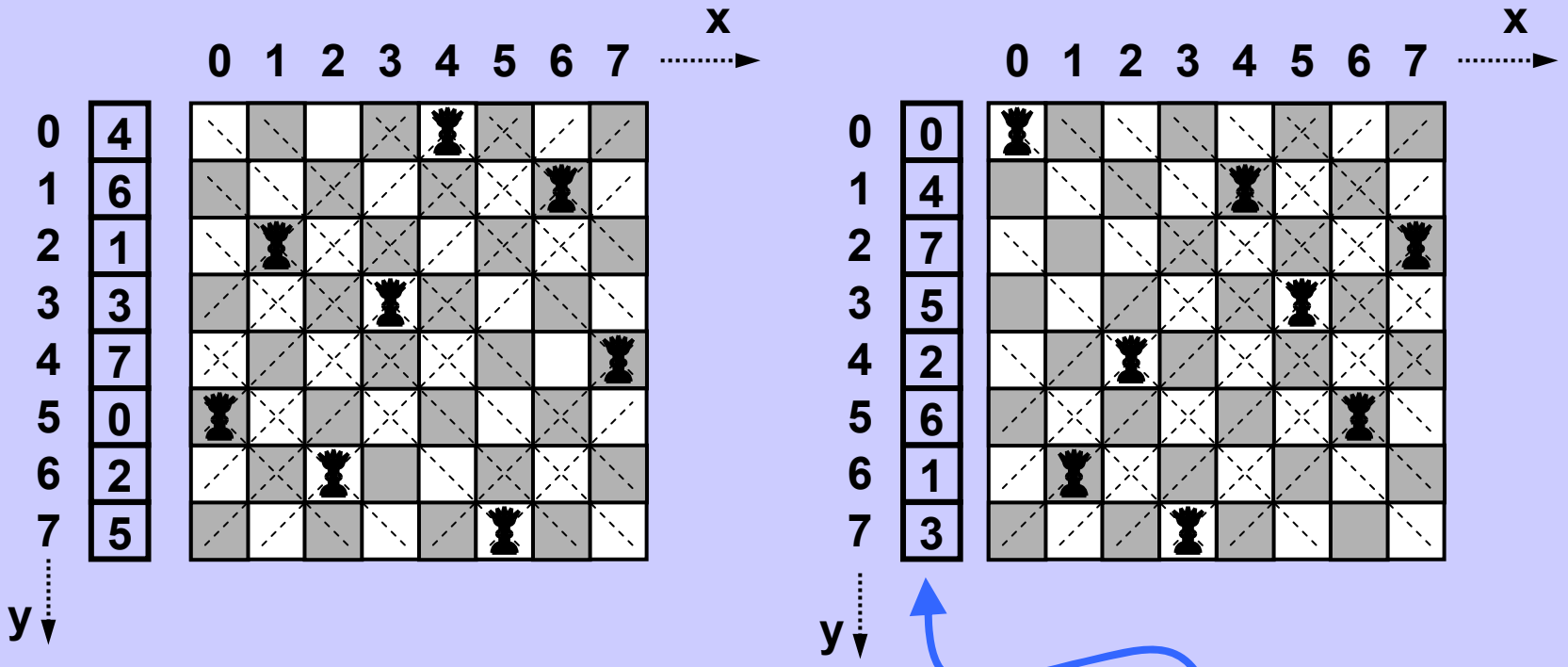
Rekurzivní pravítko bez rekurzivního volání, jednoduchá implementace polem

```
int zasHodn[10];  int zasNavst[10];  int SP;
                                    // SP = Stack Pointer
void ruler2() {
  while (SP >= 0) {
    if (zasHodn[SP] == 0) SP--;           // pop
    if (zasNavst[SP] == 0) {              // první návštěva
       zasNavst[SP]++; SP++;
       zasHodn[SP] = zasHodn[SP-1]-1;     // jdi doleva
       zasNavst[SP] = 0;
    }
    if (zasNavst[SP] == 1) {              // druhá návštěva
       printf("%d%s", zasHodn[SP], " ");// zpracuj uzel
       zasNavst[SP]++; SP++;
       zasHodn[SP] = zasHodn[SP-1]-1;     // jdi doprava
       zasNavst[SP] = 0;
    }
    if (zasNavst[SP] == 2) SP --;         // pop: uzel hotov
} }
```

Snadné prohledávání s návratem (Backtrack)

Problém osmi dam na šachovnici

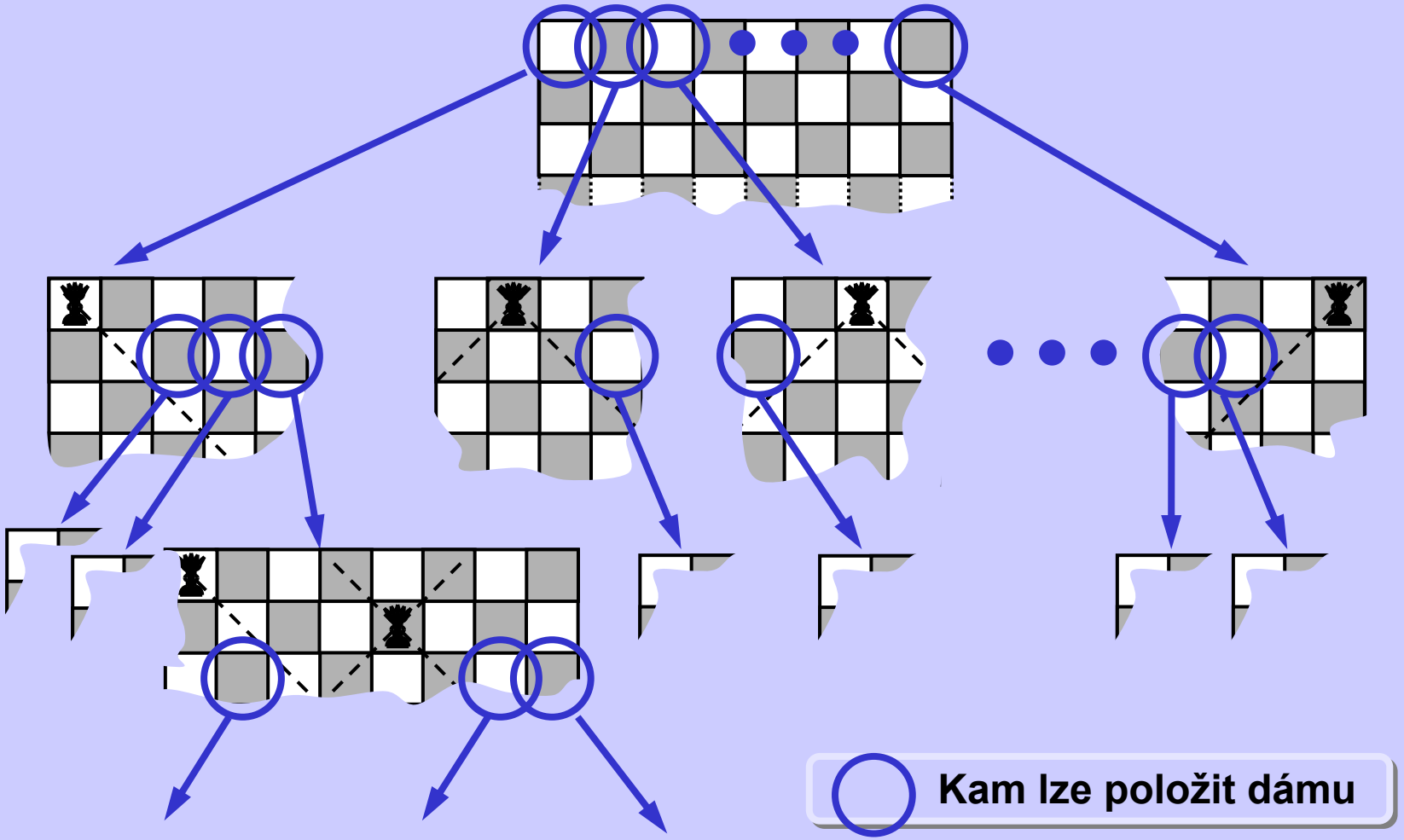
Některá řešení



Jediná datová struktura xPosArray[ ] (viz kód)

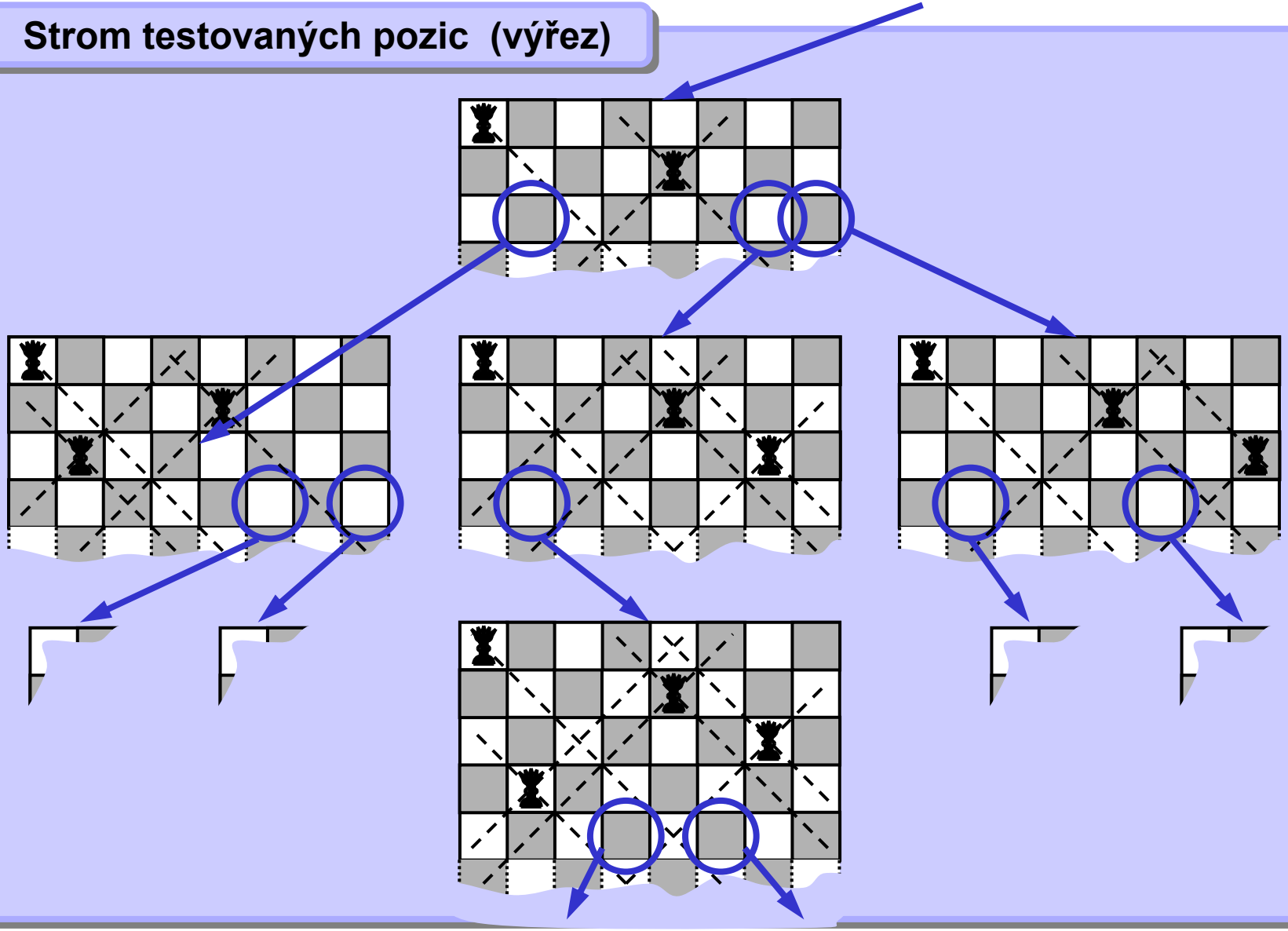
Snadné prohledávání s návratem (Backtrack)

Strom testovaných pozic (kořen a několik potomků)



