

# Optimalizace

Lokální extrémý vázané rovnostmi

---

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

2. 5. 2024

FEL ČVUT

# Úloha s omezeními ve tvaru rovností

Hledáme extrémy funkce  $f$  **vázané rovnostmi**

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

## Úloha

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{za podmínek } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Předpokládáme  $f, \mathbf{g}$  **spojitě diferencovatelné**.

## Speciální případy

- **afinní** kritérium, **afinní** omezení - není co řešit,
- **obecné** kritérium, **afinní** omezení - to bude rozcvička a inspirace,
- **afinní** kritérium, **obecné** omezení - probereme až po následujícím:
- **obecné** kritérium, **obecné** omezení - to je cíl.

## Speciální případ: **afinní** omezení

### Úloha

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{za podmíněk } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ .

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}, \text{ neboli } \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T.$$

### Tvrzení

Pro každý lokální extrém  $\mathbf{x}$  této úlohy existuje  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  tak, že

$$f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \text{tj.}$$

$$f'(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}, \quad \text{neboli } \nabla f(\mathbf{x}) = -\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}.$$

## Lagrangeovy multiplikátory

Vektor  $\lambda$  bude (i v obecnějším případě) vektor **Lagrangeových multiplikátorů**.

Na jejich znaménku nezáleží; můžeme si je vynásobit jakýmkoli nenulovým číslem (i každý jiným).

Mohli bychom je i vynásobit **regulární** maticí a použít  $R\lambda$  místo  $\lambda$ ; množina řešení takto upravených omezení se tím nezmění.

Jejich hodnoty poslouží jen během výpočtu, na jeho konci nás nezajímají.

## Ještě speciálnější případ:

### Úloha na nejmenší normu řešení nehomogenní soustavy

Hledáme řešení soustavy  $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  s nejmenší normou. Řešíme úlohu

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \right\}.$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T.$$

**Podmínky optimality** (s využitím předchozího)

$$\mathbf{x} = f'(\mathbf{x})^T = -\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Má-li  $\mathbf{C}$  lineárně nezávislé řádky, pak optimálním řešením je

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{d}.$$

## Méně speciální případ:

### Úloha nejmenších čtverců s lineárními omezeními

Hledáme řešení úlohy nejmenších čtverců pro soustavu  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  s lineárními omezeními  $\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{d}$ . Tedy řešíme úlohu

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \mid \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{d} \right\}.$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}),$$

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{b}^T \mathbf{A} = -\lambda^T \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \lambda = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

#### Podmínky optimality

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

## Obecně: Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Lagrangeovy multiplikátory  $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$

Jako dříve, budeme řešit soustavu rovnic

$$f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{C} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{C} := \mathbf{g}'(\mathbf{x})$  (lineární aproximace), tedy

$$f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

To lze interpretovat také jako hledání stacionárních bodů

Lagrangeovy funkce  $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$



## Obecně: Metoda Lagrangeových multiplikátorů





$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

### Podmínky optimality

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \text{ neboli } \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0},$$
$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T = \mathbf{0}.$$

Za příslušných předpokladů existuje  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  splňující  $L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ , tedy  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  je stacionárním bodem funkce  $L$ .

## Reference

-  T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. [https://cw.fel.cvut.cz/wiki/\\_media/courses/b0b33opt/opt.pdf](https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf)
-  S. Boyd, L. Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.
-  J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005.  
<https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf>
-  M. Navara. *Matematika spojitého světa*. Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2011.  
[https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS\\_print.pdf](https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf)