

Níže uvedené úlohy představují přehled otázek, které se vyskytly v tomto nebo v minulých semestrech ve cvičení nebo v minulých semestrech u zkoušky. Mezi otázkami semestrovými a zkuškovými není žádný rozdíl, předpokládáme, že připravený posluchač dokáže zdárně zodpovědět většinu z nich.

Tento dokument je k dispozici ve variantě převážně s řešením a bez řešení.

Je to pracovní dokument a nebyl soustavně redigován, tým ALG neručí za překlepy a jazykové prohřešky, většina odpovědí a řešení je ale pravděpodobně správně :-).

----- COMPLEXITY -----

1.

Průnik množin $\Omega(2n)$ a $O(n \cdot \log(n))$

- a) obsahuje funkci $n/2$
- b) obsahuje funkci $n + \log(n)$
- c) obsahuje funkci n^2
- d) obsahuje všechny funkce uvedené v a), b), c)
- e) je prázdný

2.

Průnik množin $\Omega(n)$ a $O(n \cdot \log(n))$

- 1. obsahuje funkci $\log(n)$
- 2. obsahuje funkci $n/2$
- 3. obsahuje funkci n^2
- 4. je prázdný
- 5. není definován

3.

Průnik množin $\Omega(n \cdot \log(n))$ a $O(n^2/2)$

- a) obsahuje funkci $n+n^2$
- b) obsahuje funkci $\log(n)$
- c) obsahuje funkci $n/2$
- d) je prázdný
- e) není definován

4.

Průnik množin $O(n^2)$ a $\Omega(n \cdot \log(n))$

- a) obsahuje funkci $\log(n)$
- b) obsahuje funkci $2 \cdot n$
- c) obsahuje funkci $2 \cdot n^2$
- d) je prázdný
- e) není definován

5.

Datová struktura D obsahuje pouze jednosměrně zřetězený spojový seznam s n prvky a ukazatel na první prvek seznamu. Odstranění posledního prvku seznamu je operací se složitostí

- a) $O(1)$
- b) $\Theta(1)$
- c) $\Theta(\log_2(n))$
- d) $\Omega(n)$
- e) $\Omega(n \cdot \log_2(n))$

6.

Datová struktura D obsahuje pouze obousměrně zřetězený spojový seznam s n prvky a ukazatel na první prvek seznamu. Asymptotická složitost operace vložení nového prvku do tohoto seznamu je v nejlepším případě

- a) $O(0)$
- b) $\Theta(1)$
- c) $\Theta(\log_2(n))$
- d) $\Omega(n)$
- e) $\Omega(n \cdot \log_2(n))$

7.

The set $O(n \cdot \log(n))$ is a subset of

- a) $\Theta(n \cdot \log(n))$
- b) $\Omega(n \cdot \log(n))$
- c) $O(\log(n))$
- d) $O(n^2)$
- e) $O(n)$

8.

For function $f(x)$ it holds: $f(x) \in O(x^2 \cdot \log_2(x))$ and $f(x) \in \Omega(x^2)$. These conditions are valid just for one function in the following list:

- a) $f(x) = x^3$
- b) $f(x) = x \cdot \log_2(x)$
- c) $f(x) = x^2$
- d) $f(x) = 2^x$

9.

For function $f(x)$ it holds: $f(x) \in \Omega(x^2)$ and $f(x) \in O(x^3)$. These conditions are valid just for one function in the following list:

- a) $f(x) = x^2 \cdot \log_2(x)$
- b) $f(x) = x \cdot \log_2(x)$
- c) $f(x) = 2^x$
- d) $f(x) = x + 1$

10.

Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

- a) $x^2 \in \Omega(x + \log_2(x))$
- b) $x^2 \in \Omega(x \cdot \log_2(x))$
- c) $x^2 \in \Theta(x + \log_2(x))$
- d) $x^2 \in O(x^2 - \log_2(x))$
- e) $x^2 \in \Theta(x^2 + \log_2(x))$

Když k funkci f přičteme funkci g , která roste asymptoticky pomaleji, než funkce f , výsledný součet poroste asymptoticky stejně rychle jako původní funkce f . Proto můžeme pravou stranu zadání v případech a), c), d), e) zjednodušit:

- a) $x^2 \in \Omega(x)$
- b) $x^2 \in \Omega(x \cdot \log_2(x))$
- c) $x^2 \in \Theta(x)$
- d) $x^2 \in O(x^2)$
- e) $x^2 \in \Theta(x^2)$

Funkce x roste rychleji než funkce 1 i než funkce $\log_2(x)$, takže funkce $x^2 = x \cdot x$ roste rychleji než funkce $x = x \cdot 1$ i než funkce $x \cdot \log_2(x)$, takže varianta a) i b) je pravdivá. Varianty d) a e) jsou pravdivé zcela zřejmě, takže jako jediná nepravdivá zbývá jen varianta c) jejíž nepravdivost ostatně vyplývá již z první věty tohoto odstavce.

11.

Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za $c + \log_2(N)$ milisekund. Konstanta c je stále stejná. Asymptotická složitost zpracování celého pole je

- a) $\Omega(N^2)$
- b) $\Omega(c \cdot N^2)$
- c) $\Theta(N \cdot \log_2(N))$
- d) $O(c \cdot \log_2(N))$
- e) $\Theta(c + \log_2(N))$

Doba zpracování prvku s indexem k nezáleží na hodnotě k . Prvků je celkem N , takže celková doba zpracování je tak $N \cdot (c + \log_2(N)) = c \cdot N + N \cdot \log_2(N)$. Díky tomu, že c je konstanta, funkce $c \cdot N$ roste asymptoticky pomaleji než funkce $N \cdot \log_2(N)$, a tudíž nemá žádný vliv na asymptotickou rychlost růstu funkce $c \cdot N + N \cdot \log_2(N)$. Zbývá tak člen $N \cdot \log_2(N)$, který určuje asymptotickou složitost naznačenou ve variantě c). Funkce ve variantách a) a b) rostou asymptoticky rychleji, naopak funkce ve variantách d) a e) rostou asymptoticky pomaleji.

12.

Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za $c \cdot k$ milisekund. Konstanta c je stále stejná. Asymptotická složitost zpracování celého pole je

- a) $O(N \cdot \log_2(N))$
- b) $\Theta(N^2)$
- c) $O(k \cdot N)$
- d) $\Theta(c \cdot N)$
- e) $\Theta(c \cdot k)$

Úloha testuje schopnost sečíst jednoduchou aritmetickou posloupnost. Celková složitost výpočtu je $c \cdot 1 + c \cdot 2 + c \cdot 3 + \dots + c \cdot N = c \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + N) = c \cdot N(N+1)/2 = c/2 \cdot (N^2 + N)$. Poslední výraz je

zřejmě prvkem množiny $\Theta(N^2)$, což odpovídá variantě b). Varianty c), d), e) vyjadřují nižší asymptotickou složitost, c) a d) složitost lineární, e) složitost konstantní, má-li vůbec výraz v e) nějaký smysl, když k nemá žádnou určenou hodnotu. Rovněž varianta a) vyjadřuje menší asymptotickou složitost.

13.

Algoritmus A provede jeden průchod polem s n prvky. Při zpracování prvku na pozici k provede $k+n$ operací. Operační (=asymptotická) složitost algoritmu A je tedy

- a) $\Theta(k+n)$
- b) $\Theta((k+n) \cdot n)$
- c) $\Theta(k^2+n)$
- d) $\Theta(n^2)$
- e) $\Theta(n^3)$

Celkem je provedený počet operací při zpracování všech prvků roven

$$(1+n) + (2+n) + (3+n) + \dots + (n+n) = n \cdot ((1+n) + (n+n))/2 = n \cdot (1+3n)/2 = 3n^2/2 + n/2 \in \Theta(n^2)$$

Povážíme-li navíc ještě režii na přesun od jednoho prvku pole k následujícímu, která má nanejvýš konstantní složitost, připočteme k výsledku ještě člen $\Theta(\text{konst} \cdot n)$, který ovšem na složitosti $\Theta(n^2)$ nic nemění. Platí varianta d).

14.

