

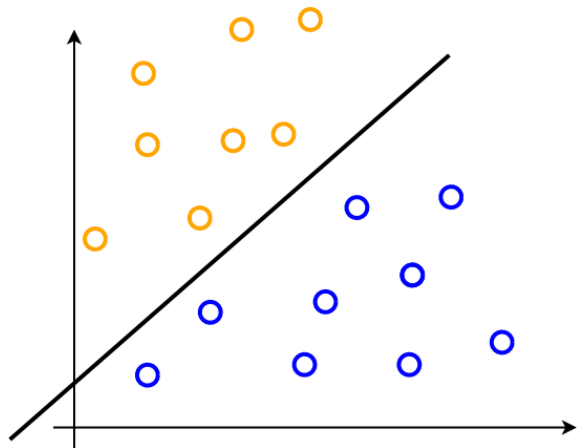
# Support Vector Machines (jemný úvod)

- *Support Vector Classifier (SVC)*
- *Support Vector Machine (SVM)*
- “jádrový trik” (*kernel trick*)
- klasifikace s “měkkou hranicí” (*soft-margin classification*)
- hledání optimálních parametrů

# Formulace úlohy

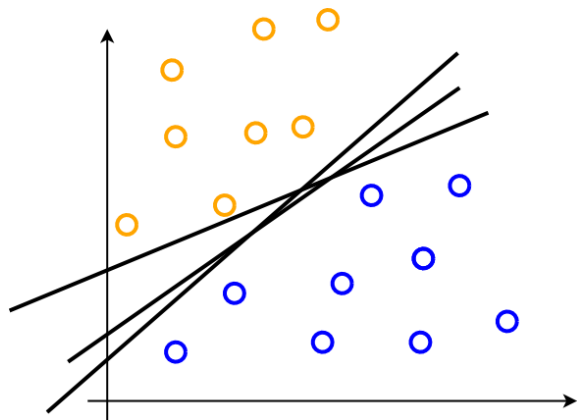
- dáno:
  - $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$
  - $x_i \in \mathbb{R}^p$  příznaky
  - $y_i \in \{-1, 1\}$  třídy
- úloha: klasifikovat nové  $x \in \mathbb{R}^p$  do třídy  $-1$  nebo  $1$

# Motivace



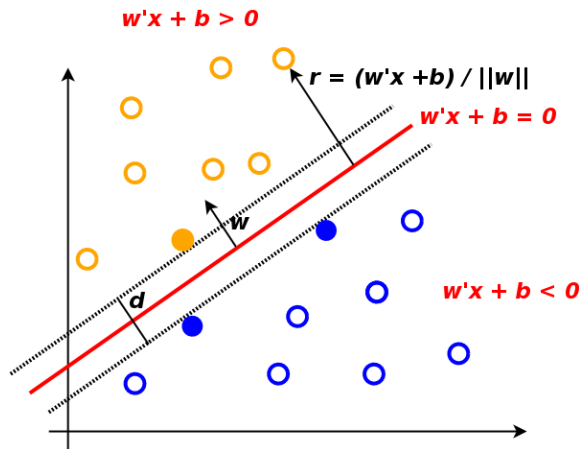
kteřá pŕímka nejlépe odděluje instance daných dvou tříd?

# Motivace



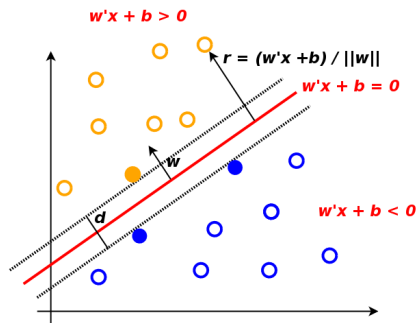
která přímka nejlépe odděluje instance daných dvou tříd?