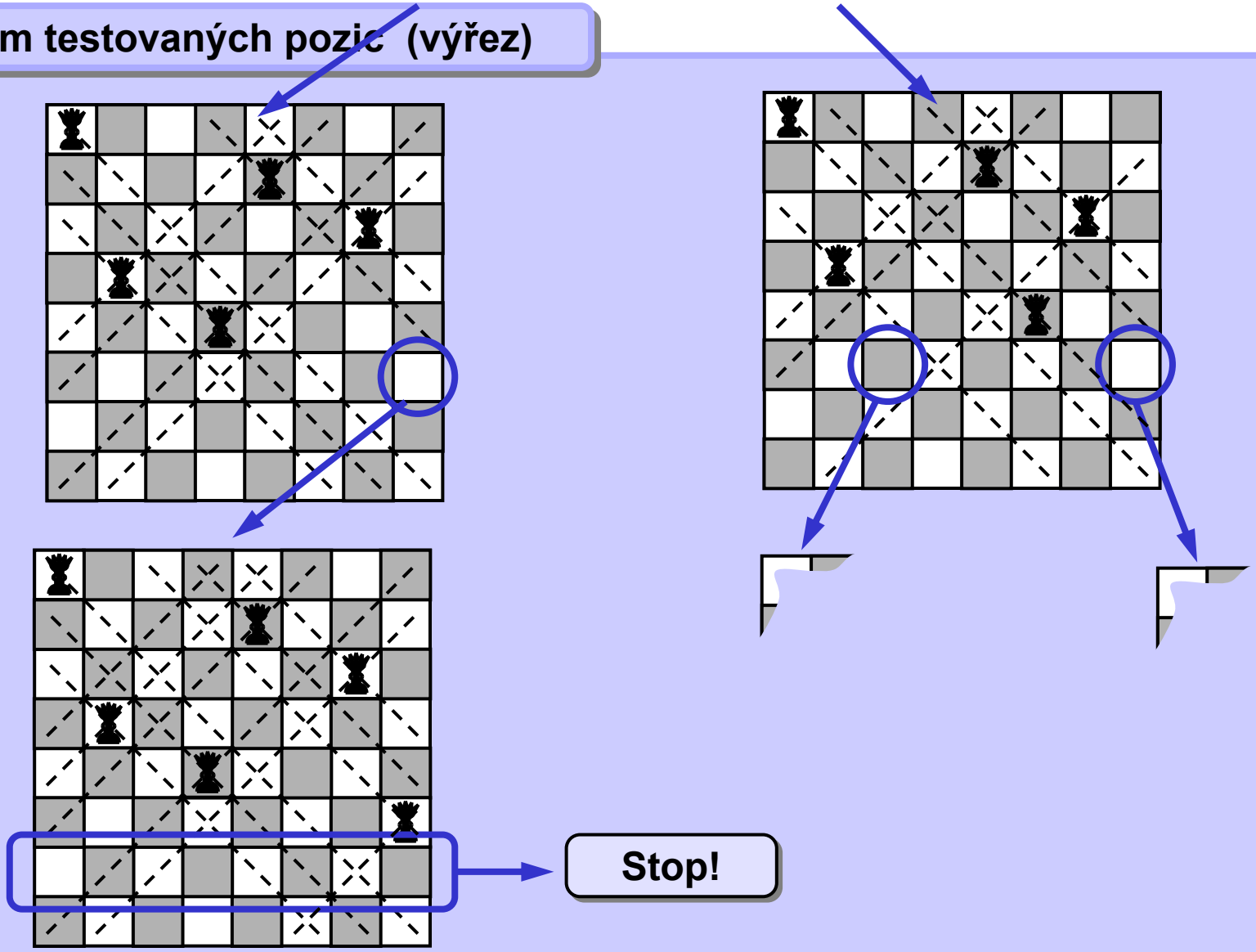
Snadné prohledávání s návratem (Backtrack)

Strom testovaných pozic (výřez)



Snadné prohledávání s návratem (Backtrack)

Strom testovaných pozic (výřez)



Snadné prohledávání s návratem (Backtrack)

N	Počet řešení	Počet testovaných pozic dámy		Zrychlení
		Hrubá síla (N^N)	**Backtrack**	
4	**2**	**256**	**240**	**1.07**
5	**10**	**3 125**	**1 100**	**2.84**
6	**4**	**46 656**	**5 364**	**8.70**
7	**40**	**823 543**	**25 088**	**32.83**
8	**92**	**16 777 216**	**125 760**	**133.41**
9	**352**	**387 420 489**	**651 402**	**594.75**
10	**724**	**10 000 000 000**	**3 481 500**	**2 872.33**
11	**2 680**	**285 311 670 611**	**19 873 766**	**14 356.20**
12	**14 200**	**8 916 100 448 256**	**121 246 416**	**73 537.00**

Tab 3.1 Rychlosti řešení problému osmi dam

Snadné prohledávání s návratem (Backtrack)

```
bool posOK( int x, int y) {
   int i;
   for (i = 0; i < x; i++)
     if ((xPosArr[i] == y) ||                  // stejná řada
         (abs(x-i) == abs(xPosArr[i]-y) )) // nebo diagonála
        return false;
   return true;
}
void tryPutColumn(int y) {
   int x;
   if (y >= N ) print_xPosArr();             // řešení
   else
     for (x = 0; x < N; x++)                 // testuj sloupce
         if (posOK(y, x) == true) {          // když je volno,
           xPosArr[y] = x;                   // dej tam dámu
           tryPutColumn(y + 1);              // a volej rekurzi
 }       }
```

```
Call: tryPutColumn(0);
```