Algoritmus A probírá postupně všechny prvky v dvourozměrném poli o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí další (nám neznámou) akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu A je tedy

- a) $\Theta(n \cdot \log_2(n))$
- b) $\Theta(n^2)$
- c) $\Theta(n^3)$
- d) $\Theta(n^2 + \log_2(n))$
- e) $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$

Řešení

Je nutno provést $n \times n$ akcí o složitosti úměrné $\log_2(n)$, tedy složitost všech akcí dohromady je úměrná $n^2 \cdot \log_2(n)$. Přesun od jednoho prvku k druhému v poli má složitost konstantní, takže samotný průchod celým polem má složitost úměrnou konstanta $\cdot n^2$. Celkem tak máme složitost $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n) + \text{konstanta} \cdot n^2) = \Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$. To je právě varianta e).

15.

Pro rostoucí spojitě funkce $f(x)$, $g(x)$ platí $f(x) \in \Omega(g(x))$. Z toho plyne, že

- a) $f(x) \in O(g(x))$
- b) $f(x) \in \Theta(g(x))$
- c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
- d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
- e) $g(x) \in O(f(x))$

Řešení

$f(x) \in \Omega(g(x))$ znamená, že $f(x)$ roste rychleji nebo stejně rychle jako $g(x)$. Tudiž $g(x)$ roste pomaleji nebo stejně rychle jako $f(x)$. To vyjadřujeme zápisem $g(x) \in O(f(x))$. Platí možnost e).

16.

Pro rostoucí spojitě funkce $f(x)$, $g(x)$ platí $f(x) \in O(g(x))$. Z toho plyne, že

- a) $f(x) \in \Theta(g(x))$
- b) $f(x) \in \Omega(g(x))$
- c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
- d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
- e) $g(x) \in O(f(x))$

Řešení

$f(x) \in O(g(x))$ znamená, že $f(x)$ roste pomaleji nebo stejně rychle jako $g(x)$. Tudiž $g(x)$ roste rychleji nebo stejně rychle jako $f(x)$. To vyjadřujeme zápisem $g(x) \in \Omega(f(x))$. Platí možnost d).

17.

Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí právě jedno následující tvrzení. Které?

- a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) = g(x)$
- b) ani poměr $f(x)/g(x)$ ani poměr $g(x)/f(x)$ nekonverguje k nule s rostoucím x
- c) rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
- d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
- e) nic z předchozího

Řešení

Stejně rychlý asymptotický růst neznamená, že se musí funkce nutně rovnat, varianta a) odpadá. Stejně tak neznamená, že by jedna funkce musela nutně být větší než druhá, odpadá i varianta c). Chování funkcí v okolí nuly není pro asymptotické chování významné, varianta d) zbytečně žádá příliš mnoho. Stejně rychlý asymptotický růst znamená, že v okolí nekonečna poměr $f(x)/g(x)$ ani poměr $g(x)/f(x)$ nepřekročí nějakou pevnou konstantu. To ovšem znamená, že žádný z těchto poměrů nekonverguje k 0, platí varianta b).

18.

Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

- a) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - x)$
- b) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - \log_2(x))$
- c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$
- d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$
- e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$

Řešení

Když k funkci f přičteme funkci g , která roste asymptoticky pomaleji, než funkce f , výsledný součet poroste asymptoticky stejně rychle jako původní funkce f . Proto můžeme pravou stranu zadání v případě a) – d) zjednodušit:

- a) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2)$
- b) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2)$

- c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2)$
- d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x)$
- e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2)) = \Theta(x \cdot 2 \cdot \log_2(x)) = \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$

Funkce $\log_2(x)$ roste pomaleji než funkce x , takže funkce $x \cdot \log_2(x)$ roste pomaleji než funkce $x \cdot x = x^2$, takže varianta a) i b) je pravdivá. Funkce $\log_2(x)$ má v plus nekonečnu limitu plus nekonečno, takže funkce $x \cdot \log_2(x)$ roste asymptoticky rychleji než funkce x , takže varianta d) je pravdivá. Varianta e) po naznačené úpravě je také zřejmě pravdivá. Zbývá jediná nepravdivá varianta c), jejíž nepravdivost ostatně vyplývá již z první věty tohoto odstavce.

19.