# Přístup *Support Vector Classifier (SVC)*



rozhodovací funkce  $f(x) = \text{sign}(w'x + b)$

## Přístup SVC (2)



myšlenka:

- maximalizace hranice o šířce  $d = \frac{2}{\|w\|}$
- za podmínky správné klasifikace:
  - $w'x_i + b \geq +1$ , když  $y_i = +1$
  - $w'x_i + b \leq -1$ , když  $y_i = -1$

# Formulace optimalizační úlohy

- $\operatorname{argmax}_{w,b} \left\{ \frac{2}{\|w\|} \right\}$
- za podmínky správné klasifikace:
  - $w'x_i + b \geq +1$  , když  $y_i = +1$
  - $w'x_i + b \leq -1$  , když  $y_i = -1$
  - nebo ekvivalentně:  $y(w'x_i + b) \geq 1$

ekvivalentně (formulace 1):

- $\operatorname{argmin}_{w,b} \left\{ \frac{1}{2} \|w\|^2 \right\}$
- za podmínky správné klasifikace:  $y_i(w'x_i + b) \geq 1$

ekvivalentně (chce se zbavit omezení) (formulace 2):

- $L_p = -\frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i [(w'x_i + b)y_i - 1]$
- $L_p = -\frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i [(w'x_i + b)y_i] + \sum_{i=1}^n \alpha_i$
- $\operatorname{argmin}_{w,b} L_p$
- za podmínky:  $\alpha_i \geq 0$
- $\alpha_i$  - Lagrangeovy multiplikátory



# Formulace optimalizační úlohy

## Primární a duální úloha

$$L_p = -\frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i [(w'x_i + b)y_i] + \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

*argmin*<sub>w,b</sub>  $L_p$  (za podmínky  $\alpha_i \geq 0$ )

Lze ukázat:

- *argmin*<sub>w,b</sub>  $L_p$  za podm.  $C_1 \equiv$  *argmax*<sub>w,b</sub>  $L_p$  za podm.  $C_2$
- $C_1 : \frac{\partial L_p}{\partial \alpha_i} = 0, \alpha_i \geq 0$  (odpovídá podm. správné klasifikace)
- $C_2 : \frac{\partial L_p}{\partial w} = 0, \frac{\partial L_p}{\partial b} = 0, \alpha_i \geq 0$

Hledám extrém  $L_p$ :

- $\frac{\partial L_p}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i = 0 \rightarrow w = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i$
- $\frac{\partial L_p}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$

Substitucí do  $L_p$  získáme duální úlohu:

$$L_d = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j x_i x_j y_i y_j$$

*argmax* <sub>$\alpha_i$</sub>   $L_d$  (za podmínky  $\alpha_i \geq 0$ )

# Optimalizační úlohy

## Rekapitulace

- formulace 1:

- $\operatorname{argmin}_{w,b} \left\{ \frac{1}{2} \|w\|^2 \right\}$  (za podm.:  $y_i(w'x_i + b) \geq 1$ )
- $p + 1$  parametrů,  $n$  lin. omezení

- formulace 2:

- $L_p = -\frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i [(w'x_i + b)y_i] + \sum_{i=1}^n \alpha_i$
- $\operatorname{argmin}_{w,b} L_p$  (za podmínky  $\alpha_i \geq 0$ )
- $p + 1$  parametrů,  $n$  omezení

- formulace 3:

- $L_d = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j x_i x_j y_i y_j$
- $\operatorname{argmax}_{\alpha_i} L_d$  (za podmínky  $\alpha_i \geq 0$ )
- $n$  parametrů,  $n$  omezení
- data  $x_i$  vystupují pouze ve formě součinů  $x_i x_j$
- většina  $\alpha_i$  nulových,  $\alpha_i = 1 > 0$  právě pro *support vectors*

# Řešení optimalizační úlohy

Rozhodovací funkce  $f(x) = \text{sign}(w'x + b)$

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i$$

jak získat  $b$ ?

- pro lib. *support vector*:  $y_i(w'x_i + b) = 1$

- $\rightarrow b = \frac{1}{y_i} - w'x_i$

- prakticky:  $b = \frac{\sum_{i, \alpha_i > 0} (\frac{1}{y_i} - w'x_i)}{\sum \alpha_i}$

tedy konečně dostáváme:

- $f(x) = \text{sign}(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i' x + b)$

## Trik s jádrem (*Kernel trick*)

Rozhodovací funkce:

- $f(x) = \text{sign}(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i' x + b)$

Pozorování:

- příznaky  $x$  se vyskytují pouze ve formě skalárním součinu:  $x_i' x$
- skalární součin  $x_1' x_2$  lze nahradit jádrem  $K(x_1, x_2)$
- $K(x_1, x_2) = \phi(x_1)' \phi(x_2)$
- jádro může realizovat operaci odpovídající skalárnímu součinu ve vysokorozměrném prostoru
- použitím jádra se z SVC stávají SVM

Používaná jádra:

- polynomiální:  $K(x_1, x_2) = (x_1' x_2 + 1)^q$
- *Gaussian radial-basis function (RBF)*:  
 $K(x_1, x_2) = \exp\left\{-\frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\sigma^2}\right\}$
- hyperbolický tangens:  $K(x_1, x_2) = \tanh\{\beta_1 x_1' x_2 + \beta_2\}$

## Trik s jádrem (*Kernel trick*)

Příklad

Polynomiální jádro stupně  $q = 2$ :

$K(x, y) = (x'y + 1)^2$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^2$  operuje v prostoru  $\mathbb{R}^6$ :

$$x \rightarrow \phi(x) = \{x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, 1\}$$

$$y \rightarrow \phi(y) = \{y_1^2, y_2^2, \sqrt{2}y_1y_2, \sqrt{2}y_1, \sqrt{2}y_2, 1\}$$

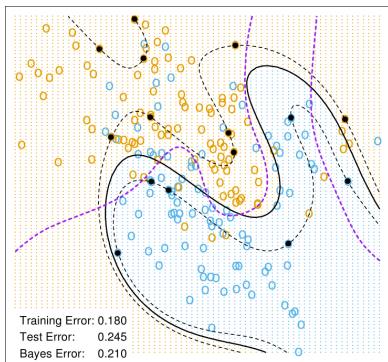
$$\phi(x)' \phi(y) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 1$$

$$(x'y + 1)^2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)^2 =$$

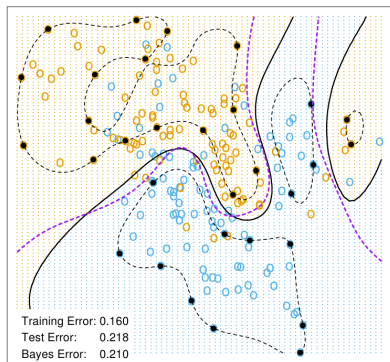
$$x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 1 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

# Ukázka jader

SVM - Degree-4 Polynomial in Feature Space



SVM - Radial Kernel in Feature Space



# Klasifikace s “měkkou hranicí”

## Soft-margin classification

Motivace:

- třídy nemusejí být oddělitelné
- přesto chceme SVM použít

Řešení:

- dovolit SVM udělat “malou” chybu

Jak:

- $\operatorname{argmin}_{w,b} \left\{ \frac{1}{2} \|w\|^2 \right\} + C \sum_{i=1}^n \xi_i$
- za podm. téměř správné klasifikace:  $y_i(w'x_i + b) \geq 1 - \xi_i$
- $C$  představuje regularizační konstantu
- $C = \infty$  odpovídá původní formulaci separabilní úlohy
- $C$  se hledá nejčastěji pomocí křížové validace

- fungují velmi dobře
- časová složitost trénování:  $O(n^2)$
- uživatel volí typ jádra a parametry
- parametry se hledají typicky křížovou validací
- po natrénování si stačí pamatovat *support vectors*



## Klasifikace do více tříd

SVM umí rozlišovat jen do dvou tříd

možná řešení klasifikace do  $K$  tříd:

- “jeden proti všem”:  $K$  úloh: klasifikace třídy  $k$  proti zbytku, “vítěz bere vše”
- “jeden na jednoho”:  $\frac{K(K-1)}{2}$  úloh: klasifikace třídy  $k_1$  proti  $k_2$ , hlasování

# Rozšíření SVM

- *SVM regression*
- detekce nečekaných pozorování *novelty detection*

Christopher J.C. Burges: A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition, Data Mining and Knowledge Discovery (1998), volume 2, p.121-167.

Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.: The Elements of Statistical Learning, Springer New York Inc., 2001, New York, NY, USA, <http://statweb.stanford.edu/tibs/ElemStatLearn/>