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (.....) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

- a) $x^2 \cdot 2^x \in \dots\dots((\ln(x^2))^2 + 2^x)$
- b) $(\ln(x^2))^2 + 2^x \in \dots\dots(x^2 + \ln(x^2))$
- c) $2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \notin \dots\dots(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$

Řešení

a) funkce nalevo zřejmě roste rychleji než funkce napravo, neboť obě funkce obsahují výraz 2^x , který je však nalevo vynásoben výrazem x^2 , jenž roste asymptoticky rychleji než (pouze!) aditivní výraz $(\ln(x^2))^2$ napravo. Jediná správná možnost je proto $x^2 \cdot 2^x \in \Omega((\ln(x^2))^2 + 2^x)$.

b) funkce nalevo obsahuje člen 2^x , funkce napravo je součtem dvou členů, které oba zřejmě rostou asymptoticky pomaleji než 2^x . Funkce nalevo tedy roste asymptoticky rychleji, takže jediná správná možnost je $(\ln(x^2))^2 + 2^x \in \Omega(x^2 + \ln(x^2))$.

c) funkci napravo lze napsat jako

$$2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1} = 2^x \cdot (2 \cdot \ln(x))^{-1} = 2^{-1} \cdot 2^x \cdot (\ln(x))^{-1}$$

Tato funkce se od funkce nalevo liší jen o multiplikatívni konstantu, takže obě funkce rostou asymptoticky stejně rychle. Platí tudíž všechny tři možnosti:

$$2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \in O(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$$

$$2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \in \Theta(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$$

$$2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \in \Omega(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1}),$$

takže situace (se škrtnutým symbolem náležití) v zadání nemůže nastat, tudíž je nutno prázdné místo proškrtnout.

20.

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (.....) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

- a) $x^2 \cdot \ln(x^2) \in \dots\dots(x^2 + \ln(x))$
- b) $x^3 + \ln(x^2) \in \dots\dots(x^3 + 2^x)$
- c) $x^3 \cdot \ln(x^2) \notin \dots\dots(\ln(x^2) + 2^x)$

Řešení:

a) funkce na pravé straně je součtem dvou funkcí, z nichž druhá -- $\ln(x)$ -- roste asymptoticky pomaleji než první -- x^2 . Celkem tedy funkce na pravé straně roste asymptoticky stejně rychle

jako x^2 . Funkce na levé straně však díky multiplikatívnímu členu $\ln(x^2)$ roste asymptoticky rychleji než x^2 .

Tudíž platí právě

$$x^2 \cdot \ln(x^2) \in \Omega(x^2 + \ln(x)).$$

b) funkce na pravé straně obsahuje exponenciální člen, funkce na levé straně jen člen polynomiální a logaritmický, jež vesměs rostou asymptoticky pomaleji než exponenciála, takže funkce na pravé straně roste asymptoticky rychleji, platí tedy právě:

$$x^3 + \ln(x^2) \in O(x^3 + 2^x).$$

c) podle podobné úvahy jako v b) roste funkce na pravé straně asymptoticky rychleji než funkce na levé straně. Tudíž funkce na levé straně neroste ani asymptoticky stejně rychle ani neroste asymptoticky rychleji. Formálně vyjádřeno:

$$x^3 \cdot \ln(x^2) \notin \Theta(\ln(x^2) + 2^x),$$

$$x^3 \cdot \ln(x^2) \notin \Omega(\ln(x^2) + 2^x).$$

21.

Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$$f(x) \notin O(g(x)), \quad g(x) \notin \Theta(h(x)), \quad h(x) \notin \Omega(f(x))$$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Řešení

První vztah říká, že $f(x)$ musí růst asymptoticky rychleji než $g(x)$, třetí vztah říká, že $f(x)$ musí růst asymptoticky rychleji než $h(x)$. Druhý vztah říká, že asymptotická rychlost růstu $g(x)$ a $h(x)$ není stejná. Můžeme tedy volit např.:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x$$

$$h(x) = \ln(x).$$

○

22.

Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$$f(x) \notin O(g(x)), \quad g(x) \notin \Omega(h(x)), \quad h(x) \notin \Theta(f(x))$$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Řešení

První vztah říká, že $f(x)$ roste asymptoticky rychleji než $g(x)$, druhý vztah říká, že $g(x)$ roste asymptoticky pomaleji než $h(x)$, celkem tedy $g(x)$ roste asymptoticky pomaleji než $f(x)$ i $h(x)$. Poslední vztah pak říká, že $f(x)$ a $h(x)$ nerostou asymptoticky stejně rychle.

Můžeme tedy volit např.:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \ln(x)$$

$$h(x) = x.